

整数基础知识

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

北 京 出 版 社

整数基础知识

北 京 出 版 社

整数基础知识

北京教育学院师范教研室编

*

北京出版社出版

(北京北三环中路6号)

北京市新华书店发行

广益印刷厂印刷

*

1982年12月第1版 1985年6月第2版

1987年6月第5次印刷

书号: 7071·832 定价: 1.25元

第一版说明

为了提高师范学校学生和在职小学教师的数学专业水平，我们结合师范学校的特点，编写了《集合与数》和《整数基础知识》两本教材，作为师范学校的专业课教学用书，也可作为小学教师进修提高的教材或中学数学教师的教学参考书。

为了便于自学，我们在编写过程中，力求叙述通俗，难点分散，并在讲解过程中插进富有启发性的问题及练习，作为自学的思考“阶梯”。书中每章之末附有习题，习题按节编排，对其中较难的习题附有提示或解答于书末。

本书由北京第三师范学校张君达、北京教育学院师范教研室方金秋、许华棋同志编写。由于我们的水平不高，编写时间又很仓促，教材中一定会有不少的缺点和错误，殷切地希望同志们提出批评和建议，以便进一步修改。

北京教育学院师范教研室

一九八二年三月

第二版说明

本书第一版曾经在北京市第一师范学校、北京市第三师范学校、北京市通县师范学校等四年制师范学校使用过。在使用过程中，我们组织任课教师进行集体备课，并且通过教学的实践，收集本书第一版的缺点与问题，作为修改的参考。使用过本书的师范学校师生反映学习这本书对提高师范生的整数知识水平是十分必要的，对于师范生今后驾驭小学数学教材大有好处。本书是对中师（特别是四年制中师）数学教材改革的一个初步尝试，在教学实践中看到了本书的生命力。

这次修改对各章节都做了不同程度的改动。如第一、二章为了便于教学，适当把节分细，第三章做了较大的变动，第四章删去了“模”一节，第五章中“无限连分数的值”一节改为选学教材。与此同时对各章节的例题和习题也作了部分的调整和增删。

采用本书作为中师数学专业课教材时，要注意与统编教材的衔接，还要注意，本书不能完全取代“理论算术”的内容。

本书的这次修改工作是由北京教育学院师范教研室方金秋负责，并邀请了北京第三师范学校张君达参与本书修改。北京第一师范学校周耿老师、北京第三师范学校王进明老师对本书修改稿提出了许多宝贵意见。这一版最后由北京教育学院许华棋进行了复审。由于我们的水平不高教材中还不免会有不少的缺点和错误，尚待读者在使用中不断提出意见以便进一步修改。

北京教育学院师范教研室

一九八四年十一月

目 录

第一章	最大公约数和最小公倍数	1
§ 1	约数和倍数	1
§ 2	偶数和奇数	4
§ 3	约数和倍数的性质	8
§ 4	质数和合数	12
§ 5	最大公约数与最小公倍数	19
§ 6	$(a, b)[a, b] = ab$	22
§ 7	最大公约数的性质	26
§ 8	最小公倍数的性质	33
§ 9	分解质因数	37
§ 10	最大公约数的求法	41
§ 11	最小公倍数的求法	48
§ 12	实际应用举例	54
第二章	数的整除性	65
§ 1	数的整除特征	65
§ 2	含有 $10^n \pm 1$ 型约数的数的特征	70
§ 3 *	含有 $10^k \cdot n \pm 1$ 型约数的数的特征	81
§ 4	整值多项式的整除性	85
§ 5	整值解析式	92
§ 6	自然数 a 的正约数个数 $T(a)$	97
§ 7	自然数 a 的正约数总和 $S(a)$	101
§ 8	数的进位法	104

第三章	不定方程	118
§ 1	不定方程的意义和试验法	119
§ 2	二元一次不定方程有整数解的特征	121
§ 3	二元一次不定方程的求解公式	126
§ 4	多元一次不定方程	133
§ 5	勾股数	136
第四章	同余	147
§ 1	同余的概念	147
§ 2	同余的充分必要条件	151
§ 3	同余的基本性质	157
§ 4	同余的加减性质	160
§ 5	同余的乘法性质	162
§ 6	整系数整值多项式的同余性质	166
§ 7	弃九法	175
§ 8	约去同余式两端公约数的性质	182
§ 9	剩余类	190
§ 10	完全剩余系	192
§ 11	简化剩余系	199
§ 12	费尔马——欧拉定理	201
§ 13	一元一次同余式	205
§ 14	一元一次同余式的解法	215
§ 15	利用解同余式方法解不定方程	218
§ 16	孙子定理	221
第五章	连分数	242
§ 1	连分数的概念	242
§ 2	分数化有限连分数的一种方法	255

§ 3	渐近分数	259
§ 4	渐近分数的性质	262
§ 5 *	无限连分数的值	271
§ 6	连分数的应用举例	279

第一章 最大公约数和最小公倍数

在日常生活中，我们会遇到许多有趣而又耐人寻味的问题：

一块长方体的木料长 a 尺，宽 b 尺，厚 c 尺，要把它锯成同样大小的正方体木块，问木块的边长是多少时，它们的体积最大？

排练团体操时，要求队伍变成10行、15行、18行、24行时，队形都能成为矩形，问最少需要多少人参加团体操的排练？

有甲、乙、丙、丁四个齿轮互相啮合，齿数分别为84, 36, 60和48. 问在转动过程中同时啮合的各齿到下次再同时啮合，各齿轮分别转过多少圈？

.....

这些问题都涉及到最大公约数与最小公倍数的概念。它们是“整数基础知识”中的两个重要的基本概念。

§1 约数和倍数

我们知道所谓整数指的是象

$\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

这样的数，而把

$1, 2, 3, 4, \dots$

这些数叫做自然数。在自然数范围内，明显有

自然数 + 自然数 = 自然数;

自然数 $\times$ 自然数 = 自然数.

但是由自然数减去自然数, 不一定得自然数. 减法运算可能出现零和负数, 自然数又叫做正整数, 而把

$-1, -2, -3, -4, \dots$

这些数叫做负整数. 正整数、负整数和零统称整数.

本书主要研究整数的性质.

在整数范围内, 明显有

整数 + 整数 = 整数;

整数 - 整数 = 整数;

整数 $\times$ 整数 = 整数.

但是整数除整数不一定得整数. 究竟什么样的整数除什么样的整数才得整数? 研究这个问题, 就是研究整数的整除性, 这也是我们要研究的一个重要内容.

以后, 如果没有特别声明, 将用

$a, b, c, \dots$ 或 $x, y, z, \dots$ 或 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

表示整数. 当几个字母联写在一起时, 表示将这几个字母连乘起来, 如

$$abc = a \times b \times c.$$

当几个字母联写在一起, 并且上面标有横线时, 字母将仅表示数字, 而不表示十进位制数. 如 $\overline{abcd}$ 表示是由四个数字组成的数, a, b, c, d 可能取 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ 这十个数字. 特别当 $a \neq 0$ 时, $\overline{abcd}$ 表示一个四位数.

练习 1 任意两个负整数分别进行 “+、-、 $\times$ 、 $\div$ ” 运算, 是否一定得负整数?

练习 2 如果 $\overline{abcd}$ 表示一个四位数, 那么这样的四位数有

多少个? 如果 a, b, c, d 是不重复的非零数字, 那么这样的四位数有多少个?

定义 1 设 a, b 是整数, $b \neq 0$. 如果有一个整数 q , 可使 $a = bq$, 那么 b 叫做 a 的约数, a 叫做 b 的倍数. 有时也说, b 能整除 a 或 a 能被 b 整除.

如果 b 能整除 a , 就写作 $b \mid a$, 如 $4 \mid 8, 3 \mid 6$. 由于 $-30 = 6 \times (-5)$, $20 = (-5) \times (-4)$, 所以 $6 \mid (-30)$, $(-5) \mid 20$.

如果 b 不能整除 a , 就写作 $b \nmid a$, 如 $2 \nmid 3, 4 \nmid 6, (-3) \nmid 5$. 在这种情况下, 有时 a 称作 b 的非倍数, 而 b 称作 a 的非约数.

如果 $a = bq$, $q \neq 0$, 当然 q 也是 a 的约数.

如果 a 是任意整数, 那么

$$0, \pm a, \pm 2a, \pm 3a, \dots$$

显然都是 a 的倍数.

练习 3 什么整数是任何整数的倍数? 什么整数是任何整数的约数?

练习 4 对于整数 a, b , 如果 $|b| < |\pm a|$, 并且 $|\pm a| \mid b$, 那么这样的 b 有几个? 求出来.

练习 5 任一整数的平方数的末尾数字仅可能是哪几个数字? 把它们全部列举出来.

例 1 试证五个连续整数的平方和不可能是一个完全平方数.

证明: 设五个连续整数分别为 $n-2, n-1, n, n+1, n+2$, 其中 n 是整数, 则其平方和

$$\begin{aligned} N &= (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 \\ &= 5(n^2 + 2). \end{aligned}$$

由定义 1, 有 $5|N$, 即 N 有约数 5, 如果 N 是一完全平方数, 那么 N 应含有两个约数 5, 即有约数 $5^2 = 25$. 要证 N 不是完全平方数, 仅需证 $5 \nmid (n^2 + 2)$. 其实, 任一整数的平方数 n^2 的末尾数字仅可能是 0, 1, 4, 5, 6, 9, 不可能是 3, 8, 因此 $(n^2 + 2)$ 不是 5 的倍数, 即 $5 \nmid (n^2 + 2)$, 所以 N 不是一个完全平方数.

例 2 已知两数, 其中每一数可表为两个数的平方和. 试证已知两数的积可表为两个数的平方和.

证明: 设已知两数为 m, n , 且有 $m = a^2 + b^2, n = c^2 + d^2$, 则两数积

$$\begin{aligned} m \cdot n &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \\ &= (ac)^2 + (bc)^2 + (ad)^2 + (bd)^2 \\ &= (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 \end{aligned}$$

即 $m \cdot n$ 可表为两数的平方和.

§2 偶数和奇数

我们把能够被 2 整除的整数

$$0, \pm 2, \pm 4, \dots,$$

叫做**偶数**. 偶数可表示为 $2k$, 其中 k 为整数. 正偶数 2, 4, 6, 8, ... 叫做**双数**, 双数可表示为 $2k$, 其中 k 为正整数.

我们把不能被 2 整除的整数

$$\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$$

叫做**奇数**. 奇数可表示为 $2k + 1$, 其中 k 为整数. 正奇数 1, 3, 5, 7, ... 叫做**单数**, 单数可表示为 $2k + 1, k = 0, 1, 2, \dots$ 或表示为 $2k - 1, k = 1, 2, 3, \dots$.

性质 1 偶数与偶数的和是偶数;

奇数与奇数的和是偶数；

奇数与偶数的和是奇数。

性质 2 任意多个偶数的和仍为偶数；

奇数个奇数的和是奇数；

偶数个奇数的和是偶数。

性质 3 任意整数与偶数的积是偶数，即

整数 $\times$ 偶数 = 偶数。

特别， n 个偶数的积是 2^n 的倍数。

性质 4 奇数与奇数的积是奇数。特别，奇数的任意非负整数次幂是奇数，即

$(\text{奇数})^n = \text{奇数}$ ，（ n 为非负整数）

练习 1 据性质 3 说明“相邻两个整数的积是偶数”的道理。

练习 2 假设偶数用“0”来表示，奇数用“1”来表示，“+”、“ $\times$ ”表示相应运算。填充下表：

+	0	1
0		
1		

$\times$	0	1
0		
1		

从奇数与偶数的定义出发，不难得到这些性质的证明。下面，我们一起来分析两个例子，为同学们证明这类问题时的思路及方法提供参考。其余各性质的证明将留给同学们自己完成。

例 1 试证任一奇数与任一偶数的和是奇数。

证明：设 α 为任一奇数， β 为任一偶数，则有 $\alpha = 2m + 1$ ， $\beta = 2n$ ，其中 m 、 n 为整数。因此

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= (2m + 1) + 2n \\ &= 2(m + n) + 1.\end{aligned}$$

令 $k = m + n$, 则 $\alpha + \beta = 2k + 1$. 由于 m, n 为整数, 因此 $(m + n)$ 是整数, 即 k 为整数.

由此得 $\alpha + \beta = 2k + 1$ (k 为整数) 是奇数, 命题得证.

例 2 试证偶数个奇数的和是偶数.

证明: 设有 $2m$ 个奇数: $a_1 = 2k_1 + 1, a_2 = 2k_2 + 1, \dots, a_{2m} = 2k_{2m} + 1$, 其中 k_i 为整数 ($i = 1, 2, \dots, 2m$). 这 $2m$ 个奇数的和等于

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_{2m} &= (2k_1 + 1) + (2k_2 + 1) + \dots + (2k_{2m} + 1) \\ &= 2k_1 + 2k_2 + \dots + 2k_{2m} + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{2m \text{ 个}} \\ &= 2(k_1 + k_2 + \dots + k_{2m}) + 2m \\ &= 2(k_1 + k_2 + \dots + k_{2m} + m). \end{aligned}$$

令 $N = k_1 + k_2 + \dots + k_{2m} + m$, 由于 k_i 与 m 为整数 ($i = 1, 2, \dots, 2m$), 因此 N 为整数. 因此 $a_1 + a_2 + \dots + a_{2m} = 2N$ 是偶数, 所以偶数个奇数的和是偶数.

练习 3 证明性质 3.

例 3 证明 64 不可能是连续几个自然数的和.

证明: (用反证法). 假定 64 是 $(m + 1)$ 个连续自然数的和, 那么

$$\begin{aligned} 64 &= n + (n + 1) + \dots + (n + m) \\ &= \frac{(m + 1)(2n + m)}{2}, \end{aligned}$$

由此有

$$(m + 1)(2n + m) = 2^7, \quad (1)$$

其中 m, n 是自然数.

由 (1) 式知 $(m + 1)$ 和 $(2n + m)$ 都必须是偶数,

同时由于 2^7 是7个2连乘, 所以 $(m+1)$ 和 $(2n+m)$ 都只含有(除去1以外)若干个2组成的约数.

由于 $m+1$ 是偶数, 则 m 必是奇数. 又由于 $2n$ 是偶数, m 是奇数, 则 $2n+m$ 也应是奇数. 这与上面由(1)式导出的“ $2n+m$ 是偶数”的结论矛盾. 因此64不可能是连续几个自然数的和.

练习4 想一想: 例3中的数64可不可以换成8, 16, 32, ...等数? 这些数有什么共同特点?

例4 设二次三项式

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

的系数都是整数, 并且有某一奇数 β , 使得 $f(\beta)$ 是奇数. 假定 c 是奇数, 求证方程 $f(x) = 0$ 没有奇数根.

证明: 因为 $f(\beta) = a\beta^2 + b\beta + c$ 是奇数, 并且 c 是奇数, 则

$$a\beta^2 + b\beta = \beta(a\beta + b)$$

是偶数. 由于 β 是奇数, 所以 $a\beta + b$ 是偶数. 又由于 β 是奇数, 因此 a 与 b 同奇或同偶.

设 β' 为任意一个奇数, 现证明 $f(\beta') \neq 0$, 即方程 $f(x) = 0$ 没有奇数根.

其实, 若 β' 是一奇数, 则 $a\beta' + b$ 是偶数.

由此

$$\begin{aligned} f(\beta') &= a\beta'^2 + b\beta' + c = \beta'(a\beta' + b) + c \\ &= \text{偶数} + \text{奇数} \neq 0. \end{aligned}$$

所以方程 $f(x) = 0$ 没有奇数根.

练习5 已知 a 、 b 、 c 是任意给定的三个整数, 试说明“必能从中选出两个, 使其和(差)是偶数”的道理.

§3 约数与倍数的性质

我们知道, 如果 $4|12$, 那么根据整除的定义有 $(-4)|12$, $4|(-12)$, $(-4)|(-12)$. 这一点是具有一般性的, 由此有

定理 1 若 $a|b$, 则

$$(-a)|b, a|(-b), (-a)|(-b), |a| \mid |b|.$$

证明: 因为 $a|b$, 所以由定义 1 必有一个整数 q , 可使 $b = aq$. 故得

$$\begin{aligned} b &= aq = (-a)(-q), \\ -b &= a(-q) = (-a)q, \\ |b| &= |aq| = |a| \cdot |q|. \end{aligned}$$

由于 $\pm q$ 与 $|q|$ 都是整数, 所以有

$$\begin{aligned} (-a)|b, a|(-b), (-a)|(-b), \\ |a| \mid |b|. \end{aligned}$$

这个定理也可以这样说: 如果 $a|b$, 那么 $(\pm a)|(\pm b)$, 其中 a, b 的正负号可以任意搭配. 这样无论 a, b 是正或负, 其中包括 $|a| \mid |b|$.

显然, 如果 $|a| \mid |b|$, 且 $|b| < |a|$, 那么就一定有 $b = 0$. 这就是 §1 练习 4 的解答.

练习 1 已知 $7|21$, $21|168$, 那么 7 一定能整除 168 吗? 试用整除定义说明你的结论.

定理 2 如果 $a|b$, $b|c$, 那么 $a|c$.

证明: 因为 $a|b$, 故必有一整数 q_1 , 可使 $b = aq_1$. 同理, 必有一整数 q_2 , 可使 $c = bq_2$. 因此 $c = bq_2 = a(q_1q_2)$. 由于 q_1, q_2 是

整数, 所以 q_1q_2 也是整数, 由整除定义, 有 $a \mid c$.

推论 如果 $a \mid b$, 且 m 是整数, 那么 $a \mid bm$.

证明: $\because a \mid b$, 则 $b = aq$, q 是整数,

又 m 是整数, 且 $bm = a(mq)$,

由于 mq 是整数, 所以

$$a \mid bm.$$

练习 2 举例说明什么是充分条件? 必要条件? 充要条件?

练习 3 已知 $3 \mid 6$, 是否一定有 $3 \cdot c \mid 6 \cdot c$? 应该对 c 有什么限制, 才能有上述结论?

定理 3 已知 c 是非零整数, $a \mid b$ 是 $ac \mid bc$ 的充要条件.

证明: (充分性) $\because a \mid b$, 由整除定义, $a \neq 0$. 又 $\because c \neq 0$, $\therefore ac \neq 0$. 因为 $a \mid b$, 由此 $b = aq$, 其中 q 是整数. 因此有 $bc = acq$, 故得 $ac \mid bc$.

(必要性) $\because ac \mid bc$, $\therefore ac \neq 0$. 由此 $a \neq 0$, 且 $c \neq 0$. 由整除定义及 $ac \mid bc$, 有 $bc = acq$, 其中 q 是整数. 因此有 $b = aq$, 故得 $a \mid b$.

我们知道, 如果 $3 \mid 12$, 且 $3 \mid 21$, 那么就有 $3 \mid (12 \pm 21)$. 这个结果使我们考虑到: 如果 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 都是 d 的倍数, 那么它们的任意的代数和是否也是 d 的倍数? 定理 4 回答了这个问题.

定理 4 设 $n > 1$ 是整数. 如果

$$d \mid a_1, d \mid a_2, \dots, d \mid a_n,$$

那么

$$d \mid (\pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n).$$

证明: $\because d \mid a_1, d \mid a_2, \dots, d \mid a_n$, 故必有 n 个整数 $q_1, q_2,$