位理论

及其在地球形状理论和地球物理中的应用

〔苏联〕H·伊捷尔松著

宁津生　管泽霖　方瑞首译

夏坚白　方　俊校

中国工业出版社

位 理 论

及其在地球形状理论和地球物理中的应用

〔苏联〕H·伊捷尔松著
宁津生　管泽霖　方瑞首译
夏坚白　方　俊校

中 国 工 业 出 版 社

本书是从引力位开始較詳細地研究位理論的各种外部問題，书中单辟一章叙述了球函数理論，以及位理論在地球形状理論和地球物理中的应用。本书可供研究地球形状理論、地球物理以及其他有关天体力学方面的人員参考。

Н.ИДЕЛЬСОН
ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛА
С ПРИЛОЖЕНИЯМИ
К ТЕОРИИ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ
И ГЕОФИЗИКЕ
Издание Второе,
Дополненное и переработанное
объединенное научно-техническое издательство
Главная редакция общетехнической литературы
ленинград 1936 Москва

* * *

位 理 論
及其在地球形状理論和
地球物理中的应用
宁津生　管泽霖　方瑞首譯
夏堅白　方　俊校

*

国家測繪总局測繪书刊編輯部編輯（北京三里河国家測繪总局）
中国工业出版社出版（北京佟麟閣路丙10号）
北京市书刊出版业营业許可証出字第110号
中国工业出版社第四印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行・各地新华书店經售

*

开本 787×1092 1/16・印张 19 1/2・字数 455,000
1963年2月北京第一版・1965年7月北京第二次印刷
印数508—1,677・定价（科六）2.40元

*

統一书号：15165・1766（測繪-34）

译 者 序

我們考虑到位理論不仅对于地球形状理論和地球物理方面有着广泛的用途，而且在天体力学，特别是在現代的人造地球卫星的理論中也占有重要的地位，于是我們就开始了本书的翻譯工作。

在本书的翻譯过程中，我們首先得到了夏坚白教授和方俊教授的大力支持和鼓励，并且不辞辛苦地对本譯文进行了严格审閱。在有关数学問題方面又得到了秦裕瑗講师的热情帮助。此外，全书譯文原稿的抄写及绘图工作是由夏璧玉、徐念华和宋鸿德三同志担任的。以上諸同志为本书譯文的出版工作化費了巨大劳动，我們对此表示感謝。

由于我們的俄文水平及专业知識水平很有限，因此在譯文中一定有不少的缺点和錯誤，我們誠恳地希望讀者給予批評指正。

譯 者

1961.10.

目　录

第三章 位理論的外部問題

第四章 球函数

第五章　重力测量和地球形状的理論基础

第六章　磁位及地磁理論的基本原理

第一版序

本书主要是叙述位理論在解决地球物理和大地测量問題方面的应用。

按照这样的目的，就有必要把整个的理論部份放在次要的地位，或者完全不将它反映出来。在本书中，仅仅談到牛頓引力位，所以在这里，例如就沒有叙述对数位理論，以及几乎一点也沒有提到位在其他理論物理問題中的应用。

在全书中，我决不只是局限于对位理論的最簡单的基本原理的討論，而是尽量詳細地去叙述这个理論和对基本問題（这里仅对球和平面而言）的解算；除此以外，在这里，我們还有必要尽量地在調和函数的理論和位理論之間划出明显的界限；所以在第Ⅰ章里叙述了調和函数的理論，在第Ⅱ章里叙述了引力位；在第Ⅲ章里叙述了外部問題，对于这个問題在詳細地研究位以前是不能够討論它的，在第Ⅲ章里还包括了对于今后所必需的一些专門問題，例如特殊边界問題的解，我称它为斯托克司問題，以及象在球和平面上計算位的梯度問題。

在球函数这一章中，全部的注意力都集中在加法定理、球函数展开式以及这些展开式和最小二乘法之間的关系等方面。

重力测量一章是本书的中心，尽管在其中还沒有包含重力扭秤理論和它的应用，但是这一章的內容仍然是很零碎的。我的目的是尽可能地将这一章与位理論的一般問題紧密地联系起来，因而将重力测量理論中的基本方程放在首要地位。除了这些一般問題以外，在第Ⅴ章中还注意到一些特殊問題，例如垂綫偏差和重力归算理論，在这里尽可能地考虑到有关这方面的最新著作。

第Ⅵ章（地磁）的很大一部份是将已經叙述的理論用于磁位的特殊性質。

H.伊捷尔松

普尔科伐·1932年7月

第 二 版 序

本书的第二版与第一版比較起来有很大的改变，除了有許多个别的补充及文字上的修改以外，我对于§13（重力位）、§23（正常椭球体和水准椭圓体）、§24（大地水准面形状的測定）和§26（重力归算）的一部份又重新作了改写，在第Ⅴ章的整个內容中，我尽可能完整地为物理大地測量問題和数学物理一般問題之間的一致性提出根据。在新版中，对于这一章所补充的內容可以看作是地球形状理論和理論重力測量方面的一篇簡短的专題学术性論文，因为它們两者与位理論是有联系的。

H.伊捷尔松

列宁格勒·1935年12月

第一章　空間調和函数。位理論的內部問題

§1. 引力位的基本形式

1. 引言：在我們这本书的第一章里只是导入引力位的一些基本概念和定义，至于它的一些詳細的性質将放在下面几章里去研究，但是对于那些在以后要經常用到的符号和名詞必須事先做一些說明。

以后将要經常談到，用一个封閉曲面S所围成的空間区域T，或用两个封閉的而不相截的曲面S和S'所围成的区域T'，或者是相对于S面的外部空間区域；用M来表示在区域T內的流动点，它的坐标用x、y、z来表示。所要研究的是在区域內任意位置M上求得一些单值函数U、V、W；我們将它們写为$U(x,y,z)$或$U(M)$等等，这样U、V、……是流动点M的坐标函数，称它們为点的空間函数，并且总是假設它們是单值的和有限的(而暂时不去討論相反的情况）。$\frac{\partial U}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$……称为对$M$点坐标的导数。

在許多情况下，問題在于求出和計算在S內部、S面上或S外部的某一个已知点上的U、V、……值，我們称这个点为极，通常用P来表示它，并且还要討論对S来說是內部或是外部的极。P点常常是受力（例如引力）作用的那一点，这个点在德文文献中称为 Aufpunkt❶，我們决定保留这个名詞，并且在俄文文献中有时也写成“Ауфпункт”，这样，极和計算点都是表示同一个点。如果要求得P点的U、V、……的数值，我們就用$U(P)$、$V(P)$来表示它們，同时可以研究它們随P点位置的变化。这个点的坐标（几乎到处都是这样）用ξ、η、ζ来表示，为此我們写成$U(\xi,\eta,\zeta)$或$U(P)$，$\frac{\partial U}{\partial \xi}$、$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}$、……就是$U$对极$P$坐标的导数。

待定点P和流动点M之間的距离用r来表示，这是位理論的主要变量，我們有：

$$|PM|^2=r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2.$$

由此，对M的坐标取导数：

$$r\frac{\partial r}{\partial x}=x-\xi;\quad \frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x-\xi}{r}. \tag{1—1}$$

或者，对P的坐标微分：

$$r\frac{\partial r}{\partial \xi}=-(x-\xi);\qquad \frac{\partial r}{\partial \xi}=-\frac{x-\xi}{r},$$

这样：

$$\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{\partial r}{\partial \xi}. \tag{1—2}$$

---

❶ 中文譯为計算点。

同理，对于坐标y和η、z和ς也可求得上式。

距离PM在坐标轴上的投影等于

$$x-\xi,\ y-\eta,\ z-\varsigma.$$

这样，它的方向余弦则为：

$$\frac{x-\xi}{r};\ \frac{y-\eta}{r};\ \frac{z-\varsigma}{r}.$$

所以，根据（1—1）式则得：

$$\left.\begin{aligned}\cos(PM,\ X)&=\frac{\partial r}{\partial x},\\ \cos(PM,\ Y)&=\frac{\partial r}{\partial y},\\ \cos(PM,\ Z)&=\frac{\partial r}{\partial z}.\end{aligned}\right\}\qquad(1—3)$$

自所采用的坐标原点到极P的向径用ρ来表示，于是

$$\rho^2=\xi^2+\eta^2+\varsigma^2,$$

M点的向径用ρ'来表示，则

$$\rho'^2=x^2+y^2+z^2,$$

因此

$$r^2=\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\rho,\ \rho').$$

2. 质点位　在$M(x,\ y,\ z)$点上質量为m的質点按照平方倒数定律作用于$P(\xi,\ \eta,\ \varsigma)$点上所有的質量$m'$上，它在整个空間产生一个牛頓引力場。我們假設在$P$点集中了单位質量（$m'=1$），那么作用在$P$点的力就是这个場在$P(\xi,\ \eta,\ \varsigma)$点上的力。

現在，我們来討論：“以P点为中心”的所有現象；在P点上作用了一个力，它的数值为：

$$F=f\frac{m}{r^2},$$

式中　f是比例系数，称为引力常数（$f=6.66\cdot10^{-8}$CGS）❶，由P到M的力$\vec{F}$的向量与坐标軸之間的夹角余弦等于：

$$\frac{x-\xi}{r};\ \frac{y-\eta}{r};\ \frac{z-\varsigma}{r},$$

这样，这个向量在X、Y、Z軸上的投影为：

$$F_x=\frac{fm(x-\xi)}{r^3};\quad F_y=\frac{fm(y-\eta)}{r^3};\quad F_z=\frac{fm(z-\varsigma)}{r^3}.\qquad(1—4)$$

如果写成向量的形式，以上三式可用下列一个等式来代替：

$$\vec{F}=fm\frac{\overrightarrow{PM}}{|PM|^3},$$

❶ 在CGS制中，f的因次为$\frac{厘米^3}{克\cdot秒^2}$，为了簡写起見，我們总是略去常数f；但是应該牢牢記住，在位理論公式中所遇到的物質的任何質量和密度必須用克来表示，并且要乘上f。

用 $|PM|$ 表示向量的数值对于引力在任意軸（称它为“s”軸）上的投影可以写成：

$$F_s = fm\frac{PM_s}{|PM|^3}, \qquad (1—4—1)$$

在上式中，分子是 $\overrightarrow{PM}$ 在“s”軸正方向上的投影。

位的研究是从发現❶（1—4）中三个公式是下列函数对极 P 坐标的导数那个时期开始的：

$$V(P) = \frac{fm}{r}. \qquad (1—4—2)$$

实际上，若考虑到（1—1）式，则：

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial\xi} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r^2}\frac{x-\xi}{r} = \frac{x-\xi}{r^3},$$

同理，对于坐标 η 和 ζ 也是一样，得：

这义 $\mathrm{grad}_P V = \frac{\partial V}{\partial\xi}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial\eta}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial\zeta}\vec{k}$

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial\xi}; \quad F_y = \frac{\partial V}{\partial\eta}; \quad F_z = \frac{\partial V}{\partial\zeta},$$

或者簡写为：

$$\vec{F}(P) = \mathrm{grad}_P V, \qquad (1—5)$$

用語言来表达，则为：作用在 P 点上的力向量是函数 V 的梯度。

在繼續討論問題以前，我們应該强調一下，在（1—5）式中 M 和 P 点的对应作用，如果質量 m 在 P 点上，而在 M 点上的質量为 1，那么作用在 M 点上力的投影为：

$$F_x = \frac{fm\,(\xi - x)}{r^3}$$

但是

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{x-\xi}{r} = \frac{\xi - x}{r^3}$$

这样

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x}\text{等等}.$$

或者簡写为：

$$\vec{F}(M) = \mathrm{grad}_M V. \qquad (1—6)$$

〔在这里注脚 M 表示对 M 的坐标求导数，这和（1—5）式一样，不过它們是对 P 点的坐标求导数〕。我們将看出，为了說明作用在 M 和 P 点之間的引力的双重性質，則只要用一个函数 V 就够了。

現在指出，由于公式（1—5）和（1—6）中的关系完全与 x、y、z 軸的方向无关，我們可将力向量在任意方向 $\vec{s}$ 上的投影与函数 V “对方向 $\vec{s}$”的微分連系起来。为了說明这个問題，假定，从 P 点作一个无穷小的向量 $\overrightarrow{ds}$，它与各軸所組成的角度为 α、β、γ；令 $d\xi$、$d\eta$ 和 $d\zeta$ 表示这个向量在各軸上的投影，这样：

---

❶ 拉格朗日（J.L.Lagrange），1773。

$$\frac{d\xi}{ds}=\cos\alpha;\quad \frac{d\eta}{ds}=\cos\beta;\quad \frac{d\varsigma}{ds}=\cos\gamma.$$

現在我們将$\vec{F}$投影到$\vec{ds}$方向上来；为此立出公式：

$$F_s=F_x\cos\alpha+F_y\cos\beta+F_z\cos\gamma=$$

$$=\frac{\partial V}{\partial\xi}\frac{d\xi}{ds}+\frac{\partial V}{\partial\eta}\frac{d\eta}{ds}+\frac{\partial V}{\partial\varsigma}\frac{d\varsigma}{ds}.$$

根据复合函数微分规則，上式右端就是 V 对 s 的导数，或者更确切的說，是对方向$\vec{ds}$的导数，我們用$\frac{\partial V}{\partial s}$来表示它，因此我們可以令：

$$F_s(P)=fm\frac{\cos(\vec{PM},\vec{s})}{r^2}=$$

$$=\frac{\partial V}{\partial s}=fm\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r}\right).$$

将上式分子中的角度也用一个符号来表示它；为了使它和以后的一些公式对称起見，我們用ψ表示 s 正方向和$\vec{MP}$方向（即由M到P的向量方向；也就是P点上引力的反方向）所組成的角度，这样，$\cos(\vec{PM},\vec{s})=-\cos\psi$（图1），那么上式就成为：

$$F_s(P)=\frac{\partial V}{\partial s}=fm\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r}\right)=$$

$$=-fm\frac{\cos\psi}{r^2}. \tag{1—7}$$

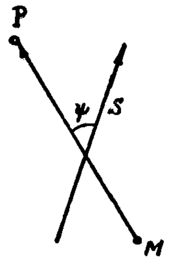

图 1

高斯称函数V为位；准确地説，这是M点对計算点P的位。我們将看出，V的正負号与力学中所講的力函数相同，由此即可得出結論，当計算点由P_0移动到P时，則力所做的功与路程无关，并等于：

$$A=\int_{P_0}^{P}F_\xi d\xi+F_\eta d\eta+F_\zeta d\varsigma= \quad \int_{P_0}^{P} dV$$

$$=V(P)-V(P_0)=$$

$$=fm\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right). \tag{1—8}$$

当$r<r_0$时，功是正的，这样，我們就認为質量m产生的力所做的功是正的。当$r_0\to\infty$时，

$$A=V(P). \tag{1—8—1}$$

我們可以說，P点的位是当单位質量由无穷远趋近于P（ξ, η, ς）时，質点m产生的力所做的正功，正如在力学中所講的，位等于点系M和P的位能値，而正負号相反，关于这个問題，在以后还要討論它（§8—5）。

到現在为止，我們所講的是牛頓力場：在这个力場中，質量是正的，而力是引力。但是庫仑(Column)在电学和磁学方面也发展了平方倒数定律；在电学和磁学現象中，两个正質

量是互相排斥的。这里的正負号使問題复杂化了，因此必須采取某些規定。在現时，大概❶采取：(a)質量$+m$的位总是表示为 $+\dfrac{m}{r}$，它与m是否为質点、点电荷或者磁极无关；(b) 在引力的情况下，$\vec{F}=\mathrm{grad}\,V$，位与力函数相合，并等于位能，正負号相反；（c）在同名电荷相斥的情况下，和电学和磁学中一样有$\vec{F}=-\mathrm{grad}\,V$；位等于力函数，正負号相反，与位能相合。

若将基本定义推广，我們假設在点M_1、M_2、……M_n上有作用質量m_1、m_2、……m_n，那么根据会聚力的加法规则，我們又将求得作用在計算点P上的合力是下列函数的梯度

$$V(P)=\frac{m_1}{M_1P}+\frac{m_2}{M_2P}+\cdots\cdots+\frac{m_n}{M_nP},$$

或者，假設$M_1P=r_1$，……$M_nP=r_n$：

$$V(P)=\sum\frac{m}{r}. \tag{1—9}$$

我們将指出，如果P与作用点 M_1、M_2、……M_n中的一个相合（則$\dfrac{1}{r}\to\infty$），那么（1—4—2）和（1—9）式就失去意义。$V(P)$ 称为質点(电荷）系的位，我們看出，只要极P不与質点（或者电荷）系中任意一个相重合，則点的位是极点P 的坐标的有限和連續的函数，同样很容易地証明，这对于V（P）对于极点P坐标的导数同样也是正确的，同时，只要 P不与作用質量中任意一个重合，則它的任意阶导数都是有限的和連續的。

3. 质体的位 現在再繼續地推广下去，假設在体积T內充滿了質量；令dm表示单元質量（暫时还不是微分），而r是它到P的距离，于是就得：

$$V(P)=f\int_T\frac{dm}{r}, \tag{1—10}$$

式中积分是对整个体积T来計算的。

我們指出，就密度来說，这里完全沒有提到連續的質量分布；可以将各种不同性質和比重的物質塡滿体积T，由一个单元到另一单元它的密度可以是間断的，但是如果再进一步提出，随着单元体积$\delta\tau$的減小，包含在$\delta\tau$中的質量δm趋近于零，这样：

$$\lim\frac{\delta m}{\delta\tau}=\mu,$$

也就是說質量m不仅是連續的，而且也是坐标的可微函数，那么它对体积的导数具有密度的意义，則得：

$$dm=\mu d\tau.$$

（这里dm是一般意义的微分），在这种情况下：

$$V(P)=f\int_T\frac{\mu d\tau}{r}, \tag{1—11}$$

式中 μ是分布在T內的質量的体密度，（1—11）就是体积位的一般公式❷。

---

❶ Kellogg，52—53頁（見本书后面的参考文献）。

❷ 以后我們不写三重或二重积分；符号 $d\tau$ 和 $d\sigma$常常用于单元体积或单元面积，它們总是表示該积分是对体积T或者对曲面S計算的。

应該指出，在 P 上的位总是看作为单元質量除以它們到P的距离之和或积分。在所有的位理論公式的分母上都会出現基本变量 r 。

現在我們回到(1—10)式；在該式中dm表示在某点M上不可微函数m的增量，这种类型的积分称为斯蒂尔吉积分（Stieltjes）。所以，当 T内的質量分布在最一般的情况下，体积积分用斯蒂尔吉三重积分来表示；这样的积分在各种不同的数学及力学部門中具有重大的意义，耿捷尔（N.M.Gunther）教授将这些积分应用到位理論中去，在这一方面他写出了許多渊博的和重要的著作。

体积位的許多特殊的性質将在以后詳細地推导，这些主要的性質之一就是体积位与質点位不同，它无論在什么地方甚至当計算点P在T内，也就是說它到dm的距离会趋近于零，因而$\frac{1}{r}\to\infty$，也不会趋近于无穷大。

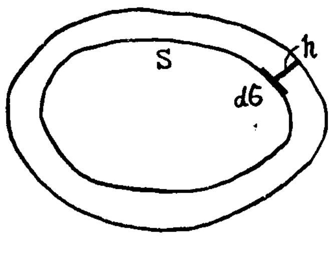

图 2

4. **单层位** 我們假設作用質量集中在S上，形成为一种厚度h很薄的层，令$d\sigma$是层的单元面积(图2)；那么，在高精度的情况下$d\tau=hd\sigma$，在这些条件下，将体积积分（1—11）化为面积积分，則：

$$V(P)=\int_S\frac{\mu hd\sigma}{r},$$

（r是流动单元$d\sigma$到P的距离）；現在我們假設，当$h\to0$时，$\mu\to\infty$，这样

$$\lim_{h\to0}\mu h=\mu',$$

式中 μ'是S上$\overline{M}$点坐标的有限的和連續的函数❶；根据定义，这个函数μ'称为質量分布在S上的面密度。此时，我們有：

$$V(P)=\int_S\frac{\mu' d\sigma}{r}. \tag{1—11—1}$$

（以后，我們仍用符号μ代替μ'），位$V(P)$称为S面上的单层位。

很显然极限化算使我們理解了面密度，对于質量来說它沒有物理意义，但是在靜电学里，当电荷以无限薄层的形式分布在导体的表面S上，同时在单位面积上有电量μ分布时，則面密度具有完全眞实的意义。同样地也必須把質綫位看作是一种数学上的虛构，也就是把質量看成是分布在无穷細的导綫L上，令μ是单位长度上的質量，那么不必进一步的解释就可以明白下式的意义：

$$V(P)=\int_L\frac{\mu ds}{r}.$$

（r是单元弧长ds到P的距离）；这个位在电磁現象中具有实际的意义。当然单层位和綫的位在一般情况下也可以用斯蒂尔吉积分来表示。

5. **引力的投影** 对于質点位来說，M点到极P点方向上的引力在任意方向s上的投影用（1—7）式求得：

---

❶ 在S面上的点用$\overline{M}$，P等等来表示；同样地，在S面上M点的函数U，V……用$\overline{U}$，$\overline{V}$等等来表示。

$$F_s(P)=\frac{\partial V}{\partial s}=-fm\frac{\cos\psi}{r^2}.$$

在体积T内布满着吸引質量dm时，P点上这个体积的引力投影用下式表示：

$$F_s(P)=-f\int_T\frac{\mu\cos\psi d\tau}{r^2}. \tag{1—12}$$

式中 ψ是单元 $d\tau$ 与极P的連綫和已知方向 s 之間的变量角，以后将要指出，当P点在吸引質量內部时，这个积分仍然有意义的，并且在所有的情况下，它等于位对P 点坐标在 s 方向上的导数。

$$V=f\int_T\frac{\mu d\tau}{r}.$$

这种积分将在单层位理論中加以討論。

6．**法綫导数** 在位理論中S面的法綫具有重要的意义，我們假設 S 面有連續的曲率〔这样，如果用高斯参数u和v来表示S上点的坐标，那么函数$x(u,\ v)$，$y(u,v)$和$z(u,v)$在S的所有点上都具有一阶和二阶連續导数〕，并且在每一点上S都具有一个确定的切平面以及法綫；此外，我們还要假設，S上的所有点在 S的任意点上的切平面的一边（这样的曲面称为凸曲面，任意一条直綫与他相截不会多于两点）。

如果S是封閉的，那么将所謂的外法綫当作法綫的正方向，它是由T的內区域朝向外部空間，但是，如果区域T'是在两个不相截的曲面S和S'之間，那么在 S' 上的外法綫方向就是由T'朝向內腔T''（图３），这样在S'上的外法綫与 S 上的外法綫的方向相反，但是我們总是改变S'的法綫方向，使得它的方向和 S面上的法綫方向相同。如果 S 面不是封閉的，那么法綫的正方向应該根据另外一种判别法来确定。和上面所講点的任意函数对任意方向S的微分的概念相似，我們求出函数 U对S面法綫方向的微分，但是这里有一个特点，而这个特点在本书的一开始就必須了解透徹；这就是必須特別地把对于通过极P的“固定”法綫的微分和对于在单元$d\sigma$上所作S面的“流动”变量法綫的微分区别开来，假設 ν 是 S 上通过 P 的法綫方向，α、β、γ是法綫与各軸之間的夹角，对法綫ν的方向微分，则得

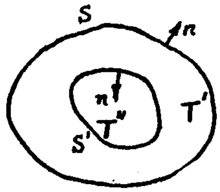

图 3

$$\frac{\partial U}{\partial \nu}=\frac{\partial U}{\partial \xi}\cos\alpha+\frac{\partial U}{\partial \eta}\cos\beta+\frac{\partial U}{\partial \zeta}\cos\gamma=\frac{\partial U}{\partial \xi}\,\frac{d\xi}{d\nu}+\frac{\partial U}{\partial \eta}\,\frac{d\eta}{d\nu}+\frac{\partial U}{\partial \zeta}\,\frac{d\zeta}{d\nu}$$

当$U=\frac{fm}{r}$时，

$$\frac{\partial U}{\partial \nu}=-fm\,\frac{\cos\psi}{r^2}.$$

式中 ψ 是$\overrightarrow{MP}$ 和 $\vec{\nu}$ 之間的夹角，与此相应地，我們也可以討論在P点上体积T 的引力在方向 $\vec{\nu}$ 上的投影，根据以前的公式可以写出：

$$F_\nu(P)=-f\int_T\frac{\mu\cos\psi d\tau}{r^2} \tag{1—13}$$

式中 ψ 是流动方向$\overrightarrow{MP}$ 和 $\vec{\nu}$ 方向之間的夹角（图４）。必須注意，这个方向在积分过程中仍然是常数，这样可以写出

"ν"

$$F_\nu(P)=f\frac{\partial}{\partial\nu}\int_T\frac{\mu d\tau}{r}.$$

現在，我們来討論另外一种情况，令$\overline{M}$是S上的流动点，dn是在$\overline{M}$点上所作的 S 面的单元法綫，假設$\overline{\frac{\partial U}{\partial n}}$是$\overline{M}$点上$U$对法綫方向$\vec{n}$的导数，换句話說：

$$\overline{\frac{\partial U}{\partial n}}=\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha'+\frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta'+\frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma',$$

式中 α'、β'、γ'是这个“流动法綫”$\vec{n}$和各軸之間的夹角。我們要不止一次地討論下列类型的积分：

$$\int_S\overline{\frac{\partial U}{\partial n}}d\sigma,$$

并且也要指出，这里——与前面不同——是在任意单元 $d\sigma$ 上对这个流动变量单元 面积上的S的法綫进行微分。

我們以主函数$\frac{1}{r}$为例，对于这个函数，我們有

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^2}\left[\frac{x-\xi}{r}\cos(n,x)+\frac{y-\eta}{r}\cos(n,y)+\frac{z-\zeta}{r}\cos(n,z)\right]$$

$$=-\frac{1}{r^2}\cos(\overrightarrow{PM},\ \vec{n}).$$

在这里用φ表示上式中的角度（在起算这个角度时，$\vec{r}$認为是由P到$\overline{M}$，也就是与ψ角的起算相反），则

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\cos\varphi}{r^2}.}\tag{1—14}$$

与此相应，所討論的积分则为

$$\boxed{\int_S\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma=-\int_S\frac{\cos\varphi}{r^2}d\sigma.}\tag{1—15}$$

我們要記住，这里的r是流动单元$d\sigma$到极P 的距离，$\frac{\partial}{\partial n}$是对$S$面上每个单元 $d\sigma$的法线求导数。还要指出，从条件

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}\right)$$

中决不应該将$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)$和$-\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r}\right)$等同起来，因为在这两种情况下，我們是将引力投影到不

图 4

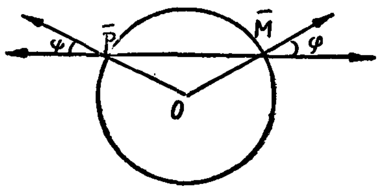

图 5