高等教育自学考试指导丛书

XIANXINGDAISHUZIXUEKAOSHIZHIDAOYUTIJIE

邓长寿

线性代数

自学考试指导与题解

国防科技大学出版社

高等教育自学考试辅导用书

线性代数自学考试指导和题解

邓 长 寿

国防科技大学出版社
湖南 长沙

图书在版编目(CIP)数据

线性代数自学考试指导和题解/邓长寿．一长沙：国防科技大学出版社，1999.9
(高等教育自学考试辅导丛书)
ISBN 7-81024-578-3

Ⅰ.线…　Ⅱ.邓…　Ⅲ.线性代数-高等教育-自学考试-自学参考资料　Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 34722 号

国防科技大学出版社出版发行
电话：(0731) 4555681　邮政编码：410073
E-mail：gfkdcbs@public.cs hn.cn
责任编辑：文　慧　责任校对：黄八一
新华书店总店北京发行所经销
国防科技大学印刷厂印装

*

787×1092　1/32　印张．9.875　字数　230 千
1999 年 9 月第 1 版第 1 次印刷　印数　1—5000 册

*

定价：14.00 元

内 容 简 介

本书是成人高等教育自学考试教材《线性代书》一书的辅导书，本书根据考试大纲指出线性代数课程学习和考试的主要内容和要求，对习题作了解答，还指出应该注意的问题，并对内容和习题作了适当补充。

前　　言

许多参加自学考试的同学，在自学线性代数中，因为没有教师指导，往往苦于不得要领，入门难，不会解题；花费时间多，而收效小。写这本书的目的就是为了帮助他们解决学习和考试中遇到和将会遇到的困难，希望它能成为自学者身边的朋友和老师。

这本书作为学习教材《线性代数》(邓长寿等编，国防科技大学出版社 1998 年出版）的辅导书，对应地分为八章，各章的标题名称也与教材上的相同。书中所引用的章、节、习题及例题的号次都是教材中的。

本书每章分为四大部分：

第一部分根据《线性代数》自学考试大纲，见附录（一），列出主要内容，明确要求，指出重点，是本章的概括和总结。

第二部分指出应该注意的问题。线性代数中概念多，有的很抽象，不易准确掌握，理解上容易出错。它处理的对象是相互联系在一起形成一个整体的多个数，如向量、矩阵、行列式、线性方程组等，从而有自身的特点和规律。就运算而言，运算规则和运算规律与数的运算规则和规律虽然有密切联系，但又不完全相同，初学者容易不自觉地用已熟悉的初等数学知识去处理，往往出错，在自学考试试题中大部分判断题和选择题及部分填空题就是针对这类问题出的，题量约占试题总量的百分之三十，所以弄清这些问题，对自考通过至关重要。这一部分和结束语提醒读者注意这些问题。

第三部分是题解。学习线性代数参加自学考试，归根结底

要学会解题。考虑到很多自学者没有老师指导，所以书中的题，除个别很容易解的外，都作了解答。对于这一部分，最重要的是正确地使用：先自己动手去解，解不出来才去看解答。边看边思考，看懂了，把书合上再去解，解完了对照题解，如果有错，找出原因，加以修正，直到真正会解为止。这样去做，不仅学会了解法而且记得牢，临考能用上。如果只是照抄，甚至仅浏览一下，自以为会了，实际上不会，临考就傻眼了。这样使用题解，害多益少。

第四部分是补充。在教材的基础上，适当补充了一些内容和习题。习题中包括了 1995 年以前的一些自考试题，1998 年和 1999 年工科硕士生入学考试的全部试题及其他年份的硕士生入学考试的部分试题。通过这部分学习，扩大知识面，便能更好地应付自学考试，对有志报考研究生的读者，也有参考价值。

邓长寿

1999 年 6 月

目　录

第一章　行列式和线性方程组的两种解法

一、主要内容和要求

1. n 阶行列式的定义是最重要的基本概念，是行列式理论的出发点，一定要理解清楚。在理解中，主要把符号

$$\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

的含义搞清楚。要通过按定义去展开二阶、三阶行列式和写出四阶行列式的部分项去具体理解。

2. 行列式的七个性质和按行(列)展开定理是重要的基本理论，是计算和进一步论证行列式的依据和工具，必须熟记，且会正确运用。对一些较长的证明，只需掌握证明思路，不必花过多的时间去死记硬背全部过程。

3. 学习行列式，最最重要的是学会计算行列式。要能熟练地计算数字行列式，还会计算一些特殊的字符行列式。

计算行列式，除极个别特殊情形外，一般都不是直接按定义去计算，而是通过利用行列式的性质和按行(列)展开公式，将要计算的行列式化简为三角行列式（化三角行列式法），或降至二阶行列式（降阶法）去计算；有些特殊行列式可以变形为范德蒙行列式，从而利用范德蒙行列式公式去计算。

4. 线性方程组的根本问题是解的问题，所以首先必须知道什么叫做解，包括一般解、特解；以及与一般解密切相关的基本未知量和自由未知量。

5. 熟记克莱姆法则和§1.10中齐次线性方程有非零解的定理。

6. 能熟练地运用消元法求解。

二、应注意的问题

1. 利用行列式的性质5，对行列式做拆行(列)相加，一次只能拆一行(列)，不能同时拆两行(列)或多行(列)。

例1 对行列式

$$d=\begin{vmatrix} a_1+e_1 & a_2+e_2 \\ b_1+f_1 & b_2+f_2 \end{vmatrix}$$

下面的拆法是错误的

$$d=\begin{vmatrix} a_1+e_1 & a_2+e_2 \\ b_1+f_1 & b_2+f_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ f_1 & f_2 \end{vmatrix}$$

不妨用下面的具体例子来说明

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2+0 & 2-1 \\ 5+0 & 5+1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

但实际上

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=2\times 6-1\times 5=7$$

按这种错误的拆法去做，对任何一个行列式都可以得到随心所欲的结果。

对于上面的行列式，正确的拆法是：

$$\begin{vmatrix} a_1+e_1 & a_2+e_2 \\ b_1+f_1 & b_2+f_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1+f_1 & b_2+f_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ b_1+f_1 & b_2+f_2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ f_1 & f_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ f_1 & f_2 \end{vmatrix}$$

2. 行列式的性质 6 是用得最多的一个性质，在实际运用中要注意两点：

第一，用数 k 去乘第 s 行加到第 t 行上，即 r_t+kr_s，一定要放在被加的第 t 行，即代换第 t 行上原来的元素，而第 s 行保持原状不变。如果放在第 s 行上，改变了第 s 行，就错了。这是初学者容易犯的错误。例如，对教材中习题 1—6 中第 1 题第②小题的行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

下面的做法是错误的

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+(-2)r_2} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6$$

实际上，正确的结果是 3，错误的原因在于把 $r_1+(-2)r_2$ 的计算结果放在 r_2 上，而本应该放在 r_1 上的，读者可以对照后面习题解答的做法去体会。

所以，应用性质 6，一定要明确被加的行，被加行的行号放在“＋”前面，计算结果放在被加的行上，即在 r_t+br_s 中，r_t 是被加行，结果放在第 t 行上。

第二，运用性质 6，必须分先后依次去做。不能用一个数去乘第 s 行加到第 t 行，同时又用一个数去乘第 t 行加到第 s 行，像下面这样做：

$$\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[r_1+(-1)r_2]{r_2+(-1)r_1} \begin{vmatrix} 0 & -12 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = 0$$

这个行列式的值是 48，可见计算结果是错误的，原因是在计算过程中，用(—1)乘第 1 行加到第 2 行上，同时又用(—1)乘第

2 行加到第 1 行上。

3. 在化简过程中，对元素全是整数的行列式，要尽量避免出现分数，这样做可以减少计算量。

例 2 计算行列式

$$d = \begin{vmatrix} 3 & 14 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

解 做法 1

$$d = \begin{vmatrix} 3 & 14 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal[r_2 + \frac{2}{3}r_1]{r_2 - \frac{1}{3}r_1} \begin{vmatrix} 3 & 14 & -2 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{28}{3} & \frac{11}{3} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3 + 14r_2} \begin{vmatrix} 3 & 14 & -2 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

做法 2

$$d = \begin{vmatrix} 3 & 14 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} (-1) \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 14 & -2 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3 + 2r_1]{r_2 - 3r_1} (-1) \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 - 4r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

第二种做法尽管比第一种做法过程多了一步，但实际计算量要小。

在降阶法中，如果用前面第二种做法避免出现分数，那会更简单。

做法 3

$$d=\begin{vmatrix}3&14&-2\\1&4&-1\\-2&0&5\end{vmatrix}\xlongequal[r_3+2r_2]{r_1-3r_2}\begin{vmatrix}0&2&1\\1&4&-1\\0&8&3\end{vmatrix}$$

$$=1(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&1\\8&3\end{vmatrix}=(-1)(-2)=2$$

例 3 计算行列式

$$d=\begin{vmatrix}4&5&7\\3&4&6\\5&7&4\end{vmatrix}$$

解 如果一开始就企图将一行(列)中部分元素化为零，势必会出现分数，按下面办法去做，就可避免出现分数

$$d=\begin{vmatrix}4&5&7\\3&4&6\\5&7&4\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}4&5&7\\-1&-1&-1\\1&2&-3\end{vmatrix}\xlongequal[r_3+r_2]{r_1+4r_2}\begin{vmatrix}0&1&3\\-1&-1&-1\\0&3&-2\end{vmatrix}$$

$$=(-1)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&3\\3&-2\end{vmatrix}=-11$$

对于有些元素是分数的行列式，可以转化为元素全是整数的行列式去计算，例如

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&1\\3&\frac{2}{3}&0\\\frac{3}{2}&1&5\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\begin{vmatrix}1&1&1\\6&2&0\\3&3&5\end{vmatrix}$$

当然，避免出现分数不是绝对的，例如，习题 1—6 中第 1 题第④小题，如果不照题解那样去做，企图避免出现分数，可能会更复杂，读者不妨一试。

用消元法去解增广矩阵的元素全是整数的线性方程组，在应用第三种行初等变换时，也应注意这一原则，尽量避免出现分数。

4. 用消元法解线性方程组，如果利用矩阵消元，那只能做三种行的初等变换，不能像在行列式计算中那样对列做变换。因为这里矩阵的三种行初等变换，是对应直接对线性方程组消元所采用的三种基本运算，也可说是这三种基本运算的简化形式。如果对矩阵作列的变换，既无根据，又无意义，肯定出错。

5. 求线性方程一般解的过程中，一定先选基本未知量，在选定基本未知量之后，才把其余未知量作为自由未知量。选基本未知量要严格遵循下列两条原则：

① 基本未知量的个数＝有效方程的个数。

② 在由 r 个有效方程组成的方程组中，系数行列式不等于零的 r 个未知量才有资格一起选作基本未知量。

三、习题解答

习题 1－1

1. 说明下列数集对加、减、乘、除法中哪几种运算是封闭的。

① 偶数集

② 奇数集

③ 非负数集

④ $\{0,1,2,3\}$

⑤ $P=\{x \mid |x|<1\}$

解

① 因任二偶数之和、差、积仍是偶数；而二偶数之商不一定是偶数，例如 4 和 12 都是偶数，但 $12 \div 4 = 3$，所以偶数集对加、减、乘法封闭。

④ 以 P 表此数集，即 $P=\{0,1,2,3\}$

$$2+3=5\ \overline{\in}\ P$$

$$1-3=-2\ \overline{\in}\ P$$

$$2\times 3=6\ \overline{\in}\ P$$

$$3\div 2=1.5\ \overline{\in}\ P$$

所以此数集对加、减、乘、除法都不封闭。

②、③、⑤（略）

2. 指出下列哪些数集是数域、哪些不是数域，并说明理由。

① $\{0,1\}$

解 不是，因 $1+1=2\ \overline{\in}\ \{0,1\}$

② $P=\{u \mid a+bi,\quad a、b\in R,\quad i=\sqrt{-1}\}$

解 是数域，证明如下：

$$0=0+0i\in P,\quad 1=1+0i\in P$$

任取 u，$v\in P$，则应是

$$u=a+bi,\quad v=c+di,\quad a、b、c、d\in R$$

$$u+v=(a+bi)+(c+di)$$

$$=(a+c)+(b+d)i$$

$$a+c\in R,\quad b+d\in R\ (\text{因 } R \text{ 是数域})$$

$$u+v\in P$$

同理可知

$$u-v\in P$$

$$uv=(a+bi)(c+di)$$