纪念么枕生教授从事气象工作和执教50周年专辑

气候学研究

——"天、地、生"相互影响问题

邹进上　主编

气象出版社

纪念么枕生教授从事气象工作和执教50周年专辑

气候学研究

——“天、地、生”相互影响问题

邹进上 主编

气象出版社

内 容 简 介

本专辑是为纪念我国著名气候学家么枕生教授从事气象工作和执教50周年而选编的，旨在推动“天、地、生”气候学这一新兴学科的建立和发展。

本专辑共选刊55篇学术论文，皆系国内外著名科学家或么枕生教授的学生们所撰写。内容分为三部分，即：（一）统计气候与气候变化；（二）动力气候与气候模拟；（三）“天、地、生”相互影响问题。文章立意新颖，资料丰实，理论联系实际，富有开创性和启迪性，可供从事气象学、气候学、地理学、农业、林业、生物生态、环境科学等学科的研究人员和实际工作者以及高等院校有关专业的师生们参考。

气候学研究——“天、地、生”相互影响问题

邹进上 主编

责任编辑 顾仁俭

* * *

气象出版社 出版

（北京西郊白石桥路46号）

北京密云华都印刷厂印刷

气象出版社发行 全国各地新华书店经售

* * *

开本：787×1092 1/16 印张：32.125 字数：771千字

1989年8月第一版 1989年8月第一次印刷

印数：1—1000册 定价：22.90元

ISBN 7-5029-0275-9/P·0163

纪念么枕生教授从事气象工作和执教50周年专辑编辑委员会

主　　编：邹进上

委　　员：马开玉　金一谔　傅抱璞

钱永甫　高国栋　潘守文

序　　言

——纪念么枕生教授从事气象工作和执教50周年（1936—1986）

么枕生教授是我国著名的气候学家、气象学界的老前辈、中国气象学会荣誉理事。建国前历任中央研究院气象研究所助理研究员、西北农学院副教授兼林场测候所主任、东北大学教授；建国后任浙江大学教授，现任南京大学教授、南京空军气象学院兼任教授、南京气象学院名誉教授。

半个世纪以来，他致力于祖国的气象教育事业和气候学研究，成绩卓著，著述甚多，治学严谨，学识渊博，为人正直，注意选拔人才，桃李满天下，在国内外享有盛誉。1954—1986年期间，曾著有《农业气象学原理》、《气候学原理》、《气候统计》、《气候统计基础》；主编《西北黄土高原小气候》，现正在编写《气候统计学》，主编《气候统计原理与方法》、《气候学原理与方法》；在国内外学术刊物上发表论文40余篇，尤其在天气气候、气候变化和气候数值化方面有突出贡献。

早在20世纪30年代末期，么枕生教授首先将挪威学派天气模式应用于业务，并在研究长江流域梅雨时指出：梅雨是静止锋的产物，两湖盆地是气旋波生成区。他还根据天气实践指出，孟加拉湾风暴和冬季印度低气压或西南槽可以进入中国。近来大量事实和研究证明了这些结论的正确性。

40—50年代么枕生教授就注意到把数理统计学引入到气候学中。1958年以后乃专门从事统计气候学讲授与研究，经过长期不懈的努力，丰富了统计气候的内容，建立了我国的统计气候学。他发展了逐步回归理论，首次提出用偏相关计算正交回归，证明了偏相关的t检验等于正交回归的F检验，简化了逐步回归的计算。他用t检验确定自回归模式的阶数，简单证明了自回归模式的最后一个自回归系数就是偏相关系数，因而简化了确定自回归模式阶数的方法。

1986年美国访华代表团团长Klein教授曾认为：用多重相关筛选只能向前选进，而不能向后剔出。么枕生教授则提出了一个多重相关筛选的统计量，可以向前选进，亦可向后剔出，其计算结果和一般计算量很大的逐步回归完全一致。

一年以上的长期预报，难度很大，因为逐年平均值间的自相关系数很小，年平均值的时间序列几近于白噪声，所以用年平均值建立自回归模式是不可能的。么枕生教授在研究旱涝变化规律后，发现旱涝游程长度间的自相关性相当大，第一次提出建立游程自回归模式可用于一年以上的气候预报。

此外，么枕生教授在气候变率，特别是具有抽样理论的标准序列变率、旱涝变化、旱涝（冷/暖）转折周期、干湿气候循环等方面，均有所创见。他提出了周期与循环周期的严格检验方法；发展了气候循环事件的统计理论；推导出干湿气候循环的概率，平均长度和方差，为研究气候变迁、旱涝分析与预报作出了贡献。

杨鉴初（1951）指出转折点是长期预报的关键，Baur（1972）则用前一季的游程做下一季度的预报。么枕生教授所提出的游程转折点是把他们二人的概念相结合并使之数值化，且用卷积推导出转折周期；其进一步的研究即将用外文发表。

么枕生教授认为，谱分析技术只适用于气候对比分析，不适用于长期气候预报。现在却流行用准周期外推叠加的方法去做长期预报。他曾强调指出，准周期是组成周期的叠加周期，纪录长短不同，由于组成周期不同，其叠加周期（即准周期）就不一样。所谓长期预报是预报更长一段时间内的气候变化。准周期既然随记录长短而有变化，用以往的准周期去预报未来的准周期未必能成功。他还证明了功率谱和自回归谱由于组成周期的变换方法基本不同，是两个构造不同的谱，两者虽然近似，但自回归谱的辨别力不但高，而且避免了功率谱的许多缺点。自回归模式的各个显著性回归系数就代表自回归谱的组成周期。因此，自回归模式不但可应用于气候预报，而且可用于气候对比分析。

马尔科夫链只能代表一阶自回归过程。么枕生教授第一次考虑历史演变去划分各个状态，从而改进了马尔科夫链的计算方法，并计算了马尔科夫链中的大数定理。应用马尔科夫链计算历史气候中旱/涝游程的结果表明，旱涝游程具有较大的自相关性。这不仅把转折点数值化了，而且使这个理论在分析与预报晴、雨、旱、涝及其持续和转换上，具有重要应用价值。

么枕生教授在统计气候、动力气候以及气候的形成与变化诸方面具有真知灼见。1952年在国内首创气候专业，招收本科生，继而培养硕士和博士研究生。凡受业者深感么师演绎归纳，教导有方，概念清晰，启发性强，言简意赅，趣味无穷，诚所谓“沐浴教泽，如坐春风”，受益匪浅。他一方面，为祖国气候事业积极培养人才；另一方面，努力倡导、建立和发展新兴学科，开辟新的研究领域。1956年亲自领导黄土高原小气候考察，1958年首倡动力气候学并强调气候数值化。如今虽年近八旬，仍精神矍铄，自学不息，并积极倡导“天、地、生”气候学的建立与发展。

为了学习么枕生教授的治学精神，纪念他从事气象工作和执教50周年，特选编这本专辑并命名为《气候学研究》——“天、地、生”相互影响问题。

本专辑共选刊55篇学术论文，共分三部分，即：(一)统计气候与气候变化；(二)动力气候与气候模拟；（三）“天、地、生”相互影响问题。我们相信，这本专辑的问世将对我国气象学、气候学界的同事们、年轻学者们，有所激励和启发。在么枕生教授的积极倡导下，在国家气候委员会的支持下，我国的气候教育事业将会更加昌盛，“天、地、生”气候学也将会发展繁荣，开花结果。

纪念么枕生教授从事气象工作和执教50周年专辑编辑委员会

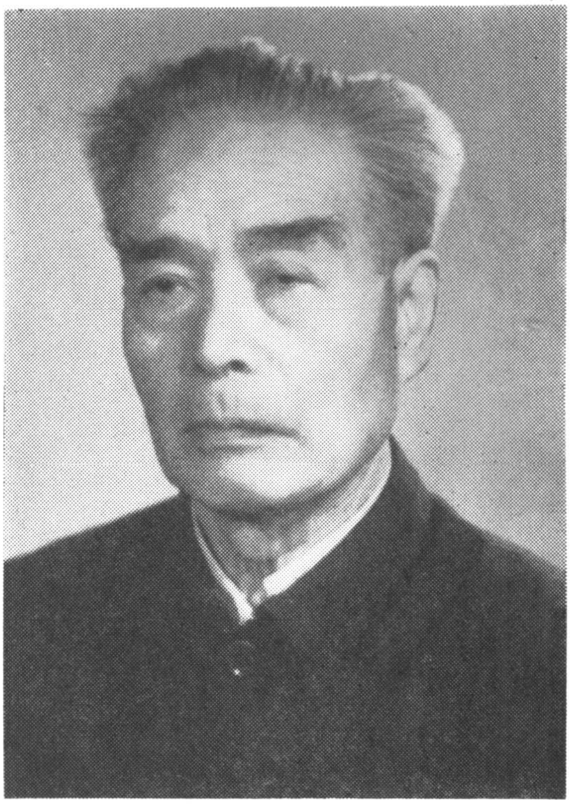
1988年3月于南京大学大气科学系

CLIMATOLOGY RESEARCH—INTERACTION PROBLEMS ON THE FACTORS OF "ASTRONOMY GEOSCIENCE AND BIOLOGY"

Brief Introduction

The anniversary volume of collected papers is specially dedicated to the famous climatologist, Prof. Yao Zhen Sheng (C.S. Yao) who has made great contributions to the climatological research and teaching for 50 years. This volume is also published with the purpose to create and develop an idea of climatology which is closely connected with the factors of "Astronomy, Geoscience and Biology".

55 papers are included in this volume, these papers being written by outstanding scientists or by graduated students of Prof.Yao both at home and abroad. This volume has three parts, namely, (1) statistical climatology and climatic change, (2) dynamical climatology and climate modelling, (3) interaction effects of factors of "astronomy, geoscience and biology". Some papers in this volume are filled up with new ideas, creations and enlightenments, and others contain rich data and connect theories with applications. Therefore, this volume is very helpful and useful as a reference for the researchers, university teachers and students, as well as for other people working in the fields of meteorology, climatology, geography, agriculture, forestry, biology and ecology, environmental sciences and so on.



么枕生教授

目　　录

自回归模式在气候学研究中的应用

么 枕 生

（南京大学大气科学系）

摘　　要

作者提出自回归模式固可用于气候预报，也可用于气候分析，但前者的阶数不应过高，后者的阶数愈高愈好。此外，还证明了自回归谱与功率谱在构造上并不一样，二者都不适宜用于预报，但以用于气候分析最好。作者还证明了各种表达形式的剩余方差是等价的。

一、引　　言

平稳随机过程可用自相关函数（时域分析）、谱密度函数（频域分析）与自回归模式表示。谱密度乃纯粹和过程的概率特性有关，所以已知$\{X_t\}$是k阶的自回归过程，那么由这个特殊模式就能计算出谱密度函数的特殊形式。自回归模式（AR模式）的特征性谱就称为自回归谱（AR谱），也可用以分析周期振动。

谱密度函数（谱或功率谱）就是时间序列自相关函数的傅里叶余弦变换。样本谱就是不同频率的余弦加权和，其权重就是各价自相关系数。余弦是周期函数，有严格循环变化，所以由谱分析所求得的周期就是不同组成周期的叠加周期，其组成周期就是余弦项。周期振动现象可用一些纯粹谐波的和去代表，其中每个谐波可用振幅、相位与周期长度不同的正弦或余弦项表示。因为谱分析技术所分析出的周期是叠加的，所以在纪录中确有的周期就会难以找出。例如，在由

$$x_t = 4\sin\frac{2\pi'}{5}t + 2\sin\left(\frac{2\pi}{10}t + 30\right)$$

人工计算的记录中，用谱分析技术就很难分析出周期10，主要因为周期10刚好是周期5的倍数。古典的周期图分析，是用不同试验周期，排列成Buys-Ballot表而找出的隐(准)周期，所以这样的隐周期自然是原有组成周期的叠加周期。当观测次数增多时，周期图平均可以趋近于谱密度函数。因此，用谱分析技术所求得的周期是叠加周期，是无须置疑的。这种叠加周期必然随记录长短具有变化，且其周期长度并无持续性（即以后很难出现同样的周期)，反有随机性（即周期长短具有随机变化），实际计算结果正是如此。长期预报本身就是预报未来一个月或更长的气候变化。由于未来的叠加周期和以往的叠加周期并不一样，所以周期叠加预报常常失败是自然的，何况叠加的周期为数太少，且分析出的周期又无位相，这种叠加手续具有问题。

上面所说的谱是功率谱，是用非参数处理方法所求得的谱。利用自回归模式所求得谱称为自回归（AR）谱，是参数处理方法所求得的谱。AR谱的组成周期主要用自回归模式的回归系数代表的（参见下节的证明），所以AR谱的组成周期可称为参数组成周期。AR

谱由于其经过线性变换可以称为线性变换周期。推求AR谱的传递函数和自回归模式有关，所以这样的线性变换谱与功率谱间就有一些差别，二者并不完全一样。所谓线性变换是由一个函数的域映射到这个函数的变程，所以这个差别是本质性的不同。AR谱和最大熵谱一样，可以加大谱的峰值，缩小谷值，平均而论AR谱和功率谱二者近似，不过Priestly（1981）认为AR谱的分辨力比功率谱高。

总之，用谱分析技术所找出的周期随记录长短具有变化，是具有随机变化的隐周期，所以作者认为谱分析技术（不论功率谱或AR谱）不便用做预报。Yevjevich（1972）早已指出用隐周期外推预报在水文研究中曾出现惊人差误。Chatfield（1984）也认为谱分析虽在气象学与海洋学很为有用，但并没给出有价值的结果。功率谱只能用于记录年代相同的气候对比分析。AR谱由于经过线性变换更是如此。

自回归模式不只可用于气候预报，高阶自回归模式本身以及AR谱更可用于气候对比分析。

二、周期振动的参数组成周期

因为AR模式可以递推计算，新增项的系数是根据以前各项的系数计算的，所以如高阶微量不计，则在高一阶的AR模式中，第末一项的自回归系数主要和同阶的自相关系数有关，而前面各个自回归系数仍和低一阶的自回归系数近似相等。因此，在AR模式中每增加一项就相当于多用一个振动项去拟合时间序列，但是这个振动不一定是周期波。如果这一振动能成为一个周期波，那就必须新增项的自回归系数绝对值足够大，才能在组成线性变换波时起到一定作用，否则就会淹没掉。这个概念更可以在数值上，用差分方程去证明。

设X_t代表平稳随机过程自平均数的离差，X_{t-1}，X_{t-2}……依次代表其过去各值，ε_t代表剩余数或可代表纯粹随机变数（白噪声），具有平均数零与常数方差。

设一阶AR模式为

$$X_t=\alpha X_{t-1} \qquad (t=1,2,3,\cdots) \tag{1}$$

可写如

$$(1-\alpha B)X_t=0, \tag{2}$$

此处B为后向移位算子。特征方程为

$$z-\alpha=0$$

于是，（1）式的全解为

$$X_t=cz=\alpha c$$

此处c为任意常数，并且可确定$c=X_{t-1}$。因为已经在上面假设下剩余数ε_t为零，（1）式成为齐次方程，所以（1）式的全解就是

$$X_t=\alpha X_{t-1}$$

其次，设有二阶AR模式为

$$X_t=\alpha_1X_{t-1}+\alpha_2X_{t-2} \quad (t=2,3,4,\cdots) \tag{3}$$

或

$$(1-\alpha_1B-\alpha_2B^2)X_t=0 \tag{4}$$

其特征方程为

$$z^2-\alpha_1 z-\alpha_2=0 \tag{5}$$

于是，（3）式的全解为

$$X_t=c_1 z^t+c_2 z_2^t \tag{6}$$

此处c_1与c_2为任意常数。设$\hat{\alpha}_2$为相当大的绝对值。因为根z_1，z_2必然为复数形式，所以可求得（3）式的全解为

$$\begin{aligned}X_t&=d^t[(c_1+c_2)\cos\omega t+i(c_1-c_2)\sin\omega t]\\&=d^t(A\cos\omega t+B\sin\omega t),\end{aligned} \tag{7}$$

此处

$$d=\sqrt{\frac{\alpha_1^2}{4}+\frac{\alpha_1^2}{4}-\alpha_2}\approx\sqrt{-\alpha_2} \tag{8}$$

因此（3）式的全解也可写为

$$X_t=(-\alpha_2)^{t/2}\sin(\omega t+\varphi) \tag{9}$$

此处

$$\varphi=\tan^{-1}\frac{A}{B} \tag{10}$$

任意常数c_1，c_2可以根据记录确定，因而A与B以及φ也可以根据记录确定。由（9）式可知，第一个谐波的振幅由$|\alpha_2|$的大小所控制。

再设有三阶自回归模式为

$$X_t=\alpha_1 X_{t-1}+\alpha_2 X_{t-2}+\alpha_3 X_{t-3}\quad(t=3,4,5\cdots) \tag{11}$$

可写如

$$(1-\alpha_1 B-\alpha_2 B^2-\alpha_3 B^3)X_t=0 \tag{12}$$

其特征方程为

$$z^3-\alpha_1 z^2-\alpha_2 z-\alpha_3=0 \tag{13}$$

设$z=y+\alpha_1/3$，则三次方程式可化为

$$y^3+py+q=0, \tag{14}$$

此处

$$p=\frac{1}{3}(-3\alpha_2-\alpha_1^2),q=\frac{1}{27}(-2\alpha_1^3-9\alpha_1\alpha_2-27\alpha_3) \tag{15}$$

设$|\hat{\alpha}_3|$大，则因为$q^2/4+p^3/27>0$，（14）式的三个根为

$$\left.\begin{aligned}&y_1=u+v\\&y_2,y_3=-\frac{1}{2}(u+v)\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v)=de^{\pm i\theta}\\&u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\\&v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

所以（11）式的全解为

$$
\begin{aligned}
y_t &= \beta_1(u+v)^t+\beta_2(de^{i\omega})^t+\beta_3(de^{-i\omega})^t \\
&= \beta_1(u+v)^t+d^t[(\beta_2+\beta_3)\cos\omega t+i(\beta_2-\beta_3)\sin\omega t] \\
&= A(u+v)^t+d^t(B\cos\omega t+C\sin\omega t) \\
&= A(u+v)^t+d^t\sin(\omega t+\varphi) \qquad (17)
\end{aligned}
$$

此处的常数A，B，C都可以根据记录确定。我们现只看（17）式的形式，不必代回。根据（16）式与（15）式展开且略去微量高阶项，可以求得

$$
d=\sqrt{\frac{1}{4}(u+v)^2+\frac{3}{4}(u-v)^2} \approx \left(\frac{\alpha_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad (18)
$$

第2个谐波的振幅也由$|\alpha_3|$的大小所控制。以上已可证明AR谱的前两个组成周期主要由自回归模式中的回归系数代表。

如为四阶模式，仍可求得四阶特征方程的四个根，应用共轭复数的技术，仍可推导出相应的周期项。不过，5阶或更高阶的方程就推导不出代表其根的公式，只可应用其他方法去求取并不精确的解。一个代数的基本定理就是一个多项式方程不论是什么次的，都有复数的解，其中自然有一些或全部为虚根。如果相应的谐波存在，则不论用什么方法自然都会求得相应的周期项。这样的谐波和上面推导的第一谐波与第二谐波一样，具有同样意义。总之，k阶自回归过程主要是k－1个谐波组成的过程，并且逐阶自回归过程相当大的第末一个自回归系数决定了相应谐波振幅的大小。

三、自回归谱

常用的功率谱分析方法，具有许多缺点，AR谱可避免这些缺点，所以AR谱是估计谱的有效方法，尤其可应用较短记录做谱分析，是其最大的优点。

AR谱是以纯粹随机过程为输入，以AR谱为输出（其传递函数和自回归模式有关）所求得的。当输入与输出都为离散参数过程时，我们可以写出输入$(y(t))$与输出$(x(t))$的线性变换为

$$
X_t=\sum_{u=-\infty}^{\infty} w_u Y_{t-u} \qquad (19)
$$

此处$\{w_u\}$为一给定的确定序列。设AR模式为一参数过程，则输入与输出标准化谱密度函数间的关系为

$$
\sigma_x^2\varphi_x(\omega)=\frac{\sigma_y^2}{|\psi(e^{-i\omega})|^2}f_y(\omega) \qquad -\pi\leqslant w\leqslant\pi \qquad (20)
$$

此处$\psi(e^{-i\omega})$就是由w_u规定的和自回归模式有关的传递函数。$\psi=1-\alpha_1B-\alpha_2B^2-\cdots\alpha_kB^k$，而B为后向移位算子。

k阶自回归过程应满足下列差分方程：

$$
X_t=\alpha_1X_{t-1}+\alpha_2X_{t-2}+\cdots+\alpha_kX_{t-k}+\varepsilon_t \qquad (21)
$$

此处α_1，$\alpha_2\cdots$，α_k为常数，$\{\varepsilon_t\}$为纯粹随机过程，具有方差σ_ε^2。

如果ε_t为输入，则$AR(k)$模式的AR谱由（20）式可写为

$$
f(\omega)=\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\pi\sigma_x^2|1-\alpha_1\exp(-i\omega)-\cdots-\alpha_k\exp(-ik\omega)|^2} \qquad (22)
$$

其中σ_x^2代表$\{X_t\}$的方差。剩余方差σ_ε^2可以证明为

$$\sigma_\varepsilon^2=\sigma_x^2(1-\alpha_1\rho_1-\alpha_2\rho_2-\cdots-\alpha_p\rho_k) \tag{23}$$

此处ρ_1，ρ_2，…，ρ_k代表自相关系数。因此，为了便于手算可把(22)式写如

$$f(\omega)=\frac{1-\alpha_1\rho_1-\alpha_2\rho_2-\cdots-\alpha_k\rho_k}{\pi[(1-\alpha_1\cos\omega-\alpha_2\cos2\omega\cdots\alpha_k\cos k\omega)^2+(\alpha_1\sin\omega+\alpha_2\sin2\omega+\cdots+\alpha_k\sin k\omega)^2]} \tag{24}$$

（24）式所代表的谱称为自回归谱（AR谱），等值于最大熵谱（参见Priestley，1981）。

剩余方差和偏相关的关系式（参考么枕生，1984）为

$$\sigma_\varepsilon^2=\sigma_{1\cdot23\ldots k}^2=\sigma_1^2(1-\rho_{12}^2)(1-\rho_{13\cdot2}^2)(1-\rho_{14\cdot23}^2)\cdots(1-\rho_{1k\cdot23\ldots(k-1)}^2) \tag{25}$$

作者（1982）曾证明了k阶AR模式的第末个参数$\alpha_k^{(k)}$就是一个偏自相关系数，所以曾由（25）式推导出剩余方差的下列结果（么枕生，1982）：

$$\sigma_\varepsilon^2=\sigma_X^2\{1-[\alpha_1^{(1)}]^2\}\{1-[\alpha_2^{(2)}]^2\}\{1-[\alpha_3^{(3)}]^2\}\cdots\{1-[\alpha_k^{(k)}]^2\} \tag{26}$$

此处σ_X^2就相当于（25）中的σ_1^2。（26）式说明用自回归模式拟合多变的记录时，取的项数愈多，则拟合愈好，最后使剩余数近似为白噪声。

根据估计AR模式参数的逐步迭代公式，还可把（26）式转换成为另一形式：

一阶：根据（26）式可求得

$$\sigma_\varepsilon^2=\sigma_X^2\{1-[\alpha_1^{(1)}]^2\}=\sigma_X^2[1-\alpha_1^{(1)}\rho_1]$$

2阶：同样可求得

$$\begin{aligned}\sigma_\varepsilon^2&=\sigma_X^2\{1-[\alpha_1^{(1)}]^2\}\{1-[\alpha_2^{(2)}]^2\}\\&=\sigma_X^2\{1-\alpha_1^{(1)}\rho_1\}\left\{1-\alpha_2^{(2)}\frac{\rho_2-\alpha_1^{(1)}\rho_1}{1-\alpha_1^{(1)}\rho_1}\right\}\\&=\sigma_X^2(1-\alpha_1^{(1)}\rho_1-\alpha_2^{(2)}\rho_2+\alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(2)}\rho_1)\\&=\sigma_X^2\left(1-\alpha_1^{(1)}\rho_1-\alpha_2^{(2)}\rho_2+\alpha_1^{(1)}\frac{\alpha_1^{(1)}-\alpha_1^{(2)}}{\alpha_1^{(1)}}\rho_1\right)\\&=\sigma_X^2(1-\alpha_1^{(2)}\rho_1-\alpha_2^{(2)}\rho_2)\end{aligned}$$

3阶：同样可求得

$$\begin{aligned}\sigma_\varepsilon^2&=\sigma_X^2\{1-[\alpha_1^{(1)}]^2\}\{1-[\alpha_2^{(2)}]^2\}\{1-[\alpha_3^{(3)}]^2\}\\&=\sigma_X^2\{1-\alpha_1^{(1)}\rho_1\}\left\{1-\alpha_2^{(2)}\frac{\rho_2-\alpha_1^{(1)}\rho_1}{1-\alpha_1^{(1)}\rho_1}\right\}\left\{1-\alpha_3^{(3)}\frac{\rho_3-[\alpha_1^{(2)}\rho_2+\alpha_2^{(2)}\rho_2]}{1-[\alpha_1^{(2)}\rho_1+\alpha_2^{(2)}\rho_2]}\right\}\\&=\sigma_X^2\{1-\alpha_1^{(2)}\rho_1-\alpha_2^{(2)}\rho_2-\alpha_3^{(3)}[\rho_3-\alpha_1^{(2)}\rho_2-\alpha_2^{(2)}\rho_1]\}\\&=\sigma_X^2\left(1-\alpha_{(1)}^{(2)}\rho_1-\alpha_2^{(2)}\rho_2-\alpha_3^{(3)}\rho_3+\frac{\alpha_2^{(2)}-\alpha_2^{(3)}}{\alpha_1^{(2)}}\alpha_1^{(2)}\rho_2+\right.\\&\qquad\left.+\frac{\alpha_1^{(2)}-\alpha_1^{(3)}}{\alpha_2^{(2)}}\alpha_2^{(2)}\rho_1\right)\\&=\sigma_X^2(1-\alpha_1^{(3)}\rho_1-\alpha_2^{(3)}\rho_2-\alpha_3^{(3)}\rho_3)\end{aligned}$$

……………………………………

k阶：可归纳出下列形式的剩余方差：

$$\sigma_\varepsilon^2=\sigma_X^2(1-\alpha_1^{(k)}\rho_1-\alpha_2^{(k)}\rho_2-\cdots-\alpha_k^{(k)}\rho_k) \tag{27}$$

这个结果就是（23）式。

AR谱计算简单，主要问题是什么阶的AR模式可以适当地估计 AR 谱。Parzen 在1974年提出的自回归传递函数判据为

$$\mathrm{CAT}(k)=\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{[\hat{\sigma}_{\epsilon}^{(j)}]^2}\right)-\frac{1}{[\hat{\sigma}_{\epsilon}^{(k)}]^2} \tag{28}$$

其中$[\hat{\sigma}_{\epsilon}^{(j)}]^2$为用j阶AR模式拟合记录时，剩余方差的无偏估计值。如果CAT(k)达到最小，则k就是应用AR模式估计AR谱时所应选定的阶数。CAT计算麻烦，且因有平均项，辨别力不高，有时其最低值还可位移。作者(1983)证明了AR模式的第末个参数$\hat{\alpha}_k^{(k)}$既是一个偏自相关系数，且可用t检验去检验其显著性。因此，作者认为可以用t检验这个第末个AR模式参数$\hat{\alpha}_k^{(k)}$（相当于一个参数组成波）为标准去计算AR谱时，应选定AR模式的阶数k。

上海6月降水时间序列证明是一个平稳随机过程。根据上海（1923—1972）6月50年降水记录计算了1到14阶AR模式。因为$\hat{\alpha}_{13}^{(13)}=-0.3622$的绝对值最大，且

$$t=\frac{-0.3622}{\sqrt{1-0.3622^2}}\cdot\sqrt{37-1-13}=-1.864$$

$$-t>t_{.95}(23)$$

所以根据t检验决定用13阶AR模式去估计AR谱（这里称为13阶AR谱）。根据同样记录应用(28)式求得CAT(13)＝0.0019为最小。这两种确定AR谱阶数的标准是彼此符合的。

为比较起见，又根据上海（1873—1980）6月108年降水资料，计算了功率谱，并将以上两种结果并列如下：

	自回归谱	功率谱		自回归谱	功率谱
$\hat{f}(0)$	0.1057	0.7184	$\hat{f}(8\pi/14)$	0.8065	0.4001
$\hat{f}(\pi/14)$	0.2907	0.5424	$\hat{f}(9\pi/14)$	0.5876	0.3450
$\hat{f}(2\pi/14)$	0.1267	0.3496	$\hat{f}(10\pi/14)$	0.2006	0.2143
$\hat{f}(3\pi/14)$	0.3694	0.3512	$\hat{f}(11\pi/14)$	0.09628	0.1750
$\hat{f}(4\pi/14)$	0.1003	0.3277	$\hat{f}(12\pi/14)$	1.6158	0.1607
$\hat{f}(5\pi/14)$	0.2126	0.3698	$\hat{f}(13\pi/14)$	0.1457	0.1496
$\hat{f}(6\pi/14)$	0.1719	0.3493	$\hat{f}(\pi)$	0.2642	0.1342
$\hat{f}(7\pi/14)$	0.1363	0.2932			

根据上面计算结果知道，功率谱分析方法就是应用很长的记录，也会由于截断点M的取值（上表取M为14）太小，竟把2.3年与28年的周期给平滑掉了。只有根据108年记录取M＝$2\sqrt{108}=20$时，用功率谱所分析出的各个周期，才能和根据50年记录计算的AR谱所反映的各个周期基本一样。在用108年记录取M＝20所计算的功率谱中出现2.4年、3.3年、5年、10年与40年周期。而相应的AR谱则出现2.4年、3.1年、3.6年、5年、10年与40年的周期。这说明AR谱除可用于短记录外，其分辨力还要比功率谱高。

根据上海6月50年（即1873—1922)降水记录应用(28)式求得CAT(13)＝－0.000186，最小，其次为CAT(12)＝－0.0000179，即根据CAT以用13阶AR模式计算AR谱为最好。在上海这50年记录中，$\hat{\alpha}_{12}^{(12)}=-0.3045$，在0.05的水平中上是显著的，所以作者根据t检验选定12阶AR谱。CAT(13)虽最小，但和CAT(12)相差无几，实际上12阶和13阶

AR谱所反映的周期，除13阶AR谱出现28年周期外，其余出现的周期完全一样。t检验和CAT所以不同，就是在CAT中间接考虑了第13个自回归系数$\hat{\alpha}_{13}^{(13)} = 0.12495$。如果用75%的信度做t检验，则作者也会选用13阶AR谱。因为$\hat{\alpha}_{13}^{(13)}$不很显著（即组成波不显著），可以在线性变换周期中容易被消没掉，所以在14阶AR谱中并未出现28年的周期。这说明13阶AR谱中的28年周期可信程度不高，13阶AR谱不如12阶AR谱更令人可信。因此，用t检验计算AR谱不只计算简便，而且给出了信度。

记录愈长，则由于自相关系数的后延可愈长或自回归系数阶数可愈高，AR谱的阶数可愈高，例如，根据上海（1921—1950）6月30年降水记录，无论应用t检验或CAT都说明只能计算2阶AR谱。根据上海50年记录只能计算12与13阶AR谱。根据上海108年记录不只应用t检验或CAT都可以确定计算20阶AR谱，还可根据t检验计算22、28、30与32阶AR谱，但是和这些后者相应的功率谱却不能计算，这也说明AR谱的分辨力高，何况功率谱更有其它缺点。

我们还认识到实际时间序列一般不能用一个傅里叶级数或傅里叶积分有效代表，只能假想用更一般形式的傅里叶展开，称为傅里叶-斯蒂热积分去有效拟合时间序列。为了求得一个用频域表示$\{X_t\}$的2阶统计量（即谱密度函数），必须引用平均的方法。除功率谱的其它缺点以外，这是一个基本弱点。

四、自回归模式可以直接用于预报与气候分析

AR模式早已用于预报。作者认为用AR模式预报的关键问题是能否掌握天气型式或气候型式的不同转折点（即突变），其它计算AR模式的不同方法都是次要的。转折点的出现是随机变化的，是显著的参数组成波所控制的，难以掌握。不过，在天气型式或气候型式发生转折以前必先有记录本身或其它因素出现的朕兆。因此，作者认为用AR模式预报时，最好先预报转折点的出现。转折点既然是随机变化的，必有其自己的概率分布（么枕生，1986）。我们可用马尔科夫链理论（Yao，1983）或循环事件理论分析转折点出现的规律。除门限游程自回归模式外，更可用二分变量的回归方程去预报具有转折点的非线性气候预报。如果转折点事前可以掌握，就可用更新的AR模式去做预报，这样必可大大提高预报效果。

用AR模式预报时，如所取阶数较多，预报效果并不最好。影响预报效果的主要问题，是AR模式是否可应用于转折点间的等待时间以内，但后者是随机变数。

用AR模式拟合记录去做气候对比分析时，则所取AR模式的阶愈多，则拟合愈好。作者（1983）曾指出自回归移动平均模式（ARMA）仅仅是把AR模式取的阶数很少，用移动平均拟合其误差（Box等，1976）。因为MA模式和AR模式可以互换，所以取项数足够多的AR模式就可近似取代ARMA模式，何况ARMA模式计算复杂，而AR模式各个系数都直接反映参数组成波，适合于对比做气候分析。现在的问题是需求多少阶的AR模式才能最佳拟合平稳时间序列，当然最好使剩余方差达到已无变化的最小值。但是，自相关系数的计算具有限制，不可能拟合一个十分恰当的AR模式，使剩余数成为随机数。因为拟合AR模式的目的是根据其自回归系数对比分析气候，所以作者认为可用剩余方差稳定少变为标准，拟合一个近似代表气候变化的AR模式即可。