中　国　科　学　院
測量及地球物理研究所編輯

測量及地球物理集刊

第一号

科　学　出　版　社

中　国　科　学　院
測量及地球物理研究所編輯

測量及地球物理集刊

第一号

科学出版社

1965

测量及地球物理集刊

第 一 号

中国科学院测量及地球物理研究所編輯

*

科学出版社出版

北京朝阳門内大街117号

北京市书刊出版业营业許可証出字第061号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店經售

*

1965年2月第一版	开本：787×1092 1/16
1965年2月第一次印刷	印张：7 1/4
印数：0001—1,800	字数：162,000

統一书号：13031·2083

本社书号：3181·13—15

定价：1.20元

前　　言

1955 年，当我所的測量与制图学科部分还是地理研究所內的一个研究組——大地測量組——时，为了将部分研究成果和工作报告以及历年来所推算的測量用表发表，曾出版了測量专刊，前后共計六期．1958 年，大地測量組扩建成为測量制图研究所，1961 年，又經調整改建为現在的測量及地球物理研究所．在建所及改建期間，由于工作忙碌，同时大部分的論文已在有关的学报上发表，所以专刊的編印就无形停頓下来．

几年以来，我所在党的正确領导之下，研究和实驗工作发展甚速，論文和工作报告积累很多，而有关的学术刊物篇幅有限，不可能滿足刊載要求．因此我們为了开展学术交流的需要，經院領导批准，特出版本"測量及地球物理集刊"．

本集刊将包括我所大地測量学、航空測量学、測量仪器学、制图学以及高空大气物理学各学科的研究論文和实驗报告．为了介紹国际有关学科的发展动向，集刊中还将刊登一些綜述性的报告，以供关心这些学科发展的同志参考．

本集刊所发表的各篇論文和报告的內容詳略不同，深浅各异；加之作者們限于业务水平，文章內容或有不当和錯誤之处，希望讀者不吝指正．

編　者

1964 年 12 月

測量及地球物理集刊

第一号

目　　录

顾及扁率一次項的地球表面形状問題

方 俊

根据格林定理,地球表面上的重力位T满足以下的方程:

$$T = -\frac{1}{2\pi}\int_{S'}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial n} - T\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right] dS', \tag{1}$$

式中n表示地球表面的外法綫,r为自計算点A到流动面元素dS'之間的距离,积分是按地球表面S'进行的. 在一般情况下,流动面元素的大地高(高出于参考椭球面的高程)是不知道的,我們可以采取第一次近似值——正常高h来代替. 設相当于上述流动面元素、而正常高为h的流动点为P,通过P作与参考椭球面共焦点的旋轉椭球面,它上面的外法綫用ν来表示,則有以下的关系:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \nu} - \frac{T}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial \nu}\right)_h = -(g - \gamma), \tag{2}$$

式中指标h表示左边的函数是对高程为h的椭球面dS来說的. 右边的g为地球表面的实測重力值,γ則为按正常高归算的理論重力值,故$(g-\gamma)$是混合异常. 設α为法綫n与ν的交角,則

$$\frac{\partial}{\partial n} = \cos\alpha\frac{\partial}{\partial \nu} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial \tau}, \tag{3}$$

将(2)及(3)式的关系代入(1)式,則得:

$$\begin{aligned} T = {} & \frac{1}{2\pi}\int_{S'}\left[\frac{g-\gamma}{r} + T\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r} - \frac{1}{r\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial \nu}\right)\right]\cos\alpha dS' \\ & - \frac{1}{2\pi}\int_{S'}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \tau} - T\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{1}{r}\right]\sin\alpha dS'. \end{aligned} \tag{4a}$$

上式右边第二个积分,其量很小,并且也只在研究点的周围产生影响. 因此,在推算这項影响时,我們可以不必考虑地球扁率或其他微量的影响. 关于这点我們将在另一文中予以研究.現在,先求(4a)式中的主項,卽第一个积分的解,卽

$$T = \frac{1}{2\pi}\int_{S'}\left[\frac{g-\gamma}{r} + T\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r} - \frac{1}{r\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial \nu}\right)\right]\cos\alpha dS', \tag{4b}$$

式中dS'为地球表面的面元素. 如果以dS代表通过这一面元素的椭球面的面元素,則

$$\cos\alpha dS' = dS.$$

我們采用曲面坐标,卽由共焦椭球面、单叶双曲面及通过它們的主軸的平面所組成的坐标系. 所以,任何一点的坐标为椭球面的参数w,归化緯度u及經度v. 它們与直角坐标(x,y,z)的关系为:

$$\left.\begin{aligned} x &= i\cos u\cos v\,\mathrm{ch}\,w, \\ y &= i\cos u\sin v\,\mathrm{ch}\,w, \\ z &= i\sin u\,\mathrm{sh}\,w. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

假如一个椭球面的参数为 w,则它的长短半径 a 及 b 等于:

式中 i 为常数[1],
$$\left.\begin{aligned} a = i\,\mathrm{ch}\,w, \quad b = i\,\mathrm{sh}\,w, \\ i^2 = a^2 - b^2. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

又若这个椭球面的第二离心率为 $e^2 = (a^2 - b^2)/b^2$,则
$$\mathrm{th}\,w = \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{1+e^2}}. \tag{7}$$

此外,椭球面上的微分面元素为:
$$dS = h_1 h_2 du dv = i^2\,\mathrm{ch}\,w\sqrt{\mathrm{ch}^2 w - \cos^2 u}\,\cos u du dv = i^2\,\mathrm{ch}\,w\sqrt{\mathrm{ch}^2 w - \cos^2 u}\,d\sigma, \tag{8}$$
$d\sigma$ 为单位半径球面的面元素. 設 ρ' 及 ρ 为計算点 A 及流动点 P 的矢径,ψ 为它們在坐标原点的交角,则
$$r^2 = 4\rho\rho'\sin^2\frac{\psi}{2} + (\rho - \rho')^2, \tag{9}$$

而
$$\left.\begin{aligned} \rho' = i\sqrt{\mathrm{sh}^2 w' + \cos^2 u'}, \\ \rho = i\sqrt{\mathrm{sh}^2 w + \cos^2 u}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

以指数 0 表示参考椭球面上的数值,例如,w_0 为它的参数,a_0, b_0 及 e_0 为它的长短半径及离心率. 将 $\mathrm{sh}\,w'$ 等展开为級数,有
$$\mathrm{sh}\,w' = \mathrm{sh}\,w_0(1 + \mathrm{cth}\,w_0\,\Delta w' + \cdots),$$
展开式中准确至 $\Delta w'$ 的一次項. 在以后的討論中可以知道,Δw 是和 e^2 同一数量級的. 所以,如果我們只要求准确至 e^2 級,则上式可簡化为以下形式:
$$\mathrm{sh}\,w' = \mathrm{sh}\,w_0(1 + \Delta w'),$$
同理
$$\mathrm{sh}\,w = \mathrm{sh}\,w_0(1 + \Delta w).$$
所以
$$\rho' = i\,\mathrm{sh}\,w_0\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\cos^2 u'}{\mathrm{sh}^2 w} + \cdots\right)(1 + \Delta w').$$

在保持同一精度的情况下,我們可以 $\frac{1}{2}e^2\cos^2 u_0'$ 代替右边第一个括弧中的第二項, 此处的 u_0' 为計算点 A 在参考椭球面上的投影点的归化緯度,它与 u' 只相差 e^2 項.因此,

同样
$$\left.\begin{aligned} \rho' = b(1 + \Delta w')\left(1 + \frac{1}{2}e^2\cos^2 u_0'\right), \\ \rho = b(1 + \Delta w)\left(1 + \frac{1}{2}e^2\cos^2 u_0\right), \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

式中 b 及 e 是参考椭球面的数值,为简化公式,将指标 0 省略.将(11)式代入(9)式,可得:
$$r^2 = 4b^2\sin^2\frac{\psi}{2}\left[1 + (\Delta w + \Delta w') + \frac{1}{2}e^2(\cos^2 u_0' + \cos^2 u_0)\right] + (\rho - \rho')^2,$$
式中 $(\rho - \rho')^2$ 是 Δw 及 e^2 的乘积或自乘,至少是 e^2 的二次項,故可弃去. 因此,得:
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2b\sin\frac{\psi}{2}}\left[1 - \frac{1}{4}e^2(\cos^2 u_0' + \cos^2 u_0) - \frac{1}{2}(\Delta w' + \Delta w)\right]. \tag{12}$$

1) $i = \sqrt{a^2 - b^2}$ 为焦点距离的一半,在共焦椭球面中,不論参数 w 为何,它总是常数.

再将(8)式展开，可得：

$$dS = a^2(1 + 2\Delta w)\left(1 - \frac{1}{2}e^2\cos^2 u_0\right)d\sigma. \qquad (13)$$

自(12)及(13)式，有

$$\frac{dS}{r} = \frac{c}{2\sin\frac{\psi}{2}}\left[1 - \frac{1}{4}e^2(\cos^2 u_0' + 3\cos^2 u_0) - \frac{1}{2}(\Delta w' - 3\Delta w)\right]d\sigma, \qquad (14)$$

式中

$$c = \frac{a^2}{b} = a\sqrt{1 + e^2} = b(1 + e^2).$$

Δw 等是对于参考椭球面 $w = w_0$ 的增量，它們与大地高 H 的关系可以推导如下．我們知道椭球面的卯酉圈曲率半径 N 等于：

$$N = i\sqrt{\operatorname{sh}^2 w + \sin^2 u}\Big/\operatorname{th} w. \qquad (15)$$

由此可得：

$$\frac{\partial N}{\partial w} = \frac{i(\operatorname{sh}^4 w - \sin^2 u)}{\operatorname{sh}^2 w\sqrt{\operatorname{sh}^2 w + \sin^2 u}} = \frac{i^2}{N}\operatorname{sh} w\operatorname{ch} w + e^2\text{項}. \qquad (16)$$

所以

$$\Delta w = \frac{N}{i^2\operatorname{sh} w\operatorname{ch} w}\Delta N,$$

即

$$\Delta w \approx \frac{\Delta N}{a} = \frac{H}{a} \approx \frac{H}{c}. \qquad (17)$$

現在估計一下 Δw 的数量級．当 $H = 7000$ 米时，則

$$\Delta w \approx \frac{H}{a} \approx 1 \times 10^{-3},$$

所以 Δw 与 e^2 是同一数量級．因此，在各个展开式中，弃去 Δw 的二次項不致影响要求的精度．

現在，我們推导 $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{r}\right)$．首先，我們有以下的关系：

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{1}{h_3}\frac{\partial F}{\partial w} = \frac{1}{i\sqrt{\operatorname{sh}^2 w + \sin^2 u}}\frac{\partial F}{\partial w}. \qquad (18)$$

用直角坐标来表示 r，則

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

式中 (x, y, z) 及 (x', y', z') 各为流动点及計算点的坐标．

故

$$\frac{\partial r}{\partial w} = \frac{1}{r}\left[(x - x')\frac{\partial x}{\partial w} + (y - y')\frac{\partial y}{\partial w} + (z - z')\frac{\partial z}{\partial w}\right].$$

自(5)式，有

$$\frac{\partial x}{\partial w} = x\cdot\operatorname{th} w, \quad \frac{\partial y}{\partial w} = y\cdot\operatorname{th} w, \quad \frac{\partial z}{\partial w} = z\cdot\operatorname{cth} w.$$

因此

$$\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial w}=-\frac{\operatorname{th} w}{r^3}\left[(x^2-xx')+(y^2-yy')+(z^2-zz')\operatorname{cth}^2 w\right]$$

$$=-\frac{\operatorname{th} w}{2r^3}\left[r^2+\rho^2-\rho'^2+\frac{2z(z-z')}{\operatorname{sh}^2 w}\right].$$

代入(18)式,

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\operatorname{th} w}{2ri\sqrt{\operatorname{sh}^2 w+\sin^2 u}}\left[1+\frac{\rho^2-\rho'^2}{r^2}+\frac{2z(z-z')}{r^2\operatorname{sh}^2 w}\right], \tag{19}$$

自(11)式,可得:

$$\rho^2-\rho'^2=b^2[e^2(\cos^2 u_0-\cos^2 u_0')+2(\Delta w-\Delta w')]+e^4\text{項},$$

$$\approx b^2[e^2(\sin^2 u_0'-\sin^2 u_0)+2(\Delta w-\Delta w')].$$

又

$$\frac{2z(z-z')}{\operatorname{sh}^2 w}=2b^2e^2(\sin^2 u_0-\sin u_0\sin u_0')+e^4\text{項},$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\operatorname{th} w}{2ri\sqrt{\operatorname{sh}^2 w+\sin^2 u}}\times$$

$$\times\left[1+\frac{e^2}{4\sin^2\frac{\psi}{2}}(\sin u_0-\sin u_0')^2+\frac{\Delta w-\Delta w'}{2\sin^2\frac{\psi}{2}}\right]+e^4\text{項}. \tag{20}$$

但是

$$\frac{\operatorname{th} w}{i\sqrt{\operatorname{sh}^2 w+\sin^2 u}}\approx\frac{1}{a}(1-\Delta w)\left(1-\frac{1}{2}e^2\sin^2 u_0\right),$$

$$\approx\frac{1}{c}\left(1+\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}e^2\sin^2 u_0-\Delta w\right),$$

代入(19)式,并乘以 dS',也就是在(20)式右边去掉右边系数中的 r,然后乘以(14)式,则得:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{r}\right)dS=-\frac{1}{4\sin\frac{\psi}{2}}\left[1-\frac{1}{2}e^2+\frac{e^2}{4}(\sin^2 u_0'+\sin^2 u_0)+\right.$$

$$\left.+\frac{e^2}{4\sin^2\frac{\psi}{2}}(\sin u_0-\sin u_0')^2+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sin^2\frac{\psi}{2}}\right)(\Delta w-\Delta w')\right]d\sigma. \tag{21}$$

最后,我們要推求下式的展开式:

$$\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial v}=-\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{N}+\frac{2\omega^2}{\gamma}\right). \tag{22}$$

自(15)式有:

$$\frac{1}{N}=\frac{1}{c}\left(1+\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}e^2\sin^2 u_0-\Delta w\right),$$

又因

$$\frac{1}{M}=\frac{V^2}{N}=\frac{\operatorname{sh} w\operatorname{ch} w}{i(\operatorname{sh}^2 w+\sin^2 u)^{3/2}},$$

故

$$\frac{1}{M}\approx\frac{1}{c}\left(1+\frac{3}{2}e^2-\frac{3}{2}e^2\sin^2 u_0-\Delta w\right).$$

于是

$$\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial v}=-\frac{2}{c}\left(1+e^2-e^2\sin^2 u_0-\Delta w+m\right),\tag{23}$$

式中

$$m=\frac{\omega^2 a}{\gamma_e}.$$

(22)式中右边括弧內的 γ 实际上是流动点上的正常重力. 現在以参考橢球面上的赤道正常重力値 γ_e 代替,其誤差为 e^4 級. 同样,(23)式中的 m,按公式推导应当是 $\frac{\omega^2 c}{\gamma}$, 現在以 a 代替 c, 誤差亦为 e^4 級. 这些誤差都可以忽略不計. 再以(14)式乘(23)式,则

$$\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial v}\frac{dS}{r}=-\frac{1}{\sin\frac{\psi}{2}}\left[1+\frac{1}{4}e^2(\sin^2 u_0'-\sin^2 u_0)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}(\Delta w-\Delta w')+m\right]d\sigma.\tag{24}$$

将(14),(21)及(24)式代入(4)式,注意 Δw 与 H 的关系,則得:

$$T=\frac{c}{2\pi}\int_\sigma\frac{g-\gamma}{2\sin\frac{\psi}{2}}\left(1+\frac{1}{4}e^2\sin^2 u_0'-\frac{H'}{2c}\right)\left(1-e^2+\frac{3}{4}e^2\sin^2 u_0+\frac{3H}{2c}\right)d\sigma+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_\sigma T\left(1+\frac{1}{4}e^2\sin^2 u_0'-\frac{H'}{2c}\right)\left[1+\frac{1}{6}e^2-\frac{5}{12}e^2\sin^2 u_0-\right.$$
$$-\frac{e^2}{12\sin^2\frac{\psi}{2}}(\sin u_0-\sin u_0')^2+\frac{H}{2c}-\frac{1}{6\sin^2\frac{\psi}{2}}\frac{H-H'}{c}+$$
$$\left.+\frac{4}{3}m\right]\frac{3d\sigma}{4\sin\frac{\psi}{2}}.\tag{25}$$

現在的积分是在单位半径的球面上进行的. 令

$$\left.\begin{aligned}\overline{\Delta g}&=(g-\gamma)\left(1-e^2+\frac{3}{4}e^2\sin^2 u_0+\frac{3H}{2c}\right),\\ \bar{T}&=T\left(1-\frac{1}{4}e^2\sin^2 u_0+\frac{H}{2c}\right),\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

則(25)式变为:

$$\bar{T}=\frac{c}{2\pi}\int_\sigma\frac{\overline{\Delta g}}{2\sin\frac{\psi}{2}}d\sigma+\frac{1}{2\pi}\int_\sigma\bar{T}\left[1+\frac{1}{6}e^2-\frac{1}{6}e^2\sin^2 u_0-\right.$$
$$-\frac{e^2}{12\sin^2\frac{\psi}{2}}(\sin u_0-\sin u_0')^2-\frac{1}{6\sin^2\frac{\psi}{2}}\frac{H-H'}{c}+$$
$$\left.+\frac{4}{3}m\right]\frac{3d\sigma}{4\sin\frac{\psi}{2}}.\tag{27}$$

在(25)至(27)式中,H' 及 H 都应当是大地高. 这是我們預先不能知道的. 但是,我

們可从水准測量以及重力測量求得正常高，卽

$$h = \frac{1}{\gamma}\int g\, dh, \tag{28}$$

式中 g 为重力值，γ 則为計算綫段間的平均正常重力值．大地高卽等于正常高加似大地水准面的高程异常 ζ，卽

$$H = h + \zeta.$$

ζ 小于 100 米，故$\zeta/c < 2 \times 10^{-5}$，卽小于 e^2 的二次項，故可以不計．因此，我們可以假定 H 为正常高，而不致影响所要求的精度．

将 $\overline{T}$ 分为两部分：

$$\overline{T} = \overline{T}_0 + e^2\overline{T}_1, \tag{29}$$

則得：

$$\overline{T}_0 = \frac{c}{2\pi}\int_\sigma \frac{\overline{\Delta g}}{2\sin\frac{\psi}{2}}d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \overline{T}_0 \frac{3d\sigma}{4\sin\frac{\psi}{2}}, \tag{30}$$

$$\begin{aligned}\overline{T}_1 = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \overline{T}_0 \Big[\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\sin^2 u_0 - \frac{1}{12\sin^2\frac{\psi}{2}}(\sin u_0 - \sin u_0')^2 - \\ - \frac{1}{6\sin^2\frac{\psi}{2}}\frac{H-H'}{ce^2} + \frac{4}{3e^2}m\Big]\frac{3\,d\sigma}{4\sin\frac{\psi}{2}} + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \overline{T}_1\frac{3\,d\sigma}{4\sin\frac{\psi}{2}}.\end{aligned} \tag{31}$$

解(30)式，得：

$$\overline{T}_0 = \frac{c}{4\pi}\int_\sigma \overline{\Delta g}\, S(\psi)d\sigma, \tag{32}$$

式中 $S(\psi)$ 为司督克斯函数．令

$$\begin{aligned}\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \overline{T}_0 \Big[\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\sin^2 u_0 - \frac{1}{16\sin^2\frac{\psi}{2}}(\sin u_0 - \sin u_0')^2 - \\ - \frac{1}{8\sin^2\frac{\psi}{2}}\left(\frac{H-H'}{ce^2}\right) + \frac{m}{e^2}\Big]\frac{d\sigma}{\sin\frac{\psi}{2}},\end{aligned} \tag{33}$$

代入(31)式，則得：

$$\overline{T}_1 = \varphi + \frac{3}{4\pi}\int_\sigma \overline{T}_1\frac{d\sigma}{2\sin\frac{\psi}{2}}. \tag{34}$$

将 $\overline{T}_1$ 及 φ 展为球諧函数，然后求 $\overline{T}_1$ 的解，則可得：

$$\overline{T}_1 = \varphi + \frac{3}{8\pi}\int_\sigma \varphi \cdot S(\psi)d\sigma. \tag{35}$$

将(32)及(35)式代入(29)式，則得：

$$\overline{T} = \frac{c}{4\pi}\int_\sigma \left[\overline{\Delta g} + \frac{3e^2}{2c}\varphi\right]S(\psi)d\sigma + e^2\varphi. \tag{36}$$

現在将本文所得的結果与莫洛金斯基的作一比較．先假定 H 及 H' 等于 0，則所得結果是橢球面上的解(准确至扁率一次項)．在本文中，我們采用归化緯度 u，但是在莫洛

金斯基文中[1]则采用地心緯度 Φ. 由于緯度函数前都有一乘数 e^2, 如果只保留这个等級，则直接用 Φ 代替 u, 不会影响所要求的精度. 但是，本文中

$$d\sigma = \cos u du dv, \quad c = \frac{a^2}{b} = a\sqrt{1+e^2}, \quad dv = dL,$$

而在莫洛金斯基文中，则采用长半径 a, 同时

$$d\omega = \cos\Phi d\Phi dL,$$

故

$$d\sigma = \left(1 + \frac{1}{2}e^2 - \frac{3}{2}e^2\sin^2\Phi\right)d\omega,$$

及

$$cd\sigma = a\left(1 + e^2 - \frac{3}{2}e^2\sin^2\Phi\right)d\omega.$$

将上式代入(25)式，则 T 的第一項与莫氏結果完全相同[1)]，即

$$\frac{a}{2\pi}\int \frac{g-\gamma}{2\sin\frac{\psi}{2}}\left(1 + \frac{1}{4}e^2\sin^2\Phi_0 - \frac{3}{4}e^2\sin^2\Phi\right)d\omega.$$

在第二項中，$d\sigma = \left(1 + \frac{1}{2}e^2 - \frac{3}{2}e^2\sin^2\Phi\right)d\omega$, 故 T 的系数为：

$$\left(1 + \frac{1}{4}e^2\sin^2\Phi\right)\left[1 + \frac{2}{3}e^2 - \frac{23}{12}e^2\sin^2\Phi - \cdots\right]\frac{3\,d\omega}{4\sin\frac{\psi}{2}}.$$

亦与莫氏結果完全相同.

第二步，假定 $e^2 = 0$, 即在球面上解地球表面的形状問題. 与莫洛金斯基的結果[2]相比較，自(33)式，

$$e^2\cdot\varphi = +\frac{c^2}{2\pi}\int_\sigma \overline{T}_0\frac{H'-H}{r_0^3}d\sigma =$$
$$= \frac{c^3}{8\pi^2}\int_\sigma\left[\iint_\sigma \overline{\Delta g}\cdot S(\psi)\,d\sigma\right]\frac{H'-H}{r_0^3}d\sigma, \tag{37}$$

式中 r_0 为半径为 c 的球面上的距离，即 $r_0 = c\sin\frac{\psi}{2}$. 此式相当于莫氏文中 G_1 的第一項. 値得注意的是(37)式是先在球面上进行 $\overline{\Delta g}S(\psi)d\sigma$ 的积分，然后乘以 $\frac{H'-H}{r_0^3}$, 再进行积分. 而后者则先将 $\overline{\Delta g}\left(\frac{H'-H}{r_0^3}\right)d\sigma$ 积分.

莫氏文中的 H_0 实际上是流动点的高程，与本文的 H 相当，而 H 则与 H' 相当. 将 φ 代入(36)式右边的积分項内，则得莫氏文中 T_1 的第二項：

$$\frac{3c^3}{(4\pi)^3}\int_\sigma\left[\iint_\sigma\left(\int_\sigma \overline{\Delta g}\,S(\psi)d\sigma\right)\frac{H'-H}{r_0^3}d\sigma\right]S(\psi)d\sigma. \tag{38}$$

在本文中，我們假定海平面上的起始重力位 w_0 是等于参考橢球面上的正常重力位 U_0

1)注意：在莫氏文中，公式组(9)的最后一式，$\frac{dS}{r}$ 印刷错误，但后文的推导无误.

的. 因此,在最后的結果中,积分核是司督克斯函数 $S(\psi)$. 如果不作这种假定,扰动位 T 存在 0 阶球諧 $(T)_0$,而[3]

$$(T)_0 = -\frac{R^3}{8\pi f M}\cdot\gamma\int_\sigma \Delta g d\sigma,$$

则应以 $[S(\psi)-1]$ 代替司督克斯函数 $S(\psi)$.

最后,如果将 (26) 式的 $\overline{\Delta g}$ 与 $(g-\gamma)$ 及 $\bar{T}$ 与 T 的关系代入 (27) 式,则第一项中 $(g-\gamma)$ 后,还有一个乘数 $\left(1+\frac{H}{c}-\frac{H'-H}{2c}\right)$; 第二項的方括弧中也应加入一項 $-\left(\frac{H'-H}{2c}\right)$. 这些乘数在莫氏文中皆因其影响甚微而被舍去. 事实上,它們的影响确实是很小的,它們不能与 $\frac{H'-H}{r_0^3}$ 相比較. 因为后者在接近計算点的区域可以产生較大的影响.

本文中只考虑到 $\frac{H}{c}$ 的一次項. 如果将公式扩展到 $\frac{H}{c}$ 的二次項,则公式中将增加 $\frac{H'-H}{c}$ 等的二次項,以及 $\frac{H}{c}\left(\frac{H'-H}{r_0^3}\right)$ 項. 由于 $\frac{H}{c}$ 或 $\frac{H'-H}{c}$ 都是与 e^2 同一数量級,所以二次項可以不考虑.

計算了 T 之后,高程异常即可按下式推算:

$$\zeta = \frac{T}{\gamma}, \tag{39}$$

垂綫偏差的分量 ξ 及 η, 则可按下式計算:

$$\begin{aligned}\xi &= -\frac{1}{\gamma\rho}\frac{\partial T(B,L,H)}{\partial B} - \left(g-\gamma+\frac{2T}{\rho}\right)\frac{\partial H}{\gamma\rho\partial B} = \\ &= \frac{1}{4\pi\gamma}\left(1+\frac{1}{4}e^2\sin^2 u_0' - \frac{H'}{2c}\right)\int_\sigma\left[\overline{\Delta g_0}+\frac{3e^2}{2c}\varphi_0\right]_{H=0}\frac{\partial S(\psi)}{\partial\psi}\cos A d\sigma - \\ &\quad -\left(g-\gamma+\frac{2T}{c}+e^2\frac{\partial\varphi}{\partial H}\right)\frac{\partial H}{c\partial u} - e^2\frac{\partial\varphi_0}{c\partial u},\end{aligned} \tag{40}$$

及

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{1}{4\pi\gamma}\left(1+\frac{1}{4}e^2\sin^2 u_0' - \frac{H'}{2c}\right)\int_\sigma\left[\overline{\Delta g_0}+\frac{3e^2}{2c}\varphi_0\right]_{H=0}\frac{\partial S(\psi)}{\partial\psi}\sin A d\sigma - \\ &\quad -\left(g-\gamma+\frac{2T}{c}+e^2\frac{\partial\varphi}{\partial H}\right)\frac{\partial H}{c\partial u},\end{aligned} \tag{41}$$

式中 A 为方位,φ_0 为 $H=H'=0$ 时的 φ,而 $\overline{\Delta g_0}$ 也是当 $H=0$ 时的 $\overline{\Delta g}$.

参 考 文 献

[1] Молоденский, М. С., Решение задачи Стокса с относительной погрешностью порядка квадрата сжатия земли, Тр. ЦНИИАиК, вып. 112.

[2] Молоденский, М. С., Еремеев, В. Ф., Юркина, М. И., Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры земли, Тр. ЦНИИГАиК, вып. 131, 128 頁.

[3] Pizzetti, P., Principii della theoria Meccanica della Fig. dei Planeti (А. А. Михайлов 的俄文譯本, 83 頁).

徐家汇观象台与西安天文基本点間經差的系統差

韓 天 芑

一、前 言

在測量制图学报 3 卷 1 期(1959 年)上发表了“徐家汇观象台与西安天文基本点間經差系統差測定的初步报告”一文之后，我們曾按不同的数据处理途径，重新計算了它們之間的系統差，并作了仔細研究．这一系統差对我国天文工作和时間工作的研究有所帮助，故特整理发表．

在初步报告中，实测的两地原采用經度值系統差为：

$$(\lambda_{徐}-\lambda_{西})-(\lambda'_{徐}-\lambda'_{西}) = \begin{array}{l}-47.8\ \text{ms}+\Delta.\\ \pm\ 3.9\end{array}$$

此处 λ 表示沒有包含系統誤差的經度值，是一个未知值，λ' 表示含有系統誤差的原采用經度值，Δ 表示系統差測定的眞誤差，下角“徐”、“西”分別表示徐家汇和西安点数值．

从观測成果求系統差值的数据处理方法，已在初步报告一文中詳加叙述．那时数据处理的主要想法是：将系統差測定的天文观測結果，通过小型石英鈡与 BPV 时号进行比对，然后依据所得的比对值，再将它化算到徐家汇观象台用来发播时号的主鈡上去．这样，就是把系統差測定的天文观測与徐家汇观象台(以下簡称徐台)的天文观測在同一个鈡上进行比較．如果系統差測定的天文观測是在徐台測站上进行的，那末这种比較的結果与徐台本身天文观測結果之差，卽可認为是人仪差．当在西安天文基本点上进行观測时，从这种比較的結果中扣除人仪差后，卽为西安点相对于以徐台为經度起算点的經度修正值．反之，亦可認为系徐台經度的修正值．这一修正值亦卽两地間經差的系統誤差．

依据上述設想处理观測成果的缺点，正如初步报告一文所提及的是：假定整个工作期間，徐台本身的天文观測絲毫沒有系統的变动．显然，这一假定是沒有充分理由的．为了削弱这一天文观測系統变动的影响，我們現在以苏联“标准时間”系統的时号改正数作为数据归算的依据[1]，重行处理了徐家汇观象台与西安天文基本点之間的經差系統差的測定資料．此外，在一些处理的細节方面也稍有更动．这样得到的系統差值为：

$$(\lambda_{徐}-\lambda_{西})-(\lambda'_{徐}-\lambda'_{西}) = \begin{array}{l}-31.0\ \text{ms}+\Delta.\\ \pm\ 2.6\end{array}$$

自 1963 年起，徐台的經度采用值由 $8^h\,05^m\,42^s.890$ 变更为 $8^h\,05^m\,42^s.864$[2]．顾及这一变动，两地經差的系統差值縮減为 -5.0 ms.

根据文献[3]，計入恆星星表系統变动对于該时期时号改正数的修正近似值 -1ms，則上述系統差值为 -6ms.

二、成 果 处 理

計入时号改正数，并求得各次观测的 $\Delta\lambda$ ($\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$; 經度的观测值一采用值)后，对徐台与西安点之間的經度采用値的系統差数的最后处理，系采用下列諸式:

$$\delta_\lambda = \frac{[(p_i + 10)(\Delta\lambda_{徐} - \Delta\lambda_{西})_i]_1^6}{[p_i]_1^6 + 60}, \quad i = 1, 2, \cdots 6, \text{观測員人数};$$

$$\Delta\lambda_{徐} = \frac{\Delta\lambda_{徐\mathrm{I}} + \Delta\lambda_{徐\mathrm{II}}}{2};$$

$$p_i = \frac{1}{M_i^2 + \partial\lambda_i^2};$$

$$M_i^2 = \frac{1}{3}(M_{i徐\mathrm{I}}^2 + M_{i西}^2 + M_{i徐\mathrm{II}}^2);$$

$$\partial\lambda_i^2 = \frac{1}{3}[(\partial\lambda_{i徐\mathrm{I}} - \partial\lambda_{i西})^2 + (\partial\lambda_{i西} - \partial\lambda_{i徐\mathrm{II}})^2 + (\partial\lambda_{i徐\mathrm{II}} - \partial\lambda_{i徐\mathrm{I}})^2].$$

式中M表示各个观測員在一个测站上的組外符合精度，亦即:

$$M = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}};$$

$\partial\lambda$ 表示各个观測員的天文观測值对全体观測員的平均观測值（平均观測員观測值）的偏离，即

$$\partial\lambda_i = L - l_i, \quad L = \frac{[l_i]_1^6}{6}.$$

采用这些公式来处理最后結果的設想是：在采用各个观測員的观测結果时，偏重于观測員在較长时期的观测过程中“人仪差”的稳定度，这不同于初步报告中偏重于观測員在一个观測阶段內的观測精度．在权的計算和采用方面，除了适当照顾观測数量以 M^2 作为分母外，对每个观測員的权数統一加以非人的因素的仪器权(令为10)．这样就可适当地削弱观測員精度相差悬殊所带入的有害的影响．在計算平均观測員的观測值时，也只取簡单的算术中数，这也是为了避免較大的人仪差被权数所扩大．計算結果見表1和表2．

这样处理所得的結果:

$$\delta\lambda = \frac{[p\delta\lambda]}{[p]} = -31.0\ \text{ms}$$

$$m_0 = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}} = \pm 6.8\ \text{ms}$$

$$M_{\delta\lambda'} = \frac{m_0}{\sqrt{[p]}} = \pm 1.3\ \text{ms}.$$

若要顾及当时(1958年)在时間系統方面有苏联系統和 BIH 系統存在的事实，則可按照苏联“标准时刻”公报所載的这两个系統的換算值 $\Delta H_0 - \Delta H_\lambda$ 进行計算．于是求得对于 $\delta\lambda$ 的改正値为 $\Delta\lambda = -1.9$ ms，从而經差的系統差值为 -33ms．如前所說，若再顾及星表系統变換对时号改正数的影响(約为 -1ms)，則最后决定的系統值为 -34 ms；当按徐台的新經度值計算，則为 -8 ms．

表 1 各个观測員的观測值(单位：ms)

測站		徐家汇 I			西安			徐家汇 II		
仪器 Wild T_4	观測員	$\Delta\lambda$	M	$\partial\lambda$	$\Delta\lambda$	M	$\partial\lambda$	$\Delta\lambda$	M	$\partial\lambda$
No. 22706	陈	−88.7	±2.4	−10.5	−64.7	±3.3	−19.4	−92.8	±4.0	−20.8
No. 22706	倪	−70.6	±5.7	+ 7.6	−55.0	±4.5	− 9.7	−84.2	±6.4	−12.2
No. 37435	韓	−62.6	±3.6	+15.6	−24.8	±3.0	+20.5	−54.9	±3.0	+17.1
No. 37435	施	−73.5	±6.0	+ 4.7	−53.0	±4.3	− 7.7	−53.2	±3.7	+18.8
No. 48973	徐	−93.2	±4.9	−15.0	−47.8	±4.0	− 2.5	−79.7	±5.6	− 7.7
No. 48973	連	−80.3	±4.7	− 2.1	−26.6	±3.9	+18.7	−67.4	±3.5	+ 4.6
平均		−78.2			−45.3			−72.0		

表 2 經差系統差的計算(单位：ms)

仪器 Wild T_4	观測員	$\frac{1}{2}(\Delta\lambda_{徐I}+\Delta\lambda_{徐II})$	$\Delta\lambda_{西}$	$\delta\lambda=\Delta\lambda_{徐}-\Delta\lambda_{西}$	$\frac{1}{5}(p+10)$
No. 22706	陈	−90.8	−64.7	−26.1	5
	倪	−77.4	−55.0	−22.4	3
No. 37435	韓	−58.8	−24.8	−34.0	11
	施	−63.4	−53.0	−10.4	3
No. 48973	徐	−86.4	−47.8	−38.6	4
	連	−73.8	−26.6	−47.2	3

三、結　語

随着时間的变迁，初步报告一文中对于系統差来源的一些看法已部分地得到証实．根据实測的結果尚存在有 5—8ms 的不符值．按照我們这次測定的工作規模来說，当时的測定精度有可能在5—8ms以內；但是考虑到观測点局部地区的地方性因素和季节性誤差以及人仪差变动的殘余影响，上述数值就不能算作經差的系統差．因此，我們可以說：西安天文基本点的經度值和徐家汇观象台的經度值，虽然起算的依据不同，但沒有显著的系統差；可以視为同一系統的經度值．

参 考 文 献

[1] Эталонное Время, 1958.
[2] 徐家汇观象台授时簡报，1963年，1月．
[3] 宋文尧，恆星星表的系統变动($FK_3 \rightarrow FK_4$)对一等天文点的坐标影响，測繪学报，7卷，2期，1964年．

海洋重力测量中二次項改正的确定

李 錫 其

一

大家知道,把重力仪安置在常平架上进行海洋重力测量,除垂直加速度的影响可以通过重力仪的強阻尼和取长时間連續观测的平均値予以消除之外,在其观测結果中,也象用摆仪测量一样,必須引入仪器傾斜和水平加速度的改正. 現在我們研究在扰动加速度不大于 20 伽的情况下,用长周期摆及短周期摆确定这种改正的方法.

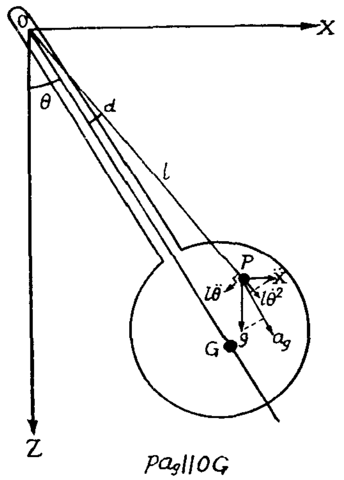

图 1

图 1 表示一架重力仪繞常平架旋轉軸 O 的自由振动. 振动中心位于 G, 重力仪弹性摆的重心位于 P, 仪器测量軸平行于 OG. P 点上各加速度在测量軸方向的投影为:

$$a_g = \ddot{X}\sin\theta + g\cos\theta + l\dot{\theta}^2\cos\alpha + \\ + l\ddot{\theta}\sin\alpha, \tag{1}$$

式中 $\ddot{X}$ 为水平加速度, θ 为仪器测量軸相对于鉛垂綫的偏角, g 为重力加速度, l 为弹性摆重心至常平架旋轉軸的距离, α 为弹性摆重心与常平架旋轉軸的連綫相对于重力仪测量軸的偏角.

根据力学上的动量矩定理, 我們可以写出常平架的运动方程:

$$\ddot{\theta} + 2F\dot{\theta} + \omega_0^2\sin\theta - \omega_0^2\frac{\ddot{X}}{g}\cos\theta = 0, \tag{2}$$

式中 F 为常平架的阻尼系数, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ 为常平架的自振圓頻率, $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L_0}{g}}$ 为常平架的自振周期, L_0 为振动中心至旋轉軸的距离,亦即常平架的归化摆长.

在上两式中,我們沒有引入垂直加速度 $\ddot{Z}$, 因为它对重力仪讀数的影响, 可以通过弹性摆上的阻尼和取长时間連續观测的平均値予以消除[1],而对偏角 θ 的影响,因均为高次項,可以略去不計.

由(1), (2) 两式消去 $\ddot{X}$, 并把三角函数按 θ 展成級数,舍去三次及三次以上各項, 则得:

$$a_g = g + \frac{1}{2}g\theta^2 + \frac{g}{\omega_0^2}(\theta\ddot{\theta} + 2F\theta\dot{\theta}) + l\dot{\theta}^2\cos\alpha + l\ddot{\theta}\sin\alpha.$$

这是我們从重力仪讀数中得到的观测値,与重力加速度比較,相应的改正値为:

$$\delta g = g - a_g = -\frac{1}{2}g\theta^2 - \frac{g}{\omega_0^2}(\theta\ddot{\theta} + 2F\theta\dot{\theta}) - l\dot{\theta}^2\cos\alpha - l\ddot{\theta}\sin\alpha. \tag{3}$$