

现代数学丛书

陈恕行 著

偏微分方程 的奇性分析

ANALYSIS OF
SINGULARITIES
FOR PARTIAL
DIFFERENTIAL
EQUATIONS

CHEN SHUXING

上海科学技术出版社

·现代数学丛书·

偏微分方程的奇性分析

陈恕行 著

上海科学技术出版社

Modern Mathematics Series

ANALYSIS OF SINGULARITIES
FOR PARTIAL
DIFFERENTIAL EQUATIONS

Chen Shuxing

Shanghai Scientific & Technical Publishers

责任编辑 赵序明

·现代数学丛书·

偏微分方程的奇性分析

陈恕行 著

上海科学技术出版社出版、发行

(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所经销 常熟市第四印刷厂印刷

南京理工排版校对公司照排

开本 787×1092 小 1/16 印张 18 插页 4 字数 231 000

1998 年 11 月第 1 版 1998 年 11 月第 1 次印刷

印数 1—1 200

ISBN 7-5323-4782-6/O·218

定价:34.20 元

本书如有缺页、错装或坏损等严重质量问题,
请向承印厂联系调换

内 容 提 要

本书系统地介绍偏微分方程的奇性分析理论,并侧重于非线性方程奇性分析问题的研究.全书共分七章.第1章先从奇性分析的经典理论入手.第2章主要讨论线性方程的情形,包括奇性传播与奇性反射问题.从第3章到第6章讨论非线性方程奇性分析的各个侧面,其中包括解的弱奇性与强奇性的传播、反射与干扰,扇状奇性结构与花状奇性结构的研究等.方程的类型也涉及半线性、拟线性和完全非线性方程.第7章介绍拟线性方程的奇性形成问题.全书内容对于偏微分方程奇性分析研究的发展、主要理论与方法,以及最新进展给出了一个全面的介绍.本书可供高等学校数学系高年级学生,研究生以及有关的科研人员参考.

**Analysis of Singularities for
Partial Differential Equations**

Chen Shuxing

Abstract

The theory on analysis of singularities for partial differential equations is systematically discussed in this book. Particularly, the study on the problems of analysis of singularities for nonlinear equations is concerned. The book contains seven chapters. The first chapter starts with the classical theory of analysis of singularities. Then Chapter 2 mainly discusses the case of linear equations, including propagation of singularities and reflection of singularities. The analysis of singularities for nonlinear equations are discussed from Chapter 3 to Chapter 6, where the propagation, reflection and interaction of weak singularities or strong singularities, and the singularity structure with different shape are discussed respectively. The related equations involve semilinear, quasilinear and fully nonlinear equations. Finally, in Chapter 7 the problem on formation of singularities for quasilinear equations is discussed. The whole book gives an overall introduction for the main theory and methods of analysis of singularities, as well as its recent development and progress. The book can be served as a reference book for graduate students, senior undergraduate students and related scientists.

《现代数学丛书》编辑委员会

名誉主编 苏步青

主 编 谷超豪

委 员 (以姓氏笔画为序)

丁夏畦 王梓坤 叶彦谦

石钟慈 冯克勤 刘应明

严志达 杨 乐 吴 方

李大潜 陈希孺 陈翰馥

张恭庆 胡和生 姜伯驹

梁友栋 曹锡华 程民德

Modern Mathematics Series
Editorial Committee

Honorary Editor-in-Chief Su Buchin

Editor-in-Chief Gu Chaohao

Members

Cao Xihua	Chen Hanfu
Chen Xiru	Cheng Minde
Ding Xiaqi	Feng Keqin
Hu Hesheng	Jiang Boju
Li Tatsien	Liang Youdong
Liu Yingming	Shi Zhongci
Wang Zikun	Wu Fang
Yan Zhida	Yang Le
Ye Yanqian	Zhang Gongqing

出版说明

从 60 年代起,由华罗庚教授任主编的《现代数学丛书》编辑委员会曾组织编著,并由我社出版了多部具有很高水平的数学学术专著,有几部专著已在国外出了外文版,受到国内外数学界和广大读者的高度重视,获得了很高的评价.原编委会中华罗庚、关肇直、吴新谋三位教授虽已先后逝世,但他们为本《丛书》所作出的贡献迄今仍为人们所敬仰、怀念.由于某些客观原因,《现代数学丛书》的出版工作曾一度停顿.

为了适应现代数学的迅速发展,更好地反映我国数学家近几年的优秀研究成果,必须大力加强《现代数学丛书》的规划、编辑、出版工作,充实编委会的力量.考虑到不少编委年事已高,经向原编委会中大部分同志及数学界有关专家广泛征求意见后,于 1990 年对编委会作了调整,补充了一些著名的中年数学家和学科带头人,建立了新的编委会,并进一步明确了本丛书的宗旨.

《现代数学丛书》新的编辑委员会由苏步青教授任名誉主编、谷超豪教授任主编,18 位著名数学家任委员.编委会负责推荐(或审定)选题和作者,主持书稿的审核等工作.

《现代数学丛书》的宗旨是:向国内外介绍我国比较成熟的、对学科发展方向有引导作用的、国内第一流水平的数学研究成果,反映我国数学研究的特色和优势,扩大我国数学研究成果的影响,促进学科的发展和国内外的学术交流.

为了实现上述宗旨,本丛书将陆续组织出版在基础数学、应用数学和计算数学方面处于学科发展前沿、有创见且具有系统完整

研究成果的现代数学学术专著.

为出版好《现代数学丛书》，我们热切地期望着数学界各位专家的大力支持和悉心指导，并欢迎广大读者提出宝贵的建议和意见.

上海科学技术出版社

引 言

在偏微分方程的理论和应用研究中,人们不仅关心一个偏微分方程或者其相应的定解问题是否有解,还往往更关心解的性质,例如解的正则性、周期性、渐近行为等等.而其中最重要的莫过于对解的正则性的了解,这是因为:

一、解的正则性告诉我们这个解是否是连续的、光滑的.如果是,那么解在一点的数值就可以代表它在该点邻近的数值.这对于定量地了解这个解,或者进行数值计算将有很大的好处.而且解的正则性通常也是研究解的其他性质,例如解的渐近行为的基础.

二、在现代偏微分方程理论研究中,人们往往将一个问题的解的存在性的证明分解成两步:第一步证明在很弱意义下(例如在分布的意义下)解的存在性,然后说明这个解就是经典意义的解;后一步的工作实际上就是对解的正则性的讨论.

三、解的正则性的反面表述就是解的奇性,而解的奇性的产生与它的分布往往是种种应用问题中所特别关心的.例如,在材料力学中,最令人关心的问题经常是应力集中或材料出现裂痕处的应力与应变状态;在化学反应问题中,解的奇性的产生往往对应于爆炸的产生;在研究空气动力学问题中,解的奇性的形成往往对应于冲击波的生成等等.特别是在波的传播问题中,解的奇性描述了波阵面,所以解的奇性的分布正可描述波的位置或波的传播过程.这些正是人们最关心的问题.

进一步的研究还发现,解的正则性与解的其他性质,以及解是

否存在、唯一等问题有密切的联系. 偏微分方程解的正则性往往用一些不等式, 即所谓正则性估计来表述, 而这些估计式在解的存在性与唯一性的讨论中也往往是至关重要的. 用泛函分析为工具来讨论偏微分方程时一般总得先规定一个解所属的空间, 这个空间实际上就蕴含了解所应具有某种正则性.

很多关于偏微分方程的专著中都有关于解的正则性和奇性的讨论, 但是专门论述这一问题的书还不多见, 本书特别强调这一问题的重要性, 将集中地介绍近年来关于偏微分方程解的正则性与奇性的研究成果, 希望它能有助于人们了解这类问题的研究概貌与主要方法, 为进入研究的前沿作准备. 考虑到在研究偏微分方程解的正则性问题时, 人们实际上更关心的是解的奇性的出现与分布, 所以将本书定名为《偏微分方程的奇性分析》. 由于双曲型方程(组)主要描述波的传播现象, 与其他各类型的方程相比, 对于它的解的奇性分析的研究一般包含更丰富的内容, 故以后我们将较多地涉及对双曲型方程的讨论, 但由于篇幅所限, 对于解出现奇性以前的性质, 例如发展型方程解的生命区间的估计等问题, 在此暂不涉及.

本书第 1 章从奇性分析的经典理论入手开始讨论, 虽然在偏微分方程的经典理论中, 关于解的奇性分析只有一些简单的结果, 但它是今后深入讨论的基础与出发点. 自从本世纪 60 年代微局部分析理论建立与发展以后, 偏微分方程的奇性分析理论方才成为一个专门的分支. 从第 2 章开始, 就逐步展开对各个专题的讨论. 其中第 2 章主要讨论线性方程的情形, 包括在区域内部解的奇性传播与在边界上解的奇性反射. 由于非线性方程的奇性分析比线性方程的情形更复杂, 内容也更丰富, 因此, 从第 3 章开始, 介绍非线性方程奇性分析研究的各个侧面, 涉及到弱奇性与强奇性的传播、反射与干扰、扇状奇性结构与花状奇性结构的研究等各类问题. 在讨论这些问题时, 对于半线性方程与一般非线性方程, 所用的处理方法是完全不同的. 最后, 在第 7 章, 特别介绍拟线性方程的奇性形成问题. 虽然目前对这个问题的系统研究成果较少, 但我

们相信此类研究不久将有较快的发展.

偏微分方程的奇性分析理论的研究涉及很多现代分析工具,微局部分析的许多基本知识对本书所讨论的问题都是需要的.由于本书篇幅所限,当然不可能对此全部加以介绍.在本书中对这些内容作了不同的处理.由于拟微分算子的基本理论已在许多偏微分方程的著作中有介绍,并为人们所熟悉,故在本书中不再详细地叙述其基本理论,而是直接应用有关的结果.对于仿微分算子的理论,则在附录中作一扼要的回顾.对于二次微局部分析理论,将在第4章中作较详细的介绍.

由于近二三十年中偏微分方程奇性分析理论的迅速发展,与该方向有关的成果与文献极为丰富,方法各异.为了使读者了解该理论的核心思想与发展的主要线索,我们只能对部分典型问题作详细的叙述与证明.有些问题虽然重要,所得到的结果也很精彩,但由于其证明技巧性很强,往往为解决一个问题就需要作许多技术上的准备,因而无法在本书有限的篇幅中展开.对此,我们只能简单地介绍在这些方面已取得的结果与进展,甚至不得不割爱.此外,我们强调指出,对于偏微分方程解的奇性的研究是有明确的实际背景的,虽然由于现代分析工具的引入,使有些问题的提法与结论显得较为抽象.因此,在本书中将提供一些对一般结论的解释以及对一些实例的讨论,希望它能有助于读者对理论实质的理解与对一般结论应用的兴趣.为了便于阅读,在介绍一些已有成果时,本书对很多材料作了重新的处理.其中也包含了作者本人近年来的部分研究成果.由于作者的知识与水平所限,本书有许多不妥之处,恳切希望读者指正.

在本书出版之际,作者借此机会对导师谷超豪教授多年的指导与关心表示由衷的感谢,本书的写成也是导师长期教导的结果.作者还深深感谢周围许多老师和同行们在学习与研究偏微分方程理论中所给予的指导与帮助,其中特别是王柔怀教授和齐民友教授,他们在学术上对作者的启迪,使作者得以进入微局部分析的研究领域,进而写作本书.此外,在本书写作过程中得到国家自然科

学基金和国家教委博士点基金的资助,在此一并表示诚挚的感谢.

陈恕行

1997年12月于复旦大学

目 录

引言

第 1 章 奇性分析问题研究的引入	1
§ 1.1 经典的奇性传播定理	1
§ 1.2 向现代理论过渡	10
第 2 章 线性方程的奇性分析	15
§ 2.1 波前集	15
§ 2.2 主型方程的奇性传播定理	26
§ 2.3 奇性在边界上的反射	35
§ 2.4 进一步讨论的问题	50
第 3 章 半线性方程的奇性分析	56
§ 3.1 $2s$ 弱奇性传播定理	56
§ 3.2 $3s$ 弱奇性传播定理	65
§ 3.3 奇性干扰与奇性指标	73
§ 3.4 余法奇性的传播	86
§ 3.5 余法奇性的干扰	95
第 4 章 二次微局部分分析与三叉干扰	108
§ 4.1 重二进分解	108
§ 4.2 二次微局部算子	121
§ 4.3 奇性传播与三叉干扰	130
第 5 章 完全非线性方程的奇性传播定理	144
§ 5.1 主型方程的奇性传播定理	144
§ 5.2 完全非线性方程的余法奇性传播	153
第 6 章 非线性方程强奇性的传播	164

§ 6.1	半线性方程具扇状奇性结构的解	165
§ 6.2	半线性方程具花状奇性结构的解	176
§ 6.3	半线性方程的 δ 波	189
§ 6.4	拟线性方程的强奇性解	196
第 7 章	拟线性方程激波的形成	208
§ 7.1	单个方程的情形	208
§ 7.2	2×2 方程组的情形	223
附 录	仿微分算子的回顾	249
参考文献		261

CONTENTS

Preface

Chapter 1 Start of the study on analysis of singularities	1
§ 1.1 The classical results on propagation of singularities	1
§ 1.2 Towards modern theory	10
Chapter 2 Analysis of singularities for linear equations	15
§ 2.1 Wave front sets	15
§ 2.2 Theorem of propagation of singularities for principal type equations	26
§ 2.3 Reflection of singularities on boundary	35
§ 2.4 Further problems	50
Chapter 3 Analysis of singularities for semilinear equations	56
§ 3.1 Theorem on propagation of 2s weak singularities	56
§ 3.2 Theorem on propagation of 3s weak singularities	65
§ 3.3 Interaction of singularities and singularity index	73
§ 3.4 Propagation of conormal singularities	86
§ 3.5 Interaction of conormal singularities	95
Chapter 4 Second microlocalization and triple interaction	108
§ 4.1 Double dyadic decomposition	108
§ 4.2 Second microlocal operators	121
§ 4.3 Propagation of singularities and triple interaction	130
Chapter 5 Propagation of singularities for fully nonlinear	