

大洋潮汐

[苏] 格·依·马尔丘克 著
巴·阿·卡 岗



海洋出版社

大 洋 潮 汐

——数学模型与数值试验

Г. И. Марчук Б. А. Каган 著

李坤平 白乃著 译

陈宗镛 校

海 洋 出 版 社

1982年·北京

内 容 简 介

本书是苏联列宁格勒水文气象学院著名海洋学家 Г. И. Марчук 和 Б. А. Каган 最近的著作。本书全面地论述了大洋潮汐数学模型各方面的问题，它从潮汐动力学基础理论入手，对于潮汐动力方程的数值解法、世界大洋的潮汐图的模拟、潮汐底边界层的垂直结构和具有潮汐周期的内波等问题，都进行了阐述。全书结构严谨，说理清楚，内容新颖。

本书可供大专院校的地球物理、流体力学、数学和海洋动力学专业师生参考，是海洋科技工作者很好的读物。

Г. И. Марчук

Б. А. Каган

ОКЕАНСКИЕ ПРИЛИВЫ

Математические модели и

численные эксперименты

Гидрометеиздат Ленинград

1 9 7 7

大 洋 潮 汐

Г. И. Марчук Б. А. Каган

李坤平 白乃著 译

陈宗镛 校

*

海 洋 出 版 社 出 版

(北京复兴门海贸大楼)

北 京 印 刷 一 厂 印 刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1982 年 8 月第一版 1982 年 8 月第一次印刷

开本：787×1092 1/32 印张：10 $\frac{1}{2}$

字数：230,000 印数：1—1,100

统一书号：13193·0087 定价：1.70元

前 言

潮汐科学当前正处在非常特殊的发展时期。在实验方面，于很短时间内就取得了重大成就：扩大了岸边和岛屿的永久性潮位观测站网；设计了具有压力传感器的深水测量仪器，并进行了试验；我们很快将会得到从人造卫星上观测的有关大洋的潮汐资料。所有这些表明，在不久的将来，我们会掌握可靠而详细的全球范围的潮汐资料。

在理论研究方面，也取得了重大的成果。由拉普拉斯所建立的潮汐动力学理论，还得考虑一个必不可少的因素——湍流，才能富有成效。考虑了湍流之后，就使得求解潮汐动力学方程，从理想的条件进入到建立起现实水域的潮汐理论。

成功地利用电子计算机计算边缘海的潮汐，使许多研究者增加了信心，因为，在定量描述世界大洋潮汐中所遇到的困难，将会很快解决。为此，似乎只需要更现代化的电子计算机就行了。

然而，电子计算机也并非万能。如果我们将世界大洋中潮汐计算的结果同经验资料比较一下，就会发现它们之间的明显差别。其原因往往认为是由于计算网格的粗糙，而选择此种网格则取决于电子计算机的技术能力。但是我们可以大胆地确信，即使出现更现代化的电子计算机，也不会消除计算结果与观测数据之间的差别。顺便说一下，由 Pekeris 和

Accad 计算的世界大洋潮汐表明，即使采用一度的网格，也不能避免系统误差。因为不能消除地潮与海潮之间的相互作用、转换成内波的能量和陆架效应。陆架效应是浅海潮波被吸收、折射和散射作用的综合结果，也可能还有其它原因，但我们认为上述原因是主要的。

因此，使用现有的模式计算的结果与观测的资料不相符，与其说是因为受到计算手段的限制，倒不如说是因为我们的知识暂时还不够完备。当前的情况是，需要尽快地研究和考虑问题的物理实质。只有弄清楚了这些方面的问题，才能够期望模拟出我们所观测的世界海洋潮汐图的实际情景，这才是理论的最终目的。

但是，如果我们不是力求得到比现有的模式（我们有理由认为，现在关于潮汐现象结构的概念只是定性地正确）更好的结果，那么这些模式对于目前解释大洋潮汐形成的物理规律也许是有益处的。这就是本书的基本意图。

我们的任务是综合现阶段潮汐科学发展的某些成果，引起读者对海洋动力学这一传统内容发生兴趣。如果我们经常对已取得的成就提出疑问，那么在研究人员面前将显示出多么广阔的前景。

* 本书翻译过程中得到了山东海洋学院冯士筵、张大错，国家海洋局第一海洋研究所卢中发等同志的帮助和支持，对此表示衷心感谢。限于译、校者水平，翻译中会有一些缺点和错误，请读者批评指正。

目 录

第一章 研究潮汐理论所必备的知识	(1)
1.1 决定大洋潮汐的各种力	(1)
1.2 潮汐势	(13)
1.3 潮汐动力学方程	(27)
1.4 附加形变势	(31)
1.5 边界条件	(36)
1.6 参考文献	(41)
第二章 潮汐动力学方程的研究	(43)
2.1 问题的提出	(43)
2.2 基本概念与定义	(47)
2.3 唯一性定理	(51)
2.4 臆断性的估值	(53)
2.5 存在性定理	(60)
2.6 论潮汐动力方程周期解的存在性	(68)
2.7 潮汐动力学共轭方程	(73)
2.8 扰动理论	(78)
2.9 谱问题	(82)
2.10 参考文献.....	(88)
第三章 潮汐动力学方程解的数值方法	(89)
3.1 边值方法	(89)
3.2 HN-方法	(98)
3.3 HN-方法的改进方案	(105)

3.4	分式步长法	(112)
3.5	分式步长法的改进方案	(126)
3.6	参考文献	(128)
第四章	世界大洋潮汐	(130)
4.1	经验同潮时图	(130)
4.2	世界大洋潮汐空间分布的基本规律	(141)
4.3	世界大洋潮汐数值模型实例	(149)
4.4	世界大洋潮汐的其它计算方法	(169)
4.5	世界大洋潮汐动力学的数值试验	(181)
4.6	开阔大洋潮能逸散速度的估值	(200)
4.7	参考文献	(204)
第五章	潮流中的近底边界层	(207)
5.1	某些定义	(207)
5.2	实验资料	(216)
5.3	潮流近底边界层的理论模式	(241)
5.4	论潮流的阻抗定律	(276)
5.5	参考文献	(292)
第六章	内潮波的垂直结构	(295)
6.1	内潮波的产生	(295)
6.2	内波方程的定性分析	(303)
6.3	在实际层结大洋中内潮波的垂直结构	(311)
6.4	参考文献	(320)

第一章 研究潮汐理论所 必备的知识

1.1 决定大洋潮汐的各种力

引潮力

现在我们来研究作用在地球表面 $\mathcal{A}$ 点的单位质量上的力的平衡问题。这个质点的运动发生在引力场之中，而引力场取决于地球引力 $\mathbf{G}(\mathcal{A})$ 、月亮、太阳以及太阳系其它扰动天体的引力。这些天体的引力用 $\sum_i \mathcal{T}_i(\mathcal{A})$ 表示。在 $\mathcal{A}$ 点，质量的位移亦将受到压力 $\mathbf{P}(\mathcal{A})$ 和摩擦力 $\mathbf{F}(\mathcal{A})$ 的制约。

设惯性坐标系的中心点为 O 。令 C 为地球的中心，而 $B_i (i=1, 2, 3, \dots)$ 为扰动天体的中心（图 1.1）。根据牛顿第二定律， $\mathcal{A}$ 点上的单位质量的绝对运动可写成

$$\frac{d_a^2}{dt^2} \mathcal{O} \mathcal{A} = \mathbf{P}(\mathcal{A}) + \mathbf{G}(\mathcal{A}) + \sum_i \mathcal{T}_i(\mathcal{A}) + \mathbf{F}(\mathcal{A}) \quad (1.1.1)$$

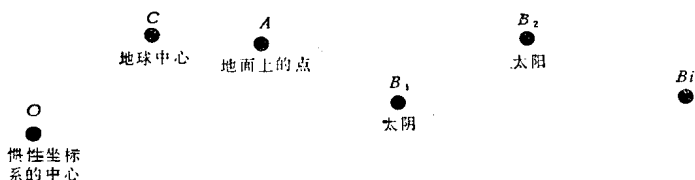


图 1.1 所研究的点 $\mathcal{A}$ 、地心 C 和扰动天体 B_i 相对于惯性坐标系原点的位置

其中 d_a/d_i 是惯性坐标系的算子。

试比较 $\underline{\mathcal{F}}(\mathcal{A})$ 和 $\mathbf{G}(\mathcal{A})$ 的量阶。对于太阳或月亮, $r \ll R$ (图 1.2) 因而 $|\underline{\mathcal{F}}(\mathcal{A})| \approx |\underline{\mathcal{F}}(C)| \approx r \frac{\mathcal{M}}{R^2}$, 式中 γ —— 万有引力常数, $\mathcal{M}$ —— 扰动天体 $\mathcal{B}$ 的质量, R —— 扰动天体到地心的距离。因为 $|\mathbf{G}(\mathcal{A})| \approx \gamma \frac{\mathcal{M}_\odot}{r^2}$ (式中, $\mathcal{M}_\odot$ —— 地球质量, r —— 地心到 $\mathcal{A}$ 点的距离), 则

$$|\underline{\mathcal{F}}(\mathcal{A})|/|\mathbf{G}(\mathcal{A})| \approx (\mathcal{M}/\mathcal{M}_\odot)(r/R)^2.$$

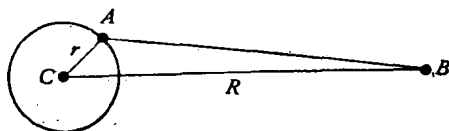


图 1.2 确定天体 B 对单位质量 $\mathcal{A}$ 点的引力

我们知道, 月亮与地球和太阳与地球的质量比值等于*

$$\mathcal{M}_\ell/\mathcal{M}_\odot = 1/81.53; \quad \mathcal{M}_\odot/\mathcal{M}_\oplus = 333420. \quad (1.1.2)$$

若取 r 等于地球赤道半径 r_1 , 则 r/R 为赤道视差。月亮和太阳赤道视差的平均值分别等于

$$\frac{r_1}{c_\ell} = 0.016593; \quad \frac{r_1}{c_\odot} = 4.2615 \cdot 10^{-5}, \quad (1.1.3)$$

式中 $1/c$ —— $1/R$ 沿轨道上的平均值, 那末

$$\frac{|\underline{\mathcal{F}}(\mathcal{A})|}{|\mathbf{G}(\mathcal{A})|} \approx \begin{cases} 3.4 \times 10^{-6} & \text{月亮} \\ 6.0 \times 10^{-4} & \text{太阳} \end{cases}$$

很明显, 太阳的引力比月亮的引力大。

* 较新的数值应为 $\mathcal{M}_\ell/\mathcal{M}_\odot = 1/81.30$, $\mathcal{M}_\odot/\mathcal{M}_\oplus = 332958$, 但对本段所讨论的量阶而言几乎没有影响。——译校者注

我们知道，地球沿自己轨道运动时有加速度。根据牛顿第二定律，则

$$\frac{d_a^2}{dt^2} \underline{OC} = \sum_i \underline{\mathcal{T}}_i(C).$$

将式(1.1.1)减去上式。则

$$\frac{d_a^2}{dt^2} \underline{CA} = \underline{P}(\mathcal{A}) + \underline{G}(\mathcal{A}) + \sum_i \underline{T}_i(\mathcal{A}) + \underline{F}(\mathcal{A}), \quad (1.1.4)$$

式中 $\underline{T}_i(\mathcal{A}) \equiv \underline{\mathcal{T}}_i(\mathcal{A}) - \underline{\mathcal{T}}_i(C)$ 为引潮力。于是，引潮力即为扰动天体对单位质量的 $\mathcal{A}$ 点（地球表面上的任意一点）和 C 点（地心单位质量）引力的合力。 $\underline{T}(\mathcal{A})$ 的方向与力 $\underline{\mathcal{T}}_i(\mathcal{A})$ 和 $\underline{\mathcal{T}}_i(C)$ 的矢量和相重合。图 1.3 表示以 C 点为中心的天体经向断面上八个点的引潮力的方向和大小。

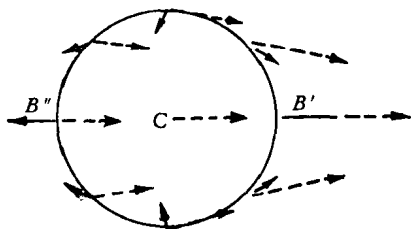


图 1.3 子午圈截面上八个点的引潮力（实线）
虚线表示各点 $\mathcal{A}$ 的引力。在球心 $\mathcal{T}(\mathcal{A}) = \mathcal{T}(C)$

当扰动天体 $\mathcal{B}$ （月亮或太阳）到地心的距离远远大于地球半径（即视差值很小），在地球向着月亮和背着月亮（向着太阳和背着太阳是相同的）的两半球上， $\underline{T}(\mathcal{A})$ 近似于对称分布。

根据 B' 点上(图 1.3)的矢量 $\underline{\mathcal{T}}(\mathcal{A})$ 与矢量 $\underline{\mathcal{T}}(C)$ 之差，可以估算出 $\underline{T}(\mathcal{A})$ 的量阶，它们的方向是重合的。若

$r(\equiv CB') \ll R(\equiv CB)$, 则

$$|\mathbf{T}(\mathcal{B}')| = \frac{\gamma M}{(R-r)^2} - \frac{\gamma M}{R^2} = \frac{2\gamma M r}{R^3}$$

试将 $|\mathbf{T}(\mathcal{B}')|$ 同 $|\mathbf{G}(\mathcal{B}')| \approx \gamma M_{\odot}/r^2$ 比较, 得出

$$\frac{|\mathbf{T}(\mathcal{B}')|}{|\mathbf{G}(\mathcal{B}')|} \approx 2 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) \left(\frac{r}{R} \right)^3.$$

由此可以导出结论, 引潮力与月亮和太阳的引力不同。属于地球引力之类的月亮和太阳的引力, 与视差平方成正比, 而引潮力则与 r_1/c 的立方成正比。

根据(1.1.2)和(1.1.3)式可求出

$$\begin{aligned} \frac{M_{\text{d}}}{M_{\odot}} \left(\frac{r_1}{c_{\text{d}}} \right)^3 &= 0.5603 \cdot 10^{-7} \\ \frac{M_{\odot}}{M_{\oplus}} \left(\frac{r_1}{c_{\oplus}} \right)^3 &= 0.2580 \cdot 10^{-7} \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

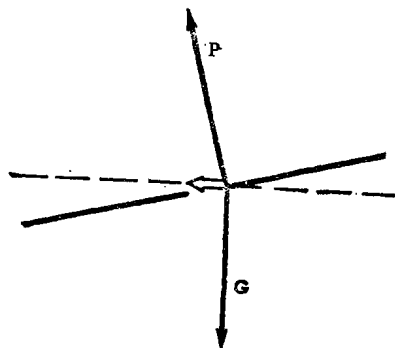


图 1.4 地球引力与流体静压力的平衡

结果是, 月亮和太阳的引潮力具有相同量阶, 大约是地球引力的 10^7 分之一。但尽管如此, 也不能忽略引潮力。事实上, 在海洋里 (大气圈和岩石圈也是一样) 与流体静压力相反的力 $\mathbf{G}$ 几乎等于 $\mathbf{P}$, 这样, $\mathbf{P} + \mathbf{G}$ 与 $\mathbf{G}$ 相比较, 前者将会很小。

从图 1.4 可以清楚地看出这个结果, 图中的虚线和实线分别表示 $\mathbf{G}$ 和流体静压力 $\mathbf{P}$ 的法面, 而双箭头是合力 $\mathbf{P} + \mathbf{G}$,

它的量阶与引潮力相等，其方向与 $\mathbf{G}$ 的法面相重合。

由于力 $\mathbf{G}$ 和 $\mathbf{T}$ 的方向不一致，导致 $\mathbf{T}$ 使质点沿地球表面发生水平位移，因而质量将在 $\mathcal{B}'$ 点和 $\mathcal{B}''$ 点周围聚集（图 1.3）。随着这种现象的发生，垂直（经向）位移具有运动学的性质，从其成因来看，它们遵循质量守恒定律，而决不是引潮力经向分量作用的结果。

这就是大气圈、水圈、岩石圈形成潮汐机制的一般特点。

地转偏向力和重力

等式 (1.1.4) 中的加速度矢量 $\underline{C\mathcal{A}}$ ，是相对于慢性坐标系来说的。然而，采用与地球一起以等角速率 $\boldsymbol{\omega}$ 旋转的相对坐标系则比较自然。在这种情况下，当 A 点上的质点相对于地球不动时，矢量 $\mathbf{r} \equiv \underline{C\mathcal{A}}$ 位移的绝对速度将等于 $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ 。因而，当质点相对于地球运动时，矢量 $\mathbf{r}$ 位移的相对速度是

$$\frac{d_a \mathbf{r}}{dt} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

我们用 $\mathbf{u}$ 来表示，而相对加速度 $\left(\frac{d_a \mathbf{u}}{dt} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} \right)$ 用 $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$ 表示。

根据定义 $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$ ，得出

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d_a^2 \mathbf{r}}{dt^2} - 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

将 (1.1.4) 式中 $d_a^2 \mathbf{r}/dt^2$ 的表达式代入上式，便得

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{P} + \mathbf{G} + \mathbf{T} + \mathbf{F} - 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (1.1.6)$$

在这个方程式中，包含 $\boldsymbol{\omega}$ 的最后两项可以看作是由旋转坐标系的加速度所引起的力。

根据定义，柯氏力—— $2\omega \times \mathbf{u}$ 与 ω 和 $\mathbf{u}$ 两个矢量相垂直。其量阶等于 $2\omega|\mathbf{u}|$ ，式中 $\omega = 7.29 \times 10^{-5}$ /秒。当 $|\mathbf{u}| = 1$ 厘米/秒时，其量值大约为 1.5×10^{-4} 厘米/秒²，它为 G 值的 10^7 分之一。然而，如上所述，力 G 与静压力几乎相平衡，所以柯氏力同引潮力 T 一样，在运动方程中必须保留。

离心力 $-\omega \times (\omega \times \mathbf{r})$ 的方向是沿着与 A 点连接的向径矢量的反方向，并与 G 相似，仅取决于所研究的质点位置。因此，将 G 和 $-\omega \times (\omega \times \mathbf{r})$ 合併成一个矢量

$$\mathbf{g} \equiv \mathbf{G} - \omega \times (\omega \times \mathbf{r}),$$

并叫它做重力。

以上各种力都与地球吸引力 G 作过比较。其中，对潮汐形成起重要作用的引潮力分量的方向（同样，还有柯氏力）与力 G 成直角。现在，必须建立所研究的各种力与 $\mathbf{g}$ 之间的关系。 G 与 $\mathbf{g}$ 之差较小，然而，这个差能使质点向赤道移动，结果使地球的两极偏平、赤道则略为隆起。既然，赤道半径和两极半径相差只有 21.4 公里，那末，为解决地球潮汐问题（具有实际所需的精度）可以把地球看作半径为 $r = 6371$ 公里的理想球体。这样，忽略了两个矢量之差，可以用 $\mathbf{g}$ 代替 G 。

可惜，完全忽略对 G 的注意是不行的。实际上，在大洋和地壳中，由引潮力引起的质点的垂直和水平位移，造成质量的重新分配以及地球重力场的相应的变化。这些变化，与未被扰动的 G 值相比，小到微不足道，但正如我们下面将要讲到的，它却可以和 T 相比较。如果把地球吸引力看作是不受扰动的 G 值和与地球重力场变化有关的偏差值 $G^{(1)}$ 与 $G^{(2)}$ 之和，而地球重力场变化则是由海潮和地潮所引起的；那么

把 $\mathbf{g}$ 的表达式代入方程 (1.1.6) 之后, 可以改写成下面的形式:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{P} + \mathbf{g} + \mathbf{G}^{(1)} + \mathbf{G}^{(2)} + \mathbf{T} + \mathbf{F} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} \quad (1.1.7)$$

下面我们将会讨论到 $\mathbf{G}^{(1)}$ 和 $\mathbf{G}^{(2)}$, 现在先 来求出摩 擦力 $\mathbf{F}$ 的表达式。

摩擦力

在实际的海洋中, 运动确实总是带有湍流的特性。在湍流中, 通过两种途径进行脉动交换: 一是分子的粘滞性, 它决定液体质点间的脉动交换; 一是湍流混合, 它导致脉动从一个液体元传递到另一流体元, 并同液体介质中存在的速度脉动有关。

粘性液体中, 单位质量的平均脉动通量的密度张量表达式为

$$\bar{\Pi}_{ij} = \bar{u}_i \bar{u}_j - (\bar{\sigma}_{ij} - \overline{u'_i u'_j}) \quad (1.1.8)$$

式中 u_i, u_j ——速度矢量 $\mathbf{u}$ 的分量; 下角标 i, j 可以采用数值 1, 2, 3, 而且根据含有重复出现下角标各项张量的分析法则, 应对所有三个可能的下角标求和; 撇号表示脉动速度, 而上边的横线表示取其平均。

设粘性应力张量 $\bar{\sigma}_{ij}$ 是与静止液体中粘性应力张量具有同样形式的各向同性项 $-\frac{\bar{P}}{\rho_0}\delta_{ij}$ (式中 $\bar{P}$ 和 ρ_0 分别为压力和液体平均密度, δ_{ij} 为 Kronecker δ -张量, 当 $i=j$ 时, δ -张量等于 1; 当 $i \neq j$ 时等于零) 和粘性应力偏差引起的各向异性项 $\bar{d}_{ij}$ 之和。其中, 包括切应力和某些其总和等于零的对角项。

同样地，我们确定出雷诺应力张量 $\overline{u'_i u'_j}$ ，它对于 δ_{ij} 起着附加应力张量的作用：

$$-\overline{u'_i u'_j} = -\frac{1}{3} \overline{u'_i u'_i} \delta_{ij} + \bar{\tau}_{ij} \quad (1.1.8')$$

在这个公式中， $\frac{1}{3} \overline{u'_i u'_i} = \frac{2}{3} b \delta_{ij}$ 项（式中， b 为脉动速度的动能）具有各向同性项张量 $\overline{u'_i u'_i} \delta_{ij}$ 的性质，而 $\bar{\tau}_{ij}$ 具有各向异性项的性质，它只同相邻液体块的相对位移（雷诺应力偏差）有关。

引入局部的笛卡尔坐标系，其坐标轴 $x_1 = x$ ， $x_2 = y$ ， $x_3 = z$ 。坐标轴 x, y 在与地球表面相切的平面上，方向分别为东和北， z 轴指向天顶。速度分量按上述坐标轴，分别为 $u_1 = u$ ， $u_2 = v$ ， $u_3 = w$ 。

在这个坐标系中，张量 $\bar{\tau}_{ij}$ （下面叙述略去上面的横线）有九个分量：

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix},$$

但他们并不都是独立的。根据应力 $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ 对称法则，张量 τ_{ij} 的独立的分量缩减成六个。其中三个对角线分量 $\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{zz}$ 是法向应力，另外三个非对角线分量 $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ ， $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ ， $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ 是切向应力（或切变应力）。

如上所述，雷诺应力偏差 τ_{ij} 只有当平均速度场在空间 (x, y, z) 不均匀时，才不等于零。所以 τ_{ij} 依赖于平均速度对坐标的导数。如果局部速度梯度不是很大，我们可以认为 τ_{ij} 与速度导数 $\partial u_i / \partial x_j$ 的依赖关系具有线性的性质。

然而，当液体作“固态”旋转时，就是说液体所有部分都作均匀旋转时， τ_{ij} 应为零。下面的组合满足液体呈“固态”旋转， τ_{ij} 转化为零的条件

$$e_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad (1.1.9)$$

它叫做形变速度张量，式中的下标 k 和 l 值可以取 1, 2, 3。因而雷诺应力偏差 τ_{ij} 应该是 e_{kl} 的线性函数。

和弹性理论相类似，液体任意一点的应力偏差的六个分量，都可以与该点的形变速度张量 e_{kl} 的六个分量相联系，并用下列关系式表示

$$\tau_{xx} = \kappa_{11}e_{xx} + \kappa_{12}e_{yy} + \kappa_{13}e_{zz} + \kappa_{14}e_{yz} + \kappa_{15}e_{xz} + \kappa_{16}e_{xy};$$

.....

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \kappa_{11}e_{xx} + \kappa_{12}e_{yy} + \kappa_{13}e_{zz} + \kappa_{14}e_{yz} + \kappa_{15}e_{xz} + \kappa_{16}e_{xy},$$

或写成矩阵的形式

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zz} \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & \kappa_{13} & \kappa_{14} & \kappa_{15} & \kappa_{16} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & \kappa_{23} & \kappa_{24} & \kappa_{25} & \kappa_{26} \\ \kappa_{31} & \kappa_{32} & \kappa_{33} & \kappa_{34} & \kappa_{35} & \kappa_{36} \\ \kappa_{41} & \kappa_{42} & \kappa_{43} & \kappa_{44} & \kappa_{45} & \kappa_{46} \\ \kappa_{51} & \kappa_{52} & \kappa_{53} & \kappa_{54} & \kappa_{55} & \kappa_{56} \\ \kappa_{61} & \kappa_{62} & \kappa_{63} & \kappa_{64} & \kappa_{65} & \kappa_{66} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{yz} \\ e_{xz} \\ e_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.1.10)$$

式中， κ_{rs} ($r, s=1, 2, \dots, 6$) 是“湍流粘滞”系数。

为了保持二次形式（在这里它具有平均运动能量逸散的含义，在弹性理论中，它是弹性势），系数矩阵元 κ_{rs} 应以下面的条件相联系

$$\kappa_{rs} = \kappa_{sr} \quad (1.1.11)$$

这个条件使湍流粘滞系数的个数（类似于弹性理论中的弹性常数）从 36 减到 21。这种系数个数减少的情况，对任何各向异性介质都一样。然而，当研究行星尺度的运动时，我们可以认为相对于垂直方向的轴，它们具有对称性。此时公式(1,1,10)中系数 κ_{rs} 矩阵可改写成

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} \kappa_{11} & \kappa_{12} & \kappa_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \kappa_{12} & \kappa_{11} & \kappa_{13} & 0 & & \\ \kappa_{13} & \kappa_{13} & \kappa_{33} & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & \kappa_{44} & 0 & \\ 0 & & & 0 & \kappa_{44} & 0 \\ 0 & \text{-----} & & & & 0 \frac{1}{2}(\kappa_{11}-\kappa_{12}) \end{array} \right\} \quad (1.1.12)$$

这样，根据轴对称的假定，就剩下五个独立的湍流粘滞系数。

现在展开(1,1,10)式，并代入从(1.1.9)式得出的形变速度张量各元的关系式中，则得

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \kappa_{11}u_x + \kappa_{12}v_y + \kappa_{13}w_z; \\ \tau_{yy} &= \kappa_{12}u_x + \kappa_{11}v_y + \kappa_{13}w_z; \\ \tau_{zz} &= \kappa_{13}u_x + \kappa_{13}v_y + \kappa_{33}w_z; \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \kappa_{44}(v_z + w_y); \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = \kappa_{44}(u_z + w_x); \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \frac{1}{2}(\kappa_{11}-\kappa_{12})(u_y + v_x) \end{aligned} \quad (1.1.13)$$

式中速度分量的下标表示其相应的导数。

我们还记得，按照雷诺应力偏差的定义 $\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz} = 0$ ，由此，用公式(1.1.13)中前三个关系式，对于不可压缩