

高等学校试用教材

材料力学

下 册

浙 江 大 学 南 京 工 学 院 西 安 交 通 大 学
西 北 工 业 大 学 陕 西 机 械 学 院 华 中 工 学 院 合 编
镇 江 农 业 机 械 学 院 华 东 工 程 学 院 上 海 工 业 大 学
浙 江 大 学 刘 鸿 文 主 编

人 民 教 育 出 版 社

高等学校试用教材

材 料 力 学

下 册

浙 江 大 学 南 京 工 学 院 西 安 交 通 大 学
西 北 工 业 大 学 陕 西 机 械 学 院 华 中 工 学 院 合 编
镇 江 农 业 机 械 学 院 华 东 工 程 学 院 上 海 工 业 大 学
浙 江 大 学 刘 鸿 文 主 编

人 民 教 育 出 版 社

本书是根据一九七七年十一月教育部委托召开的高等学校工科力学教材会议讨论的机械类多学时材料力学教材编写大纲编写的。分上、下册出版。上册内容包括:绪论、拉伸与压缩、剪切、扭转、弯曲强度、弯曲变形、应力状态理论和强度理论、组合变形、平面曲杆等九章和平面图形的几何性质(附录)。下册内容包括:用能量法计算变形、静不定系统、动载荷、交变应力、压杆稳定、电测应力分析基础、弹性力学的平面问题、有限单元法简介、线弹性断裂力学简介等九章。除下册最后三章为选修内容外,其余都为基本内容。弹性力学的平面问题一章中有关厚壁圆筒及组合厚壁筒部分,也可以作为独立专题讲授。

高等学校试用教材

材 料 力 学

下 册

浙 江 大 学 南京工学院 西安交通大学
西北工业大学 陕西机械学院 华中工学院 合编
镇江农业机械学院 华东工程学院 上海工业大学
浙江大学 刘鸿文 主编

人 民 教 育 出 版 社 出 版

新华书店北京发行所发行

武汉市江汉印刷厂印装

开本 787×1092 1/32 印张 10 12/16 字数 259,000

1979年4月第1版 1979年11月湖北第1次印刷

印数 1—105,000

书号 15012-0155 定价 0.89元

下 册 目 录

第十章 用能量法计算变形	1
§ 10-1 概述	1
§ 10-2 杆件变形能的计算	2
§ 10-3 变形能的普遍表达式	8
§ 10-4 卡氏定理	10
§ 10-5 莫尔定理	18
§ 10-6 计算莫尔积分的图乘法	24
§ 10-7 功的互等定理和位移互等定理	28
习题	30
第十一章 静不定系统	37
§ 11-1 静不定系统的概念	37
§ 11-2 拉伸和压缩的静不定问题	40
§ 11-3 弯曲静不定问题	45
*§ 11-4 连续梁及三弯矩方程	52
§ 11-5 用力法解静不定系统	59
*§ 11-6 用位移法解静不定系统	71
习题	83
第十二章 动载荷	89
§ 12-1 概述	89
§ 12-2 构件作匀加速直线运动或匀速转动时的应力计算	89
§ 12-3 构件在强迫振动时的应力计算	95
§ 12-4 冲击时应力和变形的计算	101
§ 12-5 提高构件抗冲击能力的措施	107
§ 12-6 冲击韧性	110
习题	112
第十三章 交变应力下构件的强度计算	119
§ 13-1 交变应力及疲劳破坏的概念	119

§ 13-2	交变应力的循环特性、应力幅度和平均应力	121
§ 13-3	材料的持久极限及其测定	124
§ 13-4	影响构件持久极限的主要因素	128
§ 13-5	对称循环下构件的疲劳强度计算	137
§ 13-6	持久极限曲线及其简化折线	139
§ 13-7	不对称循环下构件的疲劳强度计算	143
§ 13-8	弯曲和扭转组合交变应力下构件的疲劳强度计算	148
§ 13-9	提高构件疲劳强度的一些措施	153
习题		154
第十四章	压杆稳定	156
§ 14-1	压杆稳定的概念	156
§ 14-2	两端铰支细长压杆的临界压力	162
§ 14-3	其他支座条件下细长压杆的临界压力	163
§ 14-4	欧拉公式使用的范围	164
§ 14-5	压杆的稳定校核	171
*§ 14-6	压杆稳定校核的折减系数法	174
§ 14-7	提高压杆稳定性的措施	178
*§ 14-8	纵横弯曲的概念	181
习题		184
第十五章	电测应力分析基础	191
§ 15-1	概述	191
§ 15-2	电测应力分析的基本原理	191
§ 15-3	应变、应力的测量	200
§ 15-4	旋转构件应变及动应变测量简介	212
习题		214
第十六章	弹性力学的平面问题	216
§ 16-1	概述	216
§ 16-2	应力分量和应力分量的记号	217
§ 16-3	平面应力与平面应变	219
§ 16-4	平衡条件、边界条件	221
§ 16-5	位移与应变、连续性条件	224
§ 16-6	应力与应变的关系	226

§ 16-7	弹性力学平面问题的基本方程及其解法	228
§ 16-8	由应力表示的连续性条件、应力函数	230
§ 16-9	最简单的平面问题——板条的拉伸及纯弯曲	233
§ 16-10	悬臂梁的弯曲	235
§ 16-11	平面问题的极坐标方程	241
§ 16-12	圆形曲杆的纯弯曲	245
§ 16-13	平板拉伸时孔边的应力集中	249
§ 16-14	厚壁圆筒	254
§ 16-15	过盈配合、组合厚壁筒	259
§ 16-16	旋转圆盘	262
	习题	266
第十七章	有限单元法简介	269
§ 17-1	概述	269
§ 17-2	结构的离散化、位移模式	269
§ 17-3	应力矩阵	274
§ 17-4	用节点位移表示的节点力、单元刚度矩阵	276
§ 17-5	载荷向节点的移置	281
§ 17-6	平面问题的求解、整体刚度矩阵	284
§ 17-7	小结及计算结果举例	294
	习题	297
第十八章	线弹性断裂力学简介	299
§ 18-1	概述	299
§ 18-2	应力强度因子	301
§ 18-3	断裂韧性、线弹性断裂力学的断裂判据	303
§ 18-4	关于计算应力强度因子的一些资料	305
§ 18-5	葛里菲斯理论	313
§ 18-6	应力强度因子的塑性区修正	317
§ 18-7	板件厚度对脆断的影响	321
§ 18-8	亚临界扩展速率和疲劳寿命估计	323
	习题	328
	下册习题答案	330

第十章 用能量法计算变形

§ 10-1 概 述

以前各章曾分别讨论过杆件受拉伸(压缩)、扭转或弯曲时变形的计算。除这些简单的基本变形外,还经常遇到一些较复杂的情况,例如,组合变形下的杆件(图 10-1, *a*)、刚架、桁架和曲杆等(图 10-1, *b*, *c*, *d*)。计算这些结构的某一点或某一截面的位移时,能量法是一种比较简便的方法。

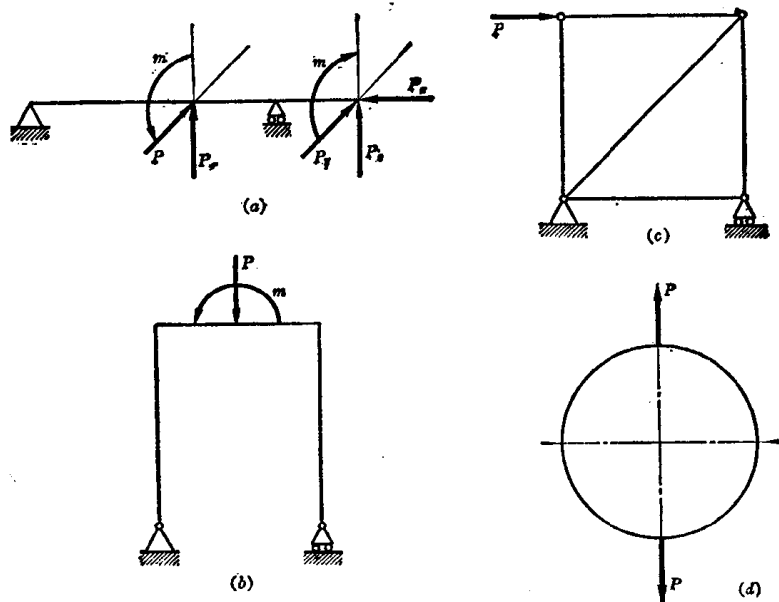


图 10-1

在 § 7-8 中曾经讨论过轴向拉伸或压缩的变形能计算,指出了拉伸或压缩时杆件的变形能在数值上等于变形过程中外力所做

的功[公式(7-15)]。这一结论可以推广到弹性体变形的其他情况。事实上,弹性体因外力作用而变形,于是引起外力作用点沿作用线方向的位移,所以外力作了功,同时弹性体因变形而储存了变形能。若外力由零开始缓慢地增加,弹性体自始至终处于平衡状态,动能的变化可以不计,如果再省略变形过程中其他能量的少量损失(主要是热能),可以认为外力所作的功 A 等于弹性体的变形能 U , 即

$$U = A \quad (10-1)$$

能量法既可以用于变形计算,也可以用于解静不定体系。本章主要讨论用能量法计算变形,至于把能量法用于静不定体系的求解,则属于下一章的内容。

§ 10-2 杆件变形能的计算

现在依次讨论杆件在各种基本变形时变形能的计算。

(一)轴向拉伸或压缩 § 7-8 已详细论述了杆件在轴向拉伸或压缩时变形能的计算,指出在应力不超过比例极限的范围内,在 $P-\Delta l$ 图中(图 10-2)三角形 OAB 的面积即为外力所作的功,故有

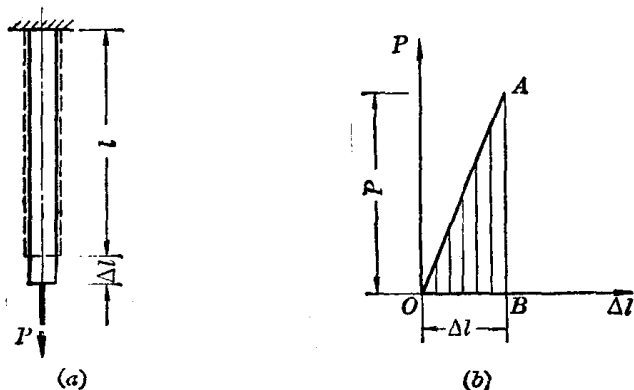


图 10-2

$$\Delta l = \frac{1}{2} P \Delta l$$

这样, 杆件的变形能就为

$$U = \Delta l = \frac{1}{2} P \Delta l \quad (a)$$

若只在杆件的两端作用拉力或压力, 沿杆件轴线的轴力 N 为常量, 且 $N = P$, $\Delta l = \frac{Pl}{EF} = \frac{Nl}{EF}$ 。所以上式可以写成

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{1}{2} P \Delta l = \frac{N^2 l}{2EF} \\ U &= \frac{1}{2} P \Delta l = \frac{EF}{2l} \Delta l^2 \end{aligned} \right\} \quad (10-2)$$

若外力比较复杂, 沿杆件轴线的轴力 N 为变量时, 可先计算长为 dx 的微段内的变形能

$$dU = \frac{N^2(x) dx}{2EF}$$

然后按积分的方法计算整个杆件的变形能

$$U = \int_l \frac{N^2(x) dx}{2EF} \quad (b)$$

(二) 扭转 在应力不超过比例极限的范围内, 圆截面等直杆的扭转角 φ 与外加力偶矩 M 之间的关系, 也是一条斜直线(图 10-3)。仿照与拉伸完全相同的论述, 可以证明, M 在产生角位

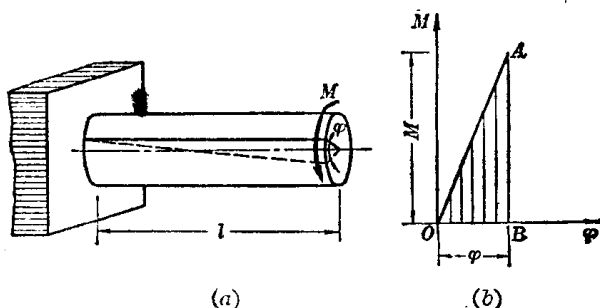


图 10-3

移 φ 中所作的功, 等于 $M-\varphi$ 图中斜直线下面的面积, 即

$$A = \frac{1}{2} M\varphi \quad (c)$$

在图 10-3, a 的情况下, 任意横截面上的扭矩皆等于外力偶矩, 即 $M_n = M$, 且 $\varphi = \frac{M_n l}{GJ_p}$ 。所以杆内储存的变形能为

$$\left. \begin{aligned} U &= A = \frac{1}{2} M\varphi = \frac{M^2 l}{2GJ_p} \\ U &= A = \frac{1}{2} M\varphi = \frac{GJ_p}{2l} \varphi^2 \end{aligned} \right\} \quad (10-3)$$

同理, 当扭矩沿轴线为变量时, 变形能应按积分的方式计算

$$U = \int_l \frac{M_n^2(x) dx}{2GJ_p} \quad (d)$$

(三) 弯曲 图 10-4, a 表示一等截面简支梁, 在梁的两端作用力偶矩 M_0 , 使梁处于纯弯曲状态下, 如以 θ 表示端截面 A 和 B 的相对转角, 应用第六章中计算弯曲变形的的方法, 可以求得

$$\theta = \frac{M_0 l}{EJ} \quad (e)$$

所以, 在应力不超过比例极限的范围内, M_0 与 θ 的关系也是一条

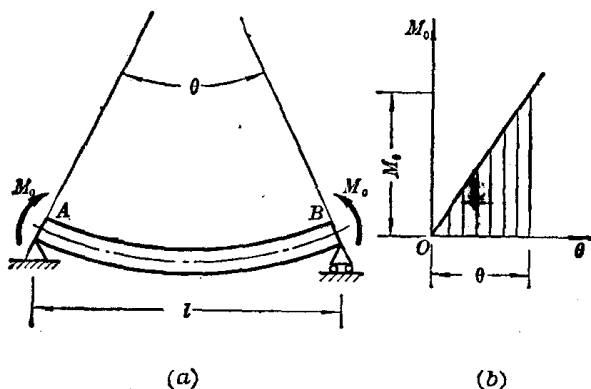


图 10-4

斜直线(图 10-4, b)。力偶矩 M_0 在角位移 θ 中所作的功 A 等于 $M_0-\theta$ 图中斜直线下方的面积, 即

$$A = \frac{1}{2} M_0 \theta \quad (f)$$

在纯弯曲的情况下, 横截面上的弯矩等于外加力偶矩 M_0 , 即 $M = M_0$ 。于是梁内储存的变形能应为

$$\left. \begin{aligned} U = A &= \frac{1}{2} M_0 \theta = \frac{M^2 l}{2EJ} \\ \text{或} \quad U = A &= \frac{1}{2} M_0 \theta = \frac{EJ}{2l} \theta^2 \end{aligned} \right\} \quad (10-4)$$

在横力弯曲的情况下(图 10-5, a), 梁截面上除弯矩外, 还有剪力, 而且一般说弯矩和剪力随截面的位置而变化, 都是 x 的函数。这时应该分别计算与弯曲和剪切相对应的变形能。但在细长梁的情况下, 与剪切相应的变形能通常很小, 可以省略不计, 所以只需要计算弯曲变形能。在计算弯曲变形能时, 可从梁内取出长为 dx 的微段(图 10-5, b), 其左右两端横截面上的弯矩应分别是 $M(x)$ 和 $M(x) + dM(x)$ 。省略弯矩增量 $dM(x)$ 后, 可以把微段看作是纯弯曲的情况。于是可以应用公式(10-4)算出它的变形能

$$dU = \frac{M^2(x) dx}{2EJ}$$

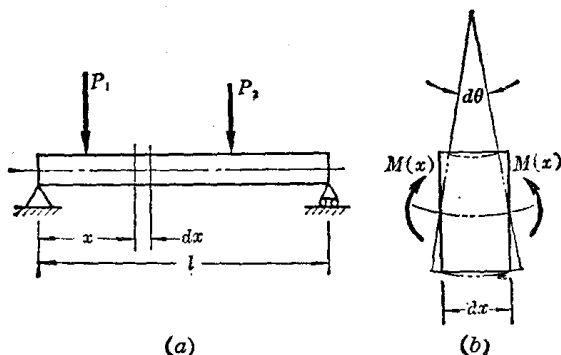


图 10-5

按积分的方式求得全梁的变形能

$$U = \int_l \frac{M^2(x) dx}{2EJ} \quad (10-5)$$

如果梁在各段内弯矩 $M(x)$ 由不同的函数表示, 上列积分应分段进行, 然后求其总和(参看例 10-1)。

以上分别讨论了杆件在几种基本变形的情况下, 变形能的计算。总结起来说, 杆件变形能在数值上等于变形过程中载荷所做的功。在弹性范围内, 载荷所做的功又可由(a)、(c)、(f)诸式来表示。综合这些表达式可以把变形能统一写成下式

$$U = A = \frac{1}{2} P \delta \quad (10-6)$$

式中的 P 在拉伸时代表拉力, 而在扭转或弯曲中代表力矩或力偶矩, 所以称为广义力。 δ 是与广义力 P 相对应的位移, 称为广义位移。例如在拉伸时它是与拉力相对应的位移 Δl , 在扭转时它是与扭转力偶矩相对应的角位移(扭转角) φ 。在线性弹性体的情况下, 广义力与广义位移之间是线性关系。因此, 在公式(10-6)中如以广义力代替广义位移, 变形能就成为广义力的二次函数。同理, 如用广义位移来取代广义力, 变形能就成为广义位移的二次函数。这一点从公式(10-2)、(10-3)、(10-4)等就可以得到证实。所以变形能只与载荷的最终数值有关, 或者只与位移的最终数值有关。也就是说只要根据载荷的最终数值, 或杆件变形的最终形状, 就可以完全确定其变形能, 与加载的中间过程或加载的先后次序无关。

例 10-1 试求图 10-6 所示简支梁的变形能, 并求集中力 P 作用点 C 的位移。

解: 按照所取坐标系, 简支梁在 AC 段内的弯矩是

$$M_1 = R_A x_1 = \frac{Pb}{l} x_1 \quad (0 \leq x_1 \leq a)$$

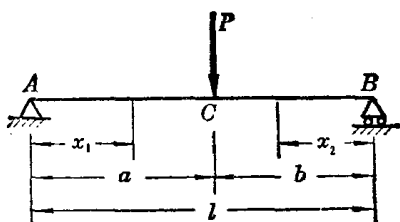


图 10-6

在 CB 段内的弯矩是

$$M_2 = R_B x_2 = \frac{Pa}{l} x_2 \quad (0 \leq x_2 \leq b)$$

由于在 AC 和 CB 两段内弯矩由不同的函数表示, 所以应用公式(10-5)计算弯曲变形能时应分段积分, 即

$$\begin{aligned} U &= \int_l \frac{M^2(x) dx}{2EJ} = \int_0^a \frac{M_1^2 dx_1}{2EJ} + \int_0^b \frac{M_2^2 dx_2}{2EJ} \\ &= \frac{1}{2EJ} \int_0^a \left(\frac{Pb}{l} x_1 \right)^2 dx_1 + \frac{1}{2EJ} \int_0^b \left(\frac{Pa}{l} x_2 \right)^2 dx_2 \\ &= \frac{P^2 a^2 b^2}{6EJl} \end{aligned}$$

设 C 点的位移为 f_o , 在变形过程中, 集中力 P 作的功应为

$$A = \frac{1}{2} P f_o$$

由于 $U = A$, 故有

$$\frac{1}{2} P f_o = \frac{P^2 a^2 b^2}{6EJl}$$

由此求出

$$f_o = \frac{Pa^2 b^2}{3EJl}$$

例 10-2 在图 10-7, a 所示曲拐的端点 C 上作用集中力 P , 设曲拐两段

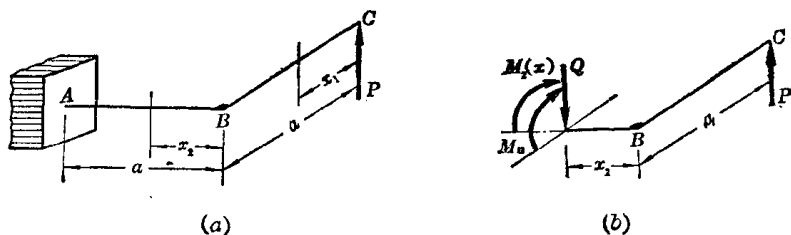


图 10-7

均为等圆截面直杆，材料相同，试求 C 点的垂直位移 f_c 。

解：按所取坐标系分段计算曲拐的变形能。

曲拐在 BC 段内受横力弯曲，

$$Q=P, M_1(x)=Px_1$$

省略剪切变形能，曲拐在 BC 段内的变形能为

$$U_1 = \int_0^a \frac{M_1^2(x)dx}{2EJ} = \frac{1}{2EJ} \int_0^a (Px_1)^2 dx_1 = \frac{P^2 a^3}{6EJ}$$

在 AB 段内(图 10-7, b)，根据平衡条件，求得横截面上的内力为

$$Q=P, M_2(x)=Px_2, M_a=Pa$$

不计剪力 Q 的影响，则 AB 段的变形能为

$$\begin{aligned} U_2 &= \int_0^a \frac{M_2^2(x)dx}{2EJ} + \frac{M_a^2 a}{2GJ_p} = \frac{1}{2EJ} \int_0^a (Px_2)^2 dx_2 + \frac{P^2 a^3}{2GJ_p} \\ &= \frac{P^2 a^3}{6EJ} + \frac{P^2 a^3}{2GJ_p} \end{aligned}$$

整个曲拐的变形能为

$$U = U_1 + U_2 = \frac{P^2 a^3}{3EJ} + \frac{P^2 a^3}{2GJ_p}$$

设集中力 P 作用点 C 的垂直位移为 f_c ，则集中力 P 所做的功为

$$A = \frac{1}{2} P f_c$$

由 $U=A$ 得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} P f_c &= \frac{P^2 a^3}{3EJ} + \frac{P^2 a^3}{2GJ_p} \\ f_c &= \frac{2Pa^3}{3EJ} + \frac{Pa^3}{GJ_p} \end{aligned}$$

从以上两例看出，直接利用关系式 $A=U$ ，就可以计算杆件或结构的变形。但只限于载荷只有一个，而且所求变形只是载荷作用点(或作用截面)与载荷对应的位移(包括角位移)。在结构受力和变形较复杂时，就要应用以后各节所介绍的方法。

§ 10-3 变形能的普遍表达式

前一节讨论了杆件在拉伸(压缩)、扭转和弯曲等简单变形下

变形能的计算。所得结论容易推广到弹性体变形的一般情况。设于物体上作用外力 $P_1, P_2, P_3, \dots$ (图 10-8), 且使物体在图示约束条件下, 除了有因变形而引起的位移外, 不可能有刚性位移。若物体变形满足下述条件: 材料服从虎克定律, 并且变形很小, 不同外力因素所引起的变形各自独立, 不互相影响, 则物体的弹性位移与外力之间将为线性关系。设 $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ 为上述各外力的作用点沿各外力方向的位移, 当 $P_1, P_2, P_3, \dots$ 缓慢地按相同的比例增加时, 弹性体将自始至终保持平衡, 而且各外力作用点的位移 $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$, 也将按与外力相同的比例增加。任一外力 P_n 与相应位移 δ_n 的关系都是线性的, 与图 10-2, b 或图 10-3, b 完全相似。这样, 在变形过程中, 外力 $P_1, P_2, P_3, \dots$ 作功的总和等于储存于物体内的变形能。即

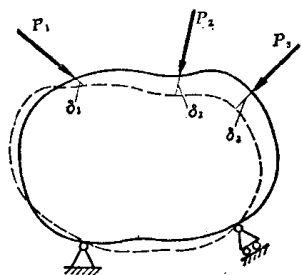


图 10-8

$$U = \frac{P_1 \delta_1}{2} + \frac{P_2 \delta_2}{2} + \frac{P_3 \delta_3}{2} + \dots \quad (10-7)$$

这表示, 物体的变形能等于每一外力与其相应位移乘积的二分之一的总和。这一结论也称为克拉贝依隆原理。当然, 在这里的“力”和“位移”都是广义力和广义位移。

如上所述, 位移 $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ 与外力 $P_1, P_2, P_3, \dots$ 之间是线性关系, 如把公式(10-7)中的位移用外力来代替, 变形能就成为外力的二次齐次函数; 同理, 如把外力用位移来代替, 变形能就成为位移的二次齐次函数。所以变形能仍然由外力或位移的最终数值来确定, 与加力的先后次序无关。

事实上, 在计算三向应力状态下的比能时 (§ 7-8), 我们就已经使用了公式(10-7)所表达的概念。现在再将它应用于杆件组合变形的情况。设于组合变形的杆件中取出长为 dx 的微段

(图 10-9), 其两个端截面上有弯矩 $M(x)$, 扭矩 $M_n(x)$ 和轴力 $N(x)$ 。对所分析的微段来说, 这些都是作用于微段上的外载荷, 设两个端截面的相对轴向位移为 $d(\Delta l)$, 相对转角为 $d\theta$, 相对扭转角为 $d\varphi$, 根据公式(10-7)微段内的变形能为

$$\begin{aligned} dU &= \frac{1}{2} N(x) d(\Delta l) + \frac{1}{2} M(x) d\theta + \frac{1}{2} M_n(x) d\varphi \\ &= \frac{N^2(x) dx}{2EF} + \frac{M^2(x) dx}{2EJ} + \frac{M_n^2(x) dx}{2GJ_p} \end{aligned}$$

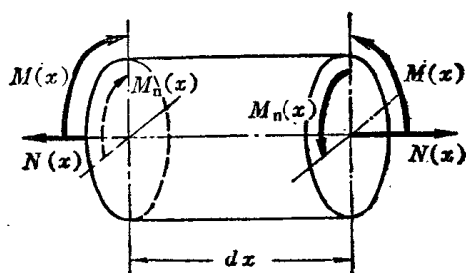


图 10-9

按积分的方式求出整个杆件的变形能

$$U = \int_l \frac{N^2(x) dx}{2EF} + \int_l \frac{M^2(x) dx}{2EJ} + \int_l \frac{M_n^2(x) dx}{2GJ_p}$$

这里是指圆截面杆的情况。若为非圆截面杆, 则在上式右边第三项应以 J_n 代替圆截面的 J_p 。

§ 10-4 卡氏定理

在例 10-2 中已把曲拐 ABC 的变形能表为 P 的函数。若把 U 对 P 取导数, 得出

$$\frac{dU}{dP} = \frac{d}{dP} \left(\frac{P^2 a^3}{3EJ} + \frac{P^2 a^3}{2GJ_p} \right) = \frac{2Pa^3}{3EJ} + \frac{Pa^3}{GJ_p}$$

这正是集中力 P 作用点沿 P 方向的位移 f_c , 所以有

$$\frac{dU}{dP} = f_c$$

这表明曲拐变形能对集中力 P 的导数等于 P 的作用点沿 P 力方向的位移。这里所得的关系并非偶然巧合, 而是一个普遍的定理(卡氏定理)应用于曲拐 ABC 这一特殊情况的结果。下面我们就证明这个定理。

设 $P_1, P_2, P_3, \dots$ 为作用于弹性体上的外力(图 10-10), 与这些外力相应的位移分别是 $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ 。在变形过程中, 外力 $P_1, P_2, P_3, \dots$ 所作的功等于弹性体的变形能 U 。正如前面所指出的, 变形能 U 应为 $P_1, P_2, P_3, \dots$ 的函数, 即

$$U = f(P_1, P_2, P_3, \dots) \quad (a)$$

若以上外力中的任一个 P_n 有一增量 dP_n , 则变形能 U 的相应增量为 $\frac{\partial U}{\partial P_n} dP_n$, 于是弹性体的变形能成为

$$U + \frac{\partial U}{\partial P_n} dP_n \quad (b)$$

因为弹性体的变形能与外力作用的次序无关, 如把外力作用的次序改变为先作用 dP_n , 然后再作用 $P_1, P_2, P_3, \dots$, 则弹性体内的变形能仍然应该与 (b) 式所表示的变形能相等。当首先作用 dP_n 时, 其作用点沿 dP_n 方向的位移为 $d\delta_n$, 弹性体内的变形能为 $\frac{1}{2} \cdot dP_n \cdot d\delta_n$ 。再作用 $P_1, P_2, P_3, \dots$ 时, 尽管弹性体上已经有 dP_n 存在, 但 $P_1, P_2, P_3, \dots$ 的效应并不因先作用了 dP_n 而变化, 因而这些力所作的功仍然等于 U , 不过, 在 $P_1, P_2, P_3, \dots$ 作用的过程

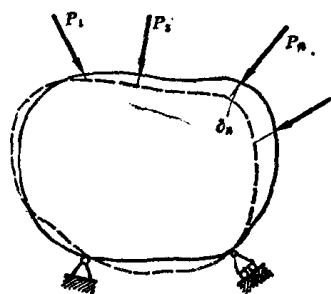


图 10-10