

000.08.

56.2

位 理 论

及其在地球形状理论和 地球物理中的应用

〔苏联〕H·伊捷尔松著

宁津生 管泽霖 方瑞首译

夏坚白 方 俊校

中国工业出版社

位 理 论

及其在地球形状理论和 地球物理中的应用

〔苏联〕H·伊捷尔松著
宁津生 管泽霖 方瑞首译
夏坚白 方 俊校

中国工业出版社

本书是从引力位开始較詳細地研究位理論的各种外部問題，书中单辟一章叙述了球函数理論，以及位理論在地球形状理論和地球物理中的应用。本书可供研究地球形状理論、地球物理以及其他有关天体力学方面的人員参考。

Н.ИДЕЛЬСОН
ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛА
С ПРИЛОЖЕНИЯМИ
К ТЕОРИИ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ
И ГЕОФИЗИКЕ

Издание Второе,

Дополненное и переработанное
объединенное научно-техническое издательство
Главная редакция общетехнической литературы
ЛЕНИНГРАД 1936 МОСКВА

* * *

位 理 論
及其在地球形状理論和
地球物理中的应用
宁津生 管泽霖 方瑞首譯
夏坚白 方 俊校

*

国家測繪总局測繪书刊編輯部編輯（北京三里河国家測繪总局）

中国工业出版社出版（北京佟麟閣路丙10号）

北京市书刊出版业营业許可証出字第110号

中国工业出版社第四印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店經售

*

开本 $787 \times 1092\frac{1}{16}$ · 印张 $19\frac{1}{2}$ · 字数 455,000

1963年2月北京第一版·1965年7月北京第二次印刷

印数508—1,677 · 定价（科六）2.40元

*

統一书号：15165·1766（測繪-34）

译 者 序

我們考慮到理論不僅對於地球形狀理論和地球物理方面有着廣泛的用途，而且在天體力學，特別是在現代的人造地球衛星的理論中也占有重要的地位，於是我們就開始了本書的翻譯工作。

在本書的翻譯過程中，我們首先得到了夏堅白教授和方俊教授的大力支持和鼓勵，並且不辭辛勞地對本譯文進行了嚴格審閱。在有關數學問題方面又得到了秦裕瑗講師的熱情幫助。此外，全書譯文原稿的抄寫及繪圖工作是由夏璧玉、徐念華和宋鴻德三同志擔任的。以上諸同志為本書譯文的出版工作化費了巨大勞動，我們對此表示感謝。

由於我們的俄文水平及專業知識水平很有限，因此在譯文中一定有不少的缺點和錯誤，我們誠懇地希望讀者給予批評指正。

譯 者

1961.10.

目 录

譯 者 序

第一版序

第二版序

第一章 空間調和函数。位理論的内部問題

- § 1. 引力位的基本形式 7
1. 引言 (7)。2. 质点位 (8)。3. 质体的位 (11)。4. 单层位 (12)。5. 引力的投影 (12)。6. 法綫导数 (13)。7. 立体角和高斯积分 (15)。8. 偶极位和双层位 (16)。9. 水准面; 水准面之間的距离; 布隆斯定理 (17)。
- § 2. 格林基本定理 20
1. 格林公式 (20)。2. r^{-n} 的拉伯拉斯算子 (23)。3. 基本公式 (24)。4. 基本公式的改化 (26)。
- § 3. 調和函数和它的性質 26
1. 基本公式 (26)。2. 調和函数的性质 (28)。
- § 4. 狄义赫利問題 32
1. 格林函数和狄义赫利公式 (32)。2. 格林函数的性质 (35)。
- § 5. 对于球的狄义赫利問題的解 38
1. 半径的倒数变换 (38)。2. 球的格林函数 (40)。3. 布阿桑积分 (42)。4. 布阿桑积分核 (44)。5. 毕伽尔定理 (46)。6. 格林函数的物理意义。格林等值层 (47)。7. 格林的一般公式 (51)。
- § 6. 罗依曼問題和它对球的解。第三位理論問題 (或混合問題) 52
1. 罗依曼函数 (52)。2. 对球建立罗依曼函数 (基里方法) (54)。3. 在球面点上函数值的測定 (56)。4. 位理論的混合問題。唯一性定理 (57)。

第二章 引力位

- § 7. 質体位 60
1. 概述 (60)。2. 牛頓球的位, 布隆斯公式、色日定理、位的解析延拓和旁卡公式 (60)。3. 均质物体位的高斯定理 (68)。4. 质体位 (一般情况) (69)。
- § 8. 位的格林公式 75
1. 基本公式 (75)。2. 位的中值定理 (77)。3. 位的基本公式; 水准等值层 (77)。4. 对于整个空間的积分 (79)。5. 引力場的能量 (80)。6. 場能量的变化。高斯問題 (82)。
- § 9. 布阿桑方程的研究 87
- § 10. 单层位 88
1. 层位的連續性 (88)。2. 层位的法綫导数, 导数之差及其和 (布阿桑和普列梅利公式) (90)。3. 质量平面分布的引力 (96)。4. 在切綫方向上的导数 (96)。

- § 11. 单层位 (应用) 97
1. 高斯公式的推广 (97)。
 2. 体积位的布阿桑定理 (98)。
 3. 在罗依曼問題上的应用 (99)。
 4. 静电学問題 (102)。
 5. 沙尔定理 (103)。
 6. 在格林-旁卡层上的应用 (106)。
- § 12. 双层位 107
1. 均质双层 (107)。
 2. 非均质的球形双层 (108)。
 3. 在布阿桑积分上的应用 (109)。
 4. 封闭双层位的一般情况 (109)。
 5. 費列德霍尔蒙公式和狄义赫利問題 (110)。
- § 13. 重力位 111
1. 水准面。斯托克司定理。斯托克司常数 (111)。
 2. 沙尔定理在重力位上的应用；瓦弗尔公式 (116)。
 3. 水准面上 g 的測定。液态质量旋轉速度的极限值 (克鲁德里) (117)。
 4. 将拉伯拉斯算子改化为水准面的法綫导数 (布隆斯公式) (120)。

第三章 位理論的外部問題

- § 14. 狄义赫利的外部問題 121
1. 球的外部問題的格林函数 (121)。
 2. 湯姆逊方法 (122)。
 3. 外部問題的布阿桑积分 (125)。
 4. 湯姆逊方法在位中的应用 (126)。
 5. 格林函数和高斯問題 (127)。
- § 15. 球的罗依曼外部問題；外部混合問題 128
1. 貝尔克磊斯公式 (128)。
 2. 外部混合問題；唯一性定理 (130)。
- § 16. 在球上和有限平面上的位的梯度計算 132
1. 符号 (132)。
 2. 斯托克司梯度公式 (133)。
 3. 在球层位上的应用 (134)。
 4. 在球和平面有限区域上的化算 (135)。
- § 17. 在无限平面上位理論的基本問題 137
1. 狄义赫利問題 (137)。
 2. 罗依曼問題 (139)。
 3. 用平面上的一阶梯度值表示二阶垂直梯度的公式 (140)。
 4. 罗依曼問題的反解 (140)。
 5. 水平梯度的計算 (141)。

第四章 球函数

- § 18. 勒让德多项式 143
1. 质点位的展开式 (143)。
 2. 直角坐标的化算 (146)。
 3. 勒让德多项式在位理論中的应用 (148)。
- § 19. 球多项式 151
1. 基本多项式系的形式 (151)。
 2. 球多项式 $P_n(\cos \psi)$ (153)。
 3. 球函数；正交性 (156)。
 4. 球函数展开式 (159)。
 5. 球函数的分类 (163)。
- § 20. 拉伯拉斯球函数 164
1. 拉伯拉斯級数 (164)。
 2. 拉伯拉斯“Y”函数的性质 (166)。
 3. 球函数的加法定理 (167)。
 4. 球函数的就范；基础函数和它們的积分方程 (170)。
- § 21. 球函数在位理論上的应用 175
1. 质体位 (175)。
 2. 瓦弗尔单值展开法 (179)。
 3. 球层位 (181)。
 4. 均质椭球体的位。拉伯拉斯定理 (183)。
 5. 均质液态椭球体的扁率。牛頓定律 (186)。
- § 22. 球函数展开式的实际应用 187
1. 高斯法 (187)。

第五章 重力测量和地球形状的理论基础

- § 23. 正常椭球体和水准旋轉橢圓体 190
1. 克莱饒公式 (190)。2. 达朗貝尔公式 (194)。3. 赫尔默特橢球体 (196)。4. 数据; 地球的质量和密度 (197)。5. 水准橢圓体的位 (201)。6. 水准橢圓体上重力的索米格蘭納-皮蔡奇公式; 卡西尼公式 (205)。7. 旋轉的非均质液体的外形不可能为橢圓水准面 (209)。
- § 24. 根据重力观测值决定水准面 (斯托克司問題) 210
1. 扰动位 (210)。2. 重力测量的基本方程式; 布隆斯改正; 旁卡-斯托克司級数 (213)。3. 根据格林-基里法解基本方程式 (216)。4. 斯托克司級数的求和; 斯托克司函数 (220)。5. 大地水准面形状的测定。斯托克司公式和皮蔡奇公式。希尔瓦年的著作。旁卡公式 (224)。6. 重力测量的积分方程式。赫尔默特公式。旁卡級数 (228)。7. 化为平面問題。魯勉諾夫公式 (232)。
- § 25. 垂綫偏差 234
1. 扰动位的水平梯度 (234)。2. 垂綫偏差和大地水准面形状 (236)。3. 垂綫偏差和区域性的引力。普拉特問題 (237)。4. 垂綫偏差和重力异常。維宁曼尼斯公式和魯勉諾夫公式 (241)。
- § 26. 重力归算 244
1. 一般概念 (244)。2. 均质正圓柱体和正圓錐体的引力 (246)。3. 圓柱体和圓錐体的压缩 (249)。4. 球层 (赫尔默特) 和球块 (海福特) 的引力 (251)。5. 归算的基本类型 (空間、地形、法耶、布格、普萊) (256)。6. 在球上的归算; 旁卡方法 (259)。7. 車弗尼斯空間改正的証明 (262)。8. 赫尔默特对布格改正的解释 (264)。9. 逆演法 (265)。10. 均衡归算 (267)。

第六章 磁位及地磁理論的基本原理

- § 27. 永久磁鉄位的基本性質 280
1. 偶极位 (280)。2. 磁矩向量和磁化向量 (281)。3. 磁位 (284)。4. 磁化型式、湯姆逊公式、均匀磁化、布阿桑公式 (286)。5. 均匀磁化球。在地磁場中的应用 (290)。
- § 28. 高斯理論 293
1. 内部場的位和它的梯度; 高斯理論 (293)。2. 用垂直梯度表示水平梯度 (297)。3. 位和它的梯度的球函数展开式 (298)。4. 一次場 (301)。5. 关于外部場問題 (303)。
- 参考文献 306

第一版序

本书主要是叙述位理論在解决地球物理和大地測量問題方面的应用。

按照这样的目的，就有必要把整个的理論部份放在次要的地位，或者完全不将它反映出来。在本书中，仅仅談到牛頓引力位，所以在这里，例如就沒有叙述对數位理論，以及几乎一点也沒有提到位在其他理論物理問題中的应用。

在全书中，我决不只是局限于对位理論的最簡單的基本原理的討論，而是尽量詳細地去叙述这个理論和对基本問題（这里仅对球和平面而言）的解算；除此以外，在这里，我們还有必要尽量地在調和函数的理論和位理論之間划出明显的界限；所以在第Ⅰ章里叙述了調和函数的理論，在第Ⅱ章里叙述了引力位；在第Ⅲ章里叙述了外部問題，对于这个問題在詳細地研究位以前是不能够討論它的，在第Ⅳ章里还包括了对于今后所必需的一些專門問題，例如特殊边界問題的解，我称它为斯托克司問題，以及象在球和平面上計算位的梯度問題。

在球函数这一章中，全部的注意力都集中在加法定理、球函数展开式以及这些展开式和最小二乘法之間的关系等方面。

重力測量一章是本书的中心，尽管在其中还没有包含重力扭秤理論和它的应用，但是这一章的内容仍然是很零碎的。我的目的是尽可能地将这一章与位理論的一般問題紧密地联系起来，因而将重力測量理論中的基本方程放在首要地位。除了这些一般問題以外，在第Ⅴ章中还注意到一些特殊問題，例如垂綫偏差和重力归算理論，在这里尽可能地考虑到有关这方面的最新著作。

第Ⅵ章（地磁）的很大一部份是将已經叙述的理論用于磁位的特殊性質。

H. 伊捷尔松

普尔科伐·1932年7月

第二版序

本书的第二版与第一版比較起来有很大的改变，除了有許多个别的补充及文字上的修改以外，我对于 § 13（重力位）、§ 23（正常橢球体和水准橢圓体）、§ 24（大地水准面形状的測定）和 § 26（重力归算）的一部份又重新作了改写，在第Ⅶ章的整个內容中，我尽可能完整地为物理大地測量問題和数学物理一般問題之間的一致性提出根据。在新版中，对于这一章所补充的內容可以看作是地球形状理論和理論重力測量方面的一篇簡短的专题学术性論文，因为它們两者与位理論是有联系的。

Н. 伊捷尔松

列宁格勒 • 1935年12月

第一章 空間調和函数。位理論的内部問題

§1. 引力位的基本形式

1. 引言：在我們这本书的第一章里只是导入引力位的一些基本概念和定义，至于它的一些詳細的性質將放在下面几章里去研究，但是对于那些在以后要經常用到的符号和名詞必須事先做一些說明。

以后将要經常談到，用一个封閉曲面 S 所围成的空間区域 T ，或用两个封閉的而不相截的曲面 S 和 S' 所围成的区域 T' ，或者是相对于 S 面的外部空間区域；用 M 来表示在区域 T 內的流动点，它的坐标用 x, y, z 来表示。所要研究的是在区域内任意位置 M 上求得一些单值函数 U, V, W ；我們將它們写为 $U(x, y, z)$ 或 $U(M)$ 等等，这样 $U, V, \dots$ 是流动点 M 的坐标函数，称它們为点的空間函数，并且总是假設它們是单值的和有限的（而暫時不去討論相反的情况）。 $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \dots$ 称为对 M 点坐标的导数。

在許多情況下，問題在于求出和計算在 S 內部、 S 面上或 S 外部的某一个已知点上的 $U, V, \dots$ 值，我們称这个点为极，通常用 P 来表示它，并且还要討論对 S 来说是內部或是外部的极。 P 点常常是受力（例如引力）作用的那一点，这个点在德文文献中称为Aufpunkt^①，我們决定保留这个名詞，并且在俄文文献中有时也写成“Ауфпункт”，这样，极和計算点都是表示同一个点。如果要求得 P 点的 $U, V, \dots$ 的数值，我們就用 $U(P), V(P)$ 来表示它們，同时可以研究它們随 P 点位置的变化。这个点的坐标（几乎到处都是这样）用 ξ, η, ς 来表示，为此我們写成 $U(\xi, \eta, \varsigma)$ 或 $U(P), \frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}, \dots$ 就是 U 对极 P 坐标的导数。

待定点 P 和流动点 M 之間的距离用 r 来表示，这是位理論的主要变量，我們有：

$$|PM|^2 = r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \varsigma)^2.$$

由此，对 M 的坐标取导数：

$$r \frac{\partial r}{\partial x} = x - \xi, \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x - \xi}{r}. \quad (1-1)$$

或者，对 P 的坐标微分：

$$r \frac{\partial r}{\partial \xi} = -(x - \xi), \quad \frac{\partial r}{\partial \xi} = -\frac{x - \xi}{r},$$

这样：

$$\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\partial r}{\partial \xi}. \quad (1-2)$$

^① 中文譯为計算点。

同理，对于坐标 y 和 η 、 z 和 ς 也可求得上式。

距离 PM 在坐标轴上的投影等于

$$x-\xi, y-\eta, z-\varsigma.$$

这样，它的方向余弦则为：

$$\frac{x-\xi}{r}, \frac{y-\eta}{r}, \frac{z-\varsigma}{r}.$$

所以，根据(1-1)式则得：

$$\left. \begin{aligned} \cos(PM, X) &= \frac{\partial r}{\partial x}, \\ \cos(PM, Y) &= \frac{\partial r}{\partial y}, \\ \cos(PM, Z) &= \frac{\partial r}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$

自所采用的坐标原点到极 P 的向径用 ρ 来表示，于是

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \varsigma^2,$$

M 点的向径用 ρ' 来表示，则

$$\rho'^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

因此

$$r^2 = \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos(\rho, \rho').$$

2. 质点位 在 $M(x, y, z)$ 点上质量为 m 的质点按照平方倒数定律作用于 $P(\xi, \eta, \varsigma)$ 点上所有的质量 m' 上，它在整个空间产生一个牛顿引力场。我们假设在 P 点集中了单位质量($m'=1$)，那么作用在 P 点的力就是这个场在 $P(\xi, \eta, \varsigma)$ 点上的力。

现在，我们来讨论：“以 P 点为中心”的所有现象；在 P 点上作用了一个力，它的数值为：

$$F = f \frac{m}{r^2},$$

式中 f 是比例系数，称为引力常数($f = 6.66 \cdot 10^{-8}$ CGS)●，由 P 到 M 的力 $\vec{F}$ 的向量与坐标轴之间的夹角余弦等于：

$$\frac{x-\xi}{r}, \frac{y-\eta}{r}, \frac{z-\varsigma}{r},$$

这样，这个向量在 X 、 Y 、 Z 轴上的投影为：

$$F_x = \frac{fm(x-\xi)}{r^3}; \quad F_y = \frac{fm(y-\eta)}{r^3}; \quad F_z = \frac{fm(z-\varsigma)}{r^3}. \quad (1-4)$$

如果写成向量的形式，以上三式可用下列一个等式来代替：

$$\vec{F} = fm \frac{\vec{PM}}{|PM|^3},$$

● 在CGS制中， f 的因次为 $\frac{\text{厘米}^3}{\text{克} \cdot \text{秒}^2}$ ，为了简写起见，我们总是略去常数 f ，但是应该牢牢记住，在位理论公式中所遇到的物质的任何质量和密度必须用克来表示，并且要乘上 f 。

用 $|PM|$ 表示向量的数值对于引力在任意轴 (称它为 “s” 轴) 上的投影可以写成:

$$F_s = fm \frac{PM_s}{|PM|^3}, \quad (1-4-1)$$

在上式中, 分子是 $\overrightarrow{PM}$ 在 “s” 轴正方向上的投影。

位的研究是从发现^① (1-4) 中三个公式是下列函数对极 P 坐标的导数那个时期开始的,

$$V(P) = \frac{fm}{r}. \quad (1-4-2)$$

实际上, 若考虑到 (1-1) 式, 则:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \xi} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \frac{x - \xi}{r} = -\frac{x - \xi}{r^3},$$

同理, 对于坐标 η 和 ζ 也是一样, 得:

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial \xi}; \quad F_y = \frac{\partial V}{\partial \eta}; \quad F_z = \frac{\partial V}{\partial \zeta},$$

或者简写为:

$$\vec{F}(P) = \text{grad}_P V, \quad (1-5)$$

用语言来表达, 则为: 作用在 P 点上的力向量是函数 V 的梯度。

在继续讨论问题以前, 我们应该强调一下, 在 (1-5) 式中 M 和 P 点的对应作用, 如果质量 m 在 P 点上, 而在 M 点上的质量为 1, 那么作用在 M 点上力的投影为:

$$F_x = \frac{fm}{r^3} (\xi - x).$$

但是

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{x - \xi}{r} = -\frac{\xi - x}{r^3}$$

这样

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x} \text{ 等等.}$$

或者简写为:

$$\vec{F}(M) = \text{grad}_M V. \quad (1-6)$$

[在这里注脚 M 表示对 M 的坐标求导数, 这和 (1-5) 式一样, 不过它们是对 P 点的坐标求导数]。我们将看出, 为了说明作用在 M 和 P 点之间的引力的双重性质, 则只要用一个函数 V 就够了。

现在指出, 由于公式 (1-5) 和 (1-6) 中的关系完全与 x 、 y 、 z 轴的方向无关, 我们可将力向量在任意方向 $\vec{s}$ 上的投影与函数 V “对方向 $\vec{s}$ ” 的微分连系起来。为了说明这个问题, 假定, 从 P 点作一个无穷小的向量 $\vec{ds}$, 它与各轴所组成的角度为 α 、 β 、 γ ; 令 $d\xi$ 、 $d\eta$ 和 $d\zeta$ 表示这个向量在各轴上的投影, 这样:

^① 拉格朗日 (J.L.Lagrange), 1773。

$$\frac{d\xi}{ds} = \cos\alpha; \quad \frac{d\eta}{ds} = \cos\beta; \quad \frac{d\zeta}{ds} = \cos\gamma.$$

現在我們將 $\vec{F}$ 投影到 $\vec{ds}$ 方向上來；為此立出公式：

$$\begin{aligned} F_s &= F_x \cos\alpha + F_y \cos\beta + F_z \cos\gamma = \\ &= \frac{\partial V}{\partial \xi} \frac{d\xi}{ds} + \frac{\partial V}{\partial \eta} \frac{d\eta}{ds} + \frac{\partial V}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{ds}. \end{aligned}$$

根据复合函数微分規則，上式右端就是 V 对 s 的导数，或者更确切的說，是对方向 $\vec{ds}$ 的导数，我們用 $\frac{\partial V}{\partial s}$ 来表示它，因此我們可以令：

$$\begin{aligned} F_s(P) &= fm \frac{\cos(\vec{PM}, \vec{s})}{r^2} = \\ &= \frac{\partial V}{\partial s} = fm \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{r} \right). \end{aligned}$$

将上式分子中的角度也用一个符号来表示它；为了使它和以后的一些公式对称起見，我們用 ψ 表示 s 正方向和 $\vec{MP}$ 方向（即由 M 到 P 的向量方向；也就是 P 点上引力的反方向）所組成的角度，这样， $\cos(\vec{PM}, \vec{s}) = -\cos\psi$ （图 1），那么上式就成为：

$$\begin{aligned} F_s(P) &= \frac{\partial V}{\partial s} = fm \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{r} \right) = \\ &= -fm \frac{\cos\psi}{r^2}. \end{aligned} \quad (1-7)$$

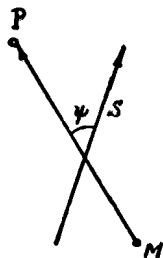


图 1

高斯称函数 V 为位；准确地說，这是 M 点对計算点 P 的位。我們將看出， V 的正負号与力学中所講的力函数相同，由此即可得出結論，当計算点由 P_0 移动到 P 时，則力所做的功与路程无关，并等于：

$$\begin{aligned} A &= \int_{P_0}^P F_\xi d\xi + F_\eta d\eta + F_\zeta d\zeta = \int_{P_0}^P dV \\ &= V(P) - V(P_0) = \\ &= fm \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right). \end{aligned} \quad (1-8)$$

当 $r < r_0$ 时，功是正的，这样，我們就認為質量 m 产生的力所做的功是正的。当 $r_0 \rightarrow \infty$ 时，

$$A = V(P). \quad (1-8-1)$$

我們可以說， P 点的位是当单位質量由无穷远趋近于 P (ξ, η, ζ) 时，質点 m 产生的力所做的正功，正如在力学中所講的，位等于点系 M 和 P 的位能值，而正負号相反，关于这个问题，在以后还要討論它（§ 8—5）。

到現在为止，我們所講的是牛頓力場；在这个力場中，質量是正的，而力是引力。但是庫伦 (Coulomb) 在电学和磁学方面也发展了平方倒数定律；在电学和磁学現象中，两个正質

量是互相排斥的。这里的正负号使问题复杂化了，因此必须采取某些规定。在现时，大概^①采取：(a) 质量 $+m$ 的位总是表示为 $+\frac{m}{r}$ ，它与 m 是否为质点、点电荷或者磁极无关；(b) 在引力的情况下， $\vec{F} = \text{grad} V$ ，位与力函数相合，并等于位能，正负号相反；(c) 在同名电荷相斥的情况下，和电学和磁学中一样有 $\vec{F} = -\text{grad} V$ ，位等于力函数，正负号相反，与位能相合。

若将基本定义推广，我们假设在点 $M_1, M_2, \dots, M_n$ 上有作用质量 $m_1, m_2, \dots, m_n$ ，那么根据会聚力的加法规则，我们又将求得作用在计算点 P 上的合力是下列函数的梯度

$$V(P) = \frac{m_1}{M_1 P} + \frac{m_2}{M_2 P} + \dots + \frac{m_n}{M_n P},$$

或者，假设 $M_1 P = r_1, \dots, M_n P = r_n$ ，

$$V(P) = \sum \frac{m}{r}. \quad (1-9)$$

我们将指出，如果 P 与作用点 $M_1, M_2, \dots, M_n$ 中的一个相合（则 $\frac{1}{r} \rightarrow \infty$ ），那么 (1-4-2) 和 (1-9) 式就失去意义。 $V(P)$ 称为质点（电荷）系的位，我们看出，只要 P 不与质点（或者电荷）系中任意一个相重合，则点的位是极点 P 的坐标的有限和连续的函数，同样很容易地证明，这对于 $V(P)$ 对于极点 P 坐标的导数同样也是正确的，同时，只要 P 不与作用质量中任意一个重合，则它的任意阶导数都是有限的和连续的。

3. 质体的位 现在再继续地推广下去，假设在体积 T 内充满了质量；令 dm 表示单元质量（暂时还不是微分），而 r 是它到 P 的距离，于是就得：

$$V(P) = \int_T \frac{dm}{r}, \quad (1-10)$$

式中积分是对整个体积 T 来计算的。

我们指出，就密度来说，这里完全没有提到连续的质量分布；可以将各种不同性质和比重的物质填满体积 T ，由一个单元到另一单元它的密度可以是间断的，但是如果再进一步提出，随着单元体积 $\delta\tau$ 的减小，包含在 $\delta\tau$ 中的质量 δm 趋近于零，这样：

$$\lim \frac{\delta m}{\delta\tau} = \mu,$$

也就是说质量 m 不仅是连续的，而且也是坐标的可微函数，那么它对体积的导数具有密度的意义，则得：

$$dm = \mu d\tau.$$

（这里 dm 是一般意义的微分），在这种情况下：

$$V(P) = \int_T \frac{\mu d\tau}{r}, \quad (1-11)$$

式中 μ 是分布在 T 内的质量的体密度，(1-11) 就是体积位的一般公式^②。

^① Kellogg, 52—53 页（见本书后面的参考文献）。

^② 以后我们不写三重或二重积分；符号 $d\tau$ 和 $d\sigma$ 常常用于单元体积或单元面积，它们总是表示该积分是对体积 T 或者对曲面 S 计算的。

应该指出, 在 P 上的位总是看作为单元质量除以它们到 P 的距离之和或积分。在所有的位理论公式的分母上都会出现基本变量 r 。

现在我们回到(1-10)式; 在该式中 dm 表示在某点 M 上不可微函数 m 的增量, 这种类型的积分称为斯蒂尔吉积分 (Stieltjes)。所以, 当 T 内的质量分布在最一般的情况下, 体积积分用斯蒂尔吉三重积分来表示; 这样的积分在各种不同的数学及力学部门中具有重大的意义, 耿捷尔 (N.M. Gunther) 教授将这些积分应用到位理论中去, 在这一方面他写出了许多渊博的和重要的著作。

体积位的许多特殊的性质将在以后详细地推导, 这些主要的性质之一就是体积位与质点位不同, 它无论在什么地方甚至当计算点 P 在 T 内, 也就是说它到 dm 的距离会趋近于

零, 因而 $\frac{1}{r} \rightarrow \infty$, 也不会趋近于无穷大。

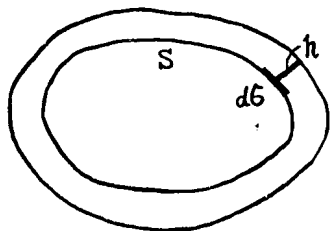


图 2

4. 单层位 我们假设作用质量集中在 S 上, 成为一种厚度 h 很薄的层, 令 $d\sigma$ 是层的单元面积 (图 2); 那么, 在高精度的情况下 $d\tau = h d\sigma$, 在这些条件下, 将体积积分 (1-11) 化为面积积分, 则:

$$V(P) = \int_S \frac{\mu h d\sigma}{r},$$

(r 是流动单元 $d\sigma$ 到 P 的距离); 现在我们假设, 当 $h \rightarrow 0$ 时, $\mu \rightarrow \infty$, 这样

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mu h = \mu',$$

式中 μ' 是 S 上 $\overline{M}$ 点坐标的有限的和连续的函数^①; 根据定义, 这个函数 μ' 称为质量分布在 S 上的面密度。此时, 我们有:

$$V(P) = \int_S \frac{\mu' d\sigma}{r}. \quad (1-11-1)$$

(以后, 我们仍用符号 μ 代替 μ'), 位 $V(P)$ 称为 S 面上的单层位。

很显然极限化算使我们理解了面密度, 对于质量来说它没有物理意义, 但是在静电学里, 当电荷以无限薄层的形式分布在导体的表面 S 上, 同时在单位面积上有电量 μ 分布时, 则面密度具有完全真实的意义。同样地也必须把质点位看作是一种数学上的虚构, 也就是把质量看成是分布在无穷细的导线 L 上, 令 μ 是单位长度上的质量, 那么不必进一步的解释就可以明白下式的意义:

$$V(P) = \int_L \frac{\mu ds}{r}.$$

(r 是单元弧长 ds 到 P 的距离); 这个位在电磁现象中具有实际的意义。当然单层位和线的位在一般情况下也可以用斯蒂尔吉积分来表示。

5. 引力的投影 对于质点位来说, M 点到极 P 点方向上的引力在任意方向 s 上的投影用 (1-7) 式求得:

① 在 S 面上的点用 $\overline{M}$, P 等等来表示; 同样地, 在 S 面上 M 点的函数 $U, V, \dots$ 用 $\overline{U}, \overline{V}$ 等等来表示。

$$F_s(P) = \frac{\partial V}{\partial s} = -f m \frac{\cos \phi}{r^2}.$$

在体积 T 内布满着吸引质量 dm 时, P 点上这个体积的引力投影用下式表示:

$$F_s(P) = -f \int_T \frac{\mu \cos \phi d\tau}{r^2}. \quad (1-12)$$

式中 ϕ 是单元 $d\tau$ 与极 P 的連線和已知方向 s 之間的变量角, 以后将要指出, 当 P 点在吸引質量内部时, 这个积分仍然有意义的, 并且在所有的情况下, 它等于位对 P 点坐标在 s 方向上的导数。

$$V = f \int_T \frac{\mu d\tau}{r}.$$

这种积分将在单层位理論中加以討論。

6. 法綫导数 在位理論中 S 面的法綫具有重要的意义, 我們假設 S 面有連續的曲率 [这样, 如果用高斯参数 u 和 v 来表示 S 上点的坐标, 那么函数 $x(u, v)$, $y(u, v)$ 和 $z(u, v)$ 在 S 的所有点上都具有一阶和二阶連續导数], 并且在每一点上 S 都具有一个确定的切平面以及法綫; 此外, 我們还要假設, S 上的所有点在 S 的任意点上的切平面的一边 (这样的曲面称为凸曲面, 任意一条直綫与他相截不会多于两点)。

如果 S 是封閉的, 那么将所謂的外法綫当作法綫的正方向, 它是由 T 的内区域朝向外空间, 但是, 如果区域 T' 是在两个不相截的曲面 S 和 S' 之間, 那么在 S' 上的外法綫方向就是由 T' 朝向內腔 T'' (图 3), 这样在 S' 上的外法綫与 S 上的外法綫的方向相反, 但是我們总是改变 S' 的法綫方向, 使得它的方向和 S 面上的法綫方向相同。如果 S 面不是封閉的, 那么法綫的正方向应该根据另外一种判別法来确定。和上面所講点的任意函数对任意方向 S 的微分的概念相似, 我們求出函数 U 对 S 面法綫方向的微分, 但是这里有一个特点, 而这个特点在本书的一开始就必须了解透彻; 这就是必須特別地把对于通过极 P 的“固定”法綫的微分和对于在单元 $d\sigma$ 上所作 S 面的“流动”变量法綫的微分区别开来, 假設 ν 是 S 上通过 P 的法綫方向, α, β, γ 是法綫与各軸之間的夹角, 对法綫 ν 的方向微分, 則得

$$\frac{\partial U}{\partial \nu} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial \zeta} \cos \gamma = \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{d\xi}{d\nu} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{d\eta}{d\nu} + \frac{\partial U}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{d\nu}$$

当 $U = \frac{fm}{r}$ 时,

$$\frac{\partial U}{\partial \nu} = f m \frac{\cos \phi}{r^2}.$$

式中 ϕ 是 $\overrightarrow{MP}$ 和 $\vec{\nu}$ 之間的夹角, 与此相应地, 我們也可以討論在 P 点上体积 T 的引力在方向 $\vec{\nu}$ 上的投影, 根据以前的公式可以写出:

$$F_{\nu}(P) = -f \int_T \frac{\mu \cos \phi d\tau}{r^2} \quad (1-13)$$

式中 ϕ 是流动方向 $\overrightarrow{MP}$ 和 $\vec{\nu}$ 方向之間的夹角 (图 4)。必須注意, 这个方向在积分过程中仍然是常数, 这样可以写出

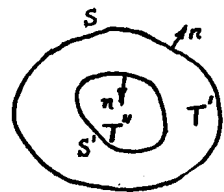


图 3

$$F_v(P) = f \frac{\partial}{\partial v} \int_T \frac{\mu d\tau}{r^2}.$$

現在，我們來討論另外一種情況，令 $\bar{M}$ 是 S 上的流動點， dn 是在 $\bar{M}$ 點上所作的 S 面的單元法綫，假設 $\frac{\partial U}{\partial n}$ 是 $\bar{M}$ 點上 U 對法綫方向 $\vec{n}$ 的導數，換句話說：

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha' + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta' + \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma' \right) \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha' + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta' + \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma',$$

式中 α' 、 β' 、 γ' 是這個“流動法綫” $\vec{n}$ 和各軸之間的夾角。我們要不止一次地討論下列類型的積分：

$$\int_S \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma,$$

並且也要指出，這裡——與前面不同——是在任意單元 $d\sigma$ 上對這個流動變量單元面積上的 S 的法綫進行微分。

我們以主函數 $\frac{1}{r}$ 為例，對於這個函數，我們有

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) &= -\frac{1}{r^2} \left[\frac{x-\xi}{r} \cos(n, x) + \frac{y-\eta}{r} \cos(n, y) + \frac{z-\zeta}{r} \cos(n, z) \right] \\ &= -\frac{1}{r^2} \cos(\overrightarrow{PM}, \vec{n}). \end{aligned}$$

在這裡用 φ 表示上式中的角度（在起算這個角度時， $\vec{r}$ 認為是由 P 到 $\bar{M}$ ，也就是與 φ 角的起算相反），則

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\cos \varphi}{r^2} \quad (1-14)$$

與此相應，所討論的積分則為

$$\int_S \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma = - \int_S \frac{\cos \varphi}{r^2} d\sigma. \quad (1-15)$$

我們要記住，這裡的 r 是流動單元 $d\sigma$ 到極 P 的距離， $\frac{\partial}{\partial n}$ 是對 S 面上每個單元 $d\sigma$ 的法綫求導數。還要指出，從條件

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{r} \right)$$

中決不應該將 $\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right)$ 和 $-\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{r} \right)$ 等同起來，因為在這兩種情況下，我們是將引力投影到不



圖 4

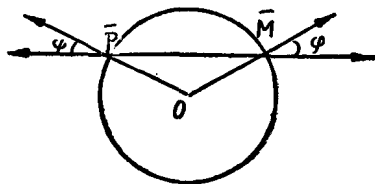


圖 5