面向21世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

# 数学实验

李尚志　陈发来　吴耀华　张韵华　著

高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

面 向 2 1 世 纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

# 数学实验

李尚志　陈发来　吴耀华　张韵华　著

高 等 教 育 出 版 社
HIGHER EDUCATION PRESS

(京)112 号

**图书在版编目(CIP)数据**

数学实验/李尚志等著. - 北京 : 高等教育出版社,
1999
ISBN 7-04-007762-0

Ⅰ.数… Ⅱ.李… Ⅲ.数学-实验 Ⅳ.01-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 37266 号

数学实验
李尚志 陈发来 吴耀华 张韵华 著

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | | |
| 社 址 | 北京市东城区沙滩后街 55 号 | 邮政编码 | 100009 |
| 电 话 | 010—64054588 | 传 真 | 010—64014048 |
| 网 址 | http://www.hep.edu.cn | | |
| 经 销 | 新华书店北京发行所 | | |
| 排 版 | 高等教育出版社照排中心 | | |
| 印 刷 | 国防工业出版社印刷厂 | | |
| 纸张供应 | 山东高唐纸业集团总公司 | | |
| 开 本 | 787×960 1/16 | 版 次 | 1999 年 9 月第 1 版 |
| 印 张 | 13.75 | 印 次 | 1999 年 9 月第 1 次印刷 |
| 字 数 | 244 000 | 定 价 | 14.90 元 |


凡购买高等教育出版社图书,如有缺页、倒页、脱页等
质量问题,请在所购图书销售部门联系调换。

**版权所有 侵权必究**

面向21世纪课程教材

普通高等教育“九五”
国家教委重点教材

## 内容简介

本书是教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果.全书共讲述15个实验,它们分别为:微积分基础,怎样计算$\pi$,最佳分数近似值,数列与极数,素数,概率,几何变换,天体运动,迭代(一)——方程求解,寻优,最速降线,迭代(二)——分形;迭代(三)——混沌,密码,初等几何定理的机器证明.最后还附有Mathematica简介.

本书适用于高等学校各专业本科生,以及具有初步的高等数学知识和计算机知识的其他读者.

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

# 前　言

本书是高等院校数学实验课的教材，适用于全国理、工、农、医、文各类高等院校，凡是开设高等数学课的学校都可以使用.

在大学中开设数学实验课，是教育部组织的“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”课题组的重要研究成果. 该课程的教学对象，是全国所有高校，不分理工农医等科类的本科生. 课程目的，是使学生掌握数学实验的基本思想和方法，即不把数学看成先验的逻辑体系，而是把它视为一门“实验科学”，从问题出发，借助计算机，通过学生亲自设计和动手，体验解决问题的过程，从实验中去学习、探索和发现数学规律.

这是在我国高等学校中新开设的一门课程，还处于摸索和试点阶段. 课程的指导思想、上课内容和方式都有待于在试点中逐步明确. 该课程在数学专业和非数学专业都要开设，因此也是数学专业课题组和非数学专业课题组共同的任务.

中国科技大学数学系参加了数学专业和理科非数学专业面向21世纪教学内容和课程体系改革的两个课题组，并且受课题组委托进行了开设数学实验课的试点，产生了这本教材. 参加这一试点工作的有我系的李尚志教授、陈发来教授、王树禾教授、侯定丕教授、吴耀华副教授、张韵华副教授等. 为了真正检验我们的试点课的效果，看它是否能够引起学生的兴趣，是否能够达到预想的教学效果，是否适合于各不同专业的学生，我们采用了面向全校的选修课的形式，让全校所有专业的学生自愿自由选课. 结果，在1998年和1999年的两次试点中，全校各专业选课的学生人数达到240人左右，几乎涵盖了所有的系科和专业，其中数学系学生约占1/3，非数学系的学生占2/3. 学生们不但对于听课很有兴趣，而且主动积极地完成所布置的实验作业，在作业中表现出了很大的兴趣和创造性，还对开设这门课程的必要性和如何改进提出了很多很好的意见.

以下是我们对于开设数学实验课的想法和做法，也是这本书的主要指导思想.

一. 指导思想：

主要是让学生自己通过动手去体验，而不在于教完他们多少内容. 不追求内容的系统性、完整性，而应当激发学生自己动手和探索的兴趣.

我们参照了物理实验课、化学实验课的内容和上课方法：这些实验课并不

需要花多少时间讲解理论和原理，讲解理论和原理是物理、化学的理论课程的任务.实验课主要是学生自己做实验，观察和分析实验结果.我们认为，数学实验也应当这样，不要在数学实验课上讲很多理论，也不应当花很多时间和精力来教算法.但是，物理、化学实验课往往是把实验的每个步骤都给学生规定得很详细，学生只要按步就班完成这些步骤，而实验的结果也是预先就知道了的，留给学生探索的余地不多.我们在设计数学实验课的时候就努力避免这种情况，尽量留些问题让学生自己去设计方法来解决，避免把实验课变成单纯传授计算技术的课程.

在设计数学实验内容的时候，虽然我们也有意识让学生通过实验学会一些基本的方法，但是我们并不以这些方法为线索组织课程内容.我们设计了一些能够引起学生兴趣的问题，每个实验围绕解决一个或几个问题来展开，教学生使用若干种方法来解决所给的问题，在解决问题中学习和熟悉这些方法，自己观察结果，得出结论.比如，围绕计算圆周率的近似值这一问题学习数值积分法、泰勒级数法、蒙特卡罗法、分数向无理数的最佳逼近；围绕光的折射定律和最速降线学习各种优化方法；围绕天体运动规律学习微分方程的数值解法；等等.

我们认为，尽管数学专业和非数学专业的学生的数学课程的难易程度有很大的差别，但数学实验课对他们来说却不必有多大的差别，基本的部分完全可以是共同的，只有一些理论较深的部分可以根据各自的情况有所取舍.我们在试点中的体会是，学生完成实验作业的难易主要不在于对数学知识的掌握程度，而是运用计算机能力的差别.我们感到，开设数学实验课以二年级为宜，让学生学过高等数学中必要的基本概念即可，不必学过很多的数学定理.这样，就可以有比较多的未知的东西供他们去探索.已学的东西太多，学生对探索的兴趣反而下降.实际上，选修我们课程的也有很多一年级学生，其中也有许多人的作业做得很好.因此，在一年级下学期开设这门课程也是可以的.

我们设想，数学实验可以包括两部分主要内容：第一部分是基础部分，围绕高等数学的基本内容，让学生充分利用计算机及软件的数值功能和图形功能展示基本概念与结论，去体验如何发现、总结和应用数学规律.另一部分是高级部分，以高等数学为中心向边缘学科发散，可涉及到微分几何，数值方法，数理统计，图论与组合，微分方程，运筹与优化等，也可涉及到现代新兴的学科和方向，如分形、混沌等.这部分的内容可以是新的，但不必强调完整性，教师介绍一点主要的思想，提出问题和任务，让学生尝试通过自己动手和观察实验结果去发现和总结其中的规律.即使总结不出来也没有关系，留待将来再学，有兴趣的可以自己去找参考书寻找答案.比如我们设计了一个实验让学生画分形的图形.这些图形的画法很简单，但画出来的结果却让学生感到神奇，引

起他们极大的兴趣,很多学生自己到图书馆找了有关分形的参考书来看.

二.关于数学实验课与一些相关课程的差别和联系,我们有如下看法:

与计算方法、统计方法、优化方法等课程的区别和联系:数学实验课尽管也要介绍和用到数值计算方法、统计方法、优化方法,但是不应取代这些课程.否则,学生会失去兴趣,认为反正还要上这些课程,何必上数学实验课呢?为划清这一界限,我们主张,数学实验课所用到的方法应当比较简单和浅显,可以由高等数学课程中的内容很快推出来,(其推导难度只应相当于高等数学作业题),而不需要花时间和精力作专门的讲解.而关于专门的、比较精细的专门方法的讲解,则留给这些课程去完成.当然,这些课程本身也应改革,不能纸上谈兵,也应有学生自己动手实践作为重要环节.

与数学建模课的区别和联系:数学建模与数学实验课都要用到计算机.但数学建模课是让学生学会利用数学知识和计算机手段来解决实际问题,而数学实验课侧重于在计算机的帮助下学习数学知识.一个是用,一个是学,两者的目标不同.从选材来说,我们主张两者都要从问题出发而不从概念出发.但数学建模强调问题的实用性而不强调普遍意义,解决问题本身就是目的;而数学实验课可以从理论问题出发,也可由实际问题出发,但这个理论问题或实际问题最好是比较经典的、具有普遍意义,让学生以解决问题为线索总结规律,学到知识.当然,数学实验课可以作为数学建模课的预备课程,使学生可以更快地掌握数学建模的基本方法和机能.

与高等数学课的区别和联系:都是为了学知识,但学习方法很不相同.高等数学课主要是由教师传授知识,而数学实验课则希望通过学生自己动手和观察去体会这些知识是怎样得出来的.

与计算机课程的联系:对于非计算机专业的学生来说,计算机知识(包括计算机语言以及软件的使用等)只是一种工具.好比学语言,不能只停留于学一个个的单字和一条条的语法规则,而必须通过阅读课文来学.并且,学了就要用,就要读报纸,读小说等.教计算机语言也是这样,应当结合解决一定的问题来学,学了就要用来解决问题,才有兴趣学,才能学得会,才不会忘记.但现在大学里的计算机语言课有时和其它课程(特别是数学课程)脱节,导致很多学生学习计算机语言也只是为了得学分,考过了就忘了,到高年级真需要用的时候还得重新复习.开设数学实验课有助于改变这种状况.数学实验课逼迫学生学好计算机知识来解决数学问题,数学实验课又为计算机课程提供了大量真刀真枪的练习机会.二者的结合势必真正提高学生对于计算机知识的掌握水平和应用的能力,使计算机课程可以用更少的课时取得更好的效果.

数学实验课的开设,不但本身就是高等数学课程体系的一项改革,而且必将促进其它许多相关课程的改革.

三. 使用本书的注意事项:

本书可以说是像《聊斋》而不像《三国演义》,不强调系统性,各个实验基本上是独立的. 后面的实验一般不会用到前面的实验的知识,(但也有几个例外). 实验安排的顺序基本上是由易到难,基础内容在前,较高级的扩散性的内容在后(但也不是绝对的). 虽然内容的编排实际上还是有一定的系统性,但我们并不强调这一系统性. 我们强调的是从问题出发,自己动手做,自己观察结果,并且鼓励学生自己发明出新的实验.

因此,在使用本书时,不必按顺序从头到尾依次做各个实验,更不必全部做. 可以根据各学校和学生的情况选做其中一部分实验. 我们自己的做法是: 每两周做一个实验,整个课程做 8 个到 9 个实验. 也可以老师讲 8 到 9 个实验,但只要求学生在一学期中完成 4 个到 5 个实验,并且欢迎他们以后自己完成更多的实验. 有些学校暂时没有时间完整开设数学实验课,可以先在高等数学课中结合课程内容安排做某些实验,甚至可以在计算机课程中作为作业安排做某些实验. 总之,只要认真去做,做一个实验就有一分收获.

在每次实验中,我们的作法是先由教师讲两个课时,主要是提出问题,适当介绍问题的背景,介绍主要的实验原理和方法. 然后就让学生自己动手去做,自己去折腾,去观察,通过观察得出结论. 本来,实验结果一般都可以用理论推导出来,但这绝不是本课程的目的,教师千万不要花很多时间去作这种理论推导,最好也不要预先告诉学生实验的结果,实验结果让学生自己去观察得出. 本书在某些实验后面作为附录作了这种推导,只是为了供有兴趣的学生课外阅读之用,决不是供教师讲解的教材,也不作为课程要求和考察内容,更不要以考试为手段强迫那些不感兴趣的学生去弄懂. 在我们的试点中,有的学生希望少讲一些理论,多给他们留一些自己探索的空间,也有的学生希望多讲一些理论. 我们说:能够通过实验使学生希望多学理论,这就是好事情. 将他们学习数学理论的兴趣激发起来了,胃口吊起来了,这门课的目的就达到了. 数学实验是"开胃汤",而不是大餐. 胃口吊起来之后希望多"吃"一些,请到正规的"餐馆"去,学生可以通过看参考书和学习其它课程来满足对于理论学习的渴求.

本书各实验大体上以 Mathematica 软件作为主要使用的软件,并且在一些实验后面附上了 Mathematica 程序供参考,以避免学生或老师在计算机方面花费太多的时间,冲淡了探索数学内容的趣味. 但这并不意味着本书的实验只能用 Mathematica 去做,更不意味着没有 Mathematica 就不能做这些实验. 实际上,课本中对于计算机的要求也是相当开放的,实验方法的叙述和建议着重于数学思路,这些思路可以用 Mathematica 来实现,也可以用别的软件或自己编程完成.

我们的试点课没有专门的考试，评定成绩的唯一依据是平时的实验报告．实验报告的评分的最基本标准是要自己动手，要写上自己观察到的现象并进行分析．实话实说，不能造假．哪怕观察到的现象与预计不一致，或者与理论推导的结果不一致，也不能在实验报告中说假话，而应当分析其原因，找出改进的办法，重做实验，重新得出结论．对实验报告的更高的标准是创造性．对于有创造性的报告，要给以高分作为鼓励．教师批改了实验报告之后，要在下一次实验开始时，对以前的实验中出现的优点和缺点进行评讲，包括让学生参加讨论．

以上是我们对于开设数学实验课的想法和作法，本书则是这些想法和做法的物化和固化．数学实验课的开设在我国还是一件新的事情，处于摸索阶段．怎样开设，势必有许多不同的想法和作法．我们认为，现阶段应当鼓励各种不同的想法和作法，各自进行自己的探索和试点．可以而且应当相互交流，但不必统一，也不必争论哪种做法更好．现在首先是要先干起来，经过若干年实践去积累和总结经验，根据实践的效果来逐渐完善和成熟．

由于时间比较仓促，我们自己的试点还很不完善，本书的写作中的不完善和疏漏之处一定不少．现在的这本书只能算个毛坯，先供自己和大家使用起来，在使用中改进．希望在不久的将来能将本书改得更好．

感谢两个教改课题组的负责人萧树铁教授和姜伯驹教授，正是在他们的领导下才使我们开始了数学实验的教改试点，才有可能产生这本书．数学实验课程试点的成功，还离不开中国科技大学和数学系的领导的支持，以及学校各部门、特别是教务部门的支持，他们对教育改革的一贯支持，以及在全校范围内造成的搞教改的热烈而宽松的气氛，是我们作出成绩的重要保证．感谢数学系王树禾教授、侯定丕教授参加试点和讲课，感谢选修这门课程的广大学生，正是他们的积极认真地参与，才使得我们开设数学实验课的试点搞得有声有色，使本书的指导思想和内容得以形成和完善．

在本书的写作过程中，我们参考了由 Mount Holyoke College（美）编写的、清华大学白峰杉和蔡大用翻译的、高等教育出版社与施普林格出版社合作出版的《数学实验室》一书，并且受到启发．在此感谢该书的作者、译者和出版者．

作　者

1999 年 6 月于合肥

**责任编辑** 邵　勇
**封面设计** 张　楠
**责任绘图** 孟庆祥　陈钧元
**版式设计** 邵　勇
**责任校对** 李　陶
**责任印制** 杨　明

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

# 目　录

# 实验一　微积分基础

本实验的目的是:学习使用 Mathematica 的一些基本功能来验证或观察得出微积分学的几个基本结论.

Mathematica 是一个符号计算系统.它可以帮助你很容易进行初等数学和高等数学中的数值计算、符号计算、画图等各种事情.

## 1.1　函数及其图象

Mathematica 画区间 $[a,b]$ 上的函数 $y=f(x)$ 的图象的语句的格式是:

**Plot[f,{x,a,b}]**

画参数方程 $x=f(t),y=g(t)$ ,$t\in[a,b]$ 所表述的曲线的语句的格式是:

**ParametricPlot[{f,g},{t,a,b}]**

**练习 1**

(1)在同一坐标系里作出函数 $y=x^3-6x+2$ 及其导函数 $y'=3x^2-6$ 的图象.Mathematica 语句如下:

**Plot[x ^ 3 − 6 x + 2,3 x ^ 2 − 6,{x, − 5,5}]**

注:这里画的是区间 $[-5,5]$ 上的图象.你也可选别的区间试试.

观察以下现象:

(i)当 $y'>0$, $<0$ 时 $y$ 的图象的升降情况.当 $y'=0$ 时 $y$ 是否有极大值或极小值?

(ii)当 $y'$ 上升或下降时 $y$ 的图象的凸凹情况.当 $y'$ 取极值时 $y$ 的图象是

否出现拐点？

(iii)观察得出方程 $y=0$ 的根的近似值 $a$，比如 $a=2$．再用以下语句求2附近的根的更精确的值：

```
FindRoot[x^3 - 6 x + 2,{x,2}]
```

求根的原理是：将函数 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 附近看作一次函数 $y\approx f(a)+f'(a)(x-a)$，其中 $f'(a)=3a^2-6$ 是 $y$ 在 $x=a$ 处的导数值．认为一次方程 $f(a)+f'(a)(x-a)=0$ 的解

$$a_1=a-\frac{f(a)}{f'(a)}$$

是比 $a$ 更好的近似值．用它代替 $a$ 再求出根的更好的近似值．这个方法叫做**牛顿切线法**．本例中由 $a$ 求 $a_1$ 的过程可以用下面的语句来定义：

```
g[a_]:=a - (a^3 - 6 a + 2)/(3 a^2 - 6)
```

这里在定义函数 $g$ 时用 **a_** 代表变量 **a** 是等待在应用时将 **a** 代入具体值．从初始值2出发用函数 $g$ 求根时，先求 $g(2)$，再求 $g(g(2))$，再求 $g(g(g(2)))$，…．直到得到一个数 $a_0$ 使 $g(a_0)=a_0$，即 $f(a_0)=0$，$a_0$ 就是所求的根．在 Mathematica 中，将函数 $g$ 对2连续作用若干次（比如作用4次），并且列出每次作用的结果，可以用下面的语句实现

```
NestList[g,2,4]
```

(iv)观察得出使函数 $y$ 取极大或极小值的 $x$ 值的近似值 $x_0$，再用以下语句求 $x_0$ 附近的极大或极小值点的更精确的值．

```
FindMinimum[x^3 - 6 x + 2,{x,x0}]
```

另选函数 $y=f(x)$ 研究上述问题．

(2) 分别作出函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在区间 $[-1,1]$，$[-0.1,0.1]$，$[-0.01,0.01]$ 的图象，观察图象在 $x=0$ 附近的形状．

在同一坐标系中作出点集 $t=\{(1/k,\sin k)\mid 1\leqslant k\leqslant 2\,000\}$，观看点集中隐藏了什么图象．Mathematica 作图语句为：

```
t = Table[{1/k,Sin[k]},{k,1,2000}]  (* 定义点集 t.)
ListPlot[t]  (* 画出点集 t 中所有的点.)
ListPlot[t,PlotJoined -> True]  (* 画出 t 中的点依次连接成的光滑曲线.)
```

注:圆括号中星号 * 后面是对语句作用的说明.

(3)作出函数 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 在区间 $[-0.1,0.1]$ 上的图象,观察图象在 $x=0$ 附近的形状.

**练习 2**

级数与无穷乘积.

(1)在同一坐标系里作出函数 $y=\sin x$ 和它的 Taylor 展开式的前几项构成的多项式函数 $y=x-\dfrac{x^3}{3!}, y=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!},\cdots$ 的图象.观察这些多项式函数的图象向 $y=\sin x$ 的图象逼近的情况.

(2)分别取 $n=10,20$,画出函数 $y=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x$ 在区间 $[-3\pi,3\pi]$ 上的图象.当 $n\to\infty$ 时,这个函数趋向于什么函数?

(3)分别取 $n=5,10,15$,在同一坐标系里作出函数 $f(x)=\sin x$ 与 $p(x)=x\cdot\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\dfrac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$ 在区间 $[-2\pi,2\pi]$ 上的图象,观察当 $n$ 增加时 $p(x)$ 的图象向 $\sin x$ 的图象逼近的现象.注意函数 $p(x)$ 的根 $\pm k\pi$ ( $k=0,1,2,\cdots,n$ )也都是 $f(x)$ 的根,且两个函数在 $x=0$ 处的导数相同.在任何有限区间上,当 $n\to\infty$ 时函数 $p(x)$ 逼近 $\sin x$.

完成练习 2 的三项作图任务的 Mathematica 语句分别是:

```
s[x_,n_]:= Sum[(-1)^(k-1)x^(2k-1)/((2k-1)!),
          {k,1,n}]
Plot[{Sin[x],s[x,2],s[x,3],s[x,4]},{x,-2Pi,2Pi}]
f[x_,n_]:= Sum[Sin[k*x]/k,{k,1,n,2}]
Plot[f[x,10],{x,-2Pi,2Pi}]
p[x_,n_]:= x*Product[1-x^2/(k^2Pi^2),{k,1,n}]
Plot[{Sin[x],p[x,5]},{x,-2Pi,2Pi}]
```

以上语句中的 s[x,2]… 等可以换成 s[x,5]… 等，f[x,10]，p[x,5] 可以换成 f[x,20]，p[x,10]，p[x,15] 等.

## 1.2　数 e

中学学的对数以 10 为底，称为常用对数，记作 $\lg N$. 但科学上常用的对数却以一个无理数 $e = 2.718\,28\cdots$ 为底，称为自然对数，记作 $\ln N$ 或 $\log N$. 为什么以这个稀奇古怪的无理数 e 为底的对数反而比以 10 为底的对数更自然？

公元 17 世纪纳皮尔(J. Napier)发明对数时，其目的是简化天文数据的计算，将乘法转化为加法来计算. 它希望将每个正实数 $N$ 表示为某个给定的正实数 $a$ 的幂：$N = a^n$. 如果 $N = a^n, M = a^m$，则 $M \cdot N = a^{m+n}$，$M, N$ 的乘法变成了 $m, n$ 的加法. 问题是必须预先编制一个表，也就是对数表，列出幂(即真数) $N$ 与指数(即对数) $n$ 之间的对应关系. 如果以 10 为底，则对数表是下面的样子：

| 幂(真数) | 1 | 10 | 100 | 1 000 | … |
|---|---|---|---|---|---|
| 指数(对数) | 0 | 1 | 2 | 3 | … |

表中的真数跳跃太大. 比如，1 过了就是 10，而它们之间的 2, 3, …, 9 都没有. 以后从10跳到100，从 100 跳到1 000，跨度就更大了. 要克服这个缺点，使表中相邻两个真数比较接近，就应当取底 $a$ 接近于 1. 比如取 $a = 1.001$ (纳皮尔取 $a = 0.999\,99$，以便于计算三角函数). 如果你愿意，可以自己编制一个以 $a = 1.001$ 为底的对数表，列出以 $n = 1, 2, \cdots, 1\,000$ 为指数的所有的幂. 如果你嫌这个表太长了，可以不列出这样多的幂，而按下面的练习去做.

**练习 3**

(1) 编制以 $a = 1.001$ 为底的对数表，在表中列出 $a$ 的 1, 2, 3, …, 9, 10, 20, …, 90, 100, 200, …, 900, 1 000, 2 000, …, 9 000, 10 000 次幂.

利用你编制这个表可对满足条件 $1 \leqslant N \leqslant a^{10\,000}$ 的实数 $N$ 求出 $b = \log_a N$. 方法如下：先查出使 $N_3 = a^{1\,000 n_3} \leqslant N$ 的最大整数 $n_3$；计算 $\lambda_2 = N/N_3$，查出使 $N_2 = a^{100 n_2} \leqslant \lambda_2$ 的最大整数 $n_2$；计算 $\lambda_1 = \lambda_2/N_2$，查出使 $N_1 = a^{10 n_1} \leqslant \lambda_1$ 的最大整数 $n_1$；计算 $\lambda_0 = \lambda_1/N_1$，查出使 $N_0 = a^{n_1} \leqslant \lambda_0$ 的最大整数 $n_0$. 则 $b_0 = n_0 + 10n_1 + 100n_2 + 1\,000n_3$ 是 $b = \log_a N$ 的不足近似值，误差 $< 1$. 还可以稍微估计一下 $b$ 的小数部分 $b - b_0$. 为此，计算 $\lambda_{-1} =$

$\lambda_0/N_0$，则 $1 \leqslant \lambda_{-1} < a = 1.001$．在很小的区间 $[0, 0.001]$ 内近似地将指数函数 $y = f(x) = 1.001^x$ 看作一次函数，则由 $f(0) = 1$，$f(1) = 1.001$ 可得 $f(x) \approx 1 + 0.001x$．解方程 $\lambda_{-1} = 1.001^x \approx 1 + 0.001x$ 可得近似解 $x \approx (\lambda_{-1} - 1)/0.001$．于是 $b \approx b_0 + (\lambda_{-1} - 1)/0.001$．

利用你编制的对数表，用上述方法求 $b_1 = \log_a 2$ 和 $b_2 = \log_a 10$ 的近似值，由此求出 $\lg 2$ 的近似值 $b_1/b_2$．

不难看出，用接近于 1 的 $a = 1.001$ 为底编制对数表要比以 10 为底优越．唯一的美中不足是求出来的对数的数值都太大．这个缺点很容易改正：只要将所有的对数缩小同一个倍数就行了．鉴于 $a = 1 + 1/1\,000$，很自然考虑将所有的对数除以 1 000，取 $0.001\log_{1.001}N$ 代替 $\log_{1.001}N$．这样一来，原先对数为1 000的数 $a_3 = 1.001^{1\,000}$ 的对数变为 1，而 $0.001\log_{1.001}N$ 恰是以 $a_3$ 为底的对数．相当于一开始就取了 $a_3 = 1.001^{1\,000}$ 来作为对数的底．如果要提高精确度，可以取更接近 1 的1.000 1来代替1.001，也就是取 $a_4 = 1.000\,1^{10\,000}$ 来作为对数的底，还可以进一步取 $a_5 = 1.000\,01^{100\,000}$ 作为对数的底．一般，可以考虑 $a_n = (1 + 1/n)^n$ 作为对数的底，$n$ 越大越好．

**练习 4**

观察当 $n$ 趋于无穷大时数列 $a_n = (1 + 1/n)^n$ 和 $A_n = (1 + 1/n)^{n+1}$ 的变化趋势：

(1)求出当 $n = 10^m$，$m = 1, 2, \cdots, 7$ 时 $a_n, A_n$ 的值．观察变化趋势．

计算 $a_n$ 的 Mathematica 语句为

```
Do[Print[(1 + 10^(-m))^(10^m)],{m,1,7}]
```

计算 $A_n$ 的语句类似．

(2)在同一坐标系中画出下面三个函数的图象：

$$y = (1 + 1/10^x)^{10^x}, \quad y = (1 + 1/10^x)^{10^x+1}, \quad y = \mathrm{e}$$

观察当 $x$ 增大时图象的走向．

Mathematica 画图语句为：

```
Plot[{(1 + 10^(-x))^(10^x),
      (1 + 10^(-x))^(10^x + 1),E},{x,1,4}]
```

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com