题解中心

三角法辞典

薛德炯 吴载耀 编译

上海科学技术出版社

题解中心

三角法辞典

〔日本〕長澤龜之助原著
薛德炯　吳載耀　編譯

上海科学技术出版社

题解中心
三角法辞典
〔日本〕长泽龟之助 原著
薛德炯 吴载耀 编译
上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
新华书店上海发行所发行 江西印刷公司印刷
开本787×1092 1/32 印张29.125 插页4 字数830,000
（原新亚科技版共印33,500册 1935年第1版）
1959年10月新1版 1981年4月第3次印刷
印数：16,501—151,500
统一书号：17119·11 定价：4.00元
限国内发行

內容提要

本書为"数学辞典"的第四册，內容分平面三角法解法之部，球面三角法解法之部，名詞之部，三角法小史等四門，載有題解3,354題，插图460个，卷首附有三角公式集，三首法諸表，卷末附有英汉名詞对照表，全書約計830千字，附刊題解分类索引，記述简明，易于查引。

本書出版于1935年，內容不尽正确，但为了目前各方面有需要，仍以旧版重印，供各地中、小学教师作备課时的参考。

I. 三角法公式集 平面

測 角 法

⊙度與法度之比較.

$$D=G-G/10,\quad G=D+D/9.$$

⊙分與法分之關係. $27\mu=50m.$

⊙秒與法秒之關係. $81\sigma=250s.$

⊙度與弧度之比較. $180\theta=\pi x.$

⊙法度與弧度之比較. $200\theta=\pi y.$

三角函數之定義

⊙$\sin A=\dfrac{垂線}{斜邊}.$ ⊙$\operatorname{cosec}A=\dfrac{斜邊}{垂線}.$

⊙$\cos A=\dfrac{底邊}{斜邊}.$ ⊙$\sec A=\dfrac{斜邊}{底邊}.$

⊙$\tan A=\dfrac{垂線}{底邊}.$ ⊙$\cot A=\dfrac{底邊}{垂線}.$

⊙$\operatorname{vers}A=1-\cos A.$ ⊙$\operatorname{covers}A=1-\sin A.$

三角函數之基本關係

⊙$\sin A\times\operatorname{cosec}A=1.$ ⊙$\sin^2A+\cos^2A=1.$

⊙$\cos A\times\sec A=1.$ ⊙$\sec^2A=1+\tan^2A.$

⊙$\tan A\times\cot A=1.$ ⊙$\operatorname{cosec}^2A=1+\cot^2A.$

⊙$\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}.$ ⊙$\cot A=\dfrac{\cos A}{\sin A}.$

⊙$\sin A<\tan A<\sec A.$

⊙$\cos A<\cot A<\operatorname{cosec}A.$

餘角之三角函數

⊙$\sin(90^\circ-A)=\cos A.$

⊙$\cos(90^\circ-A)=\sin A.$

⊙$\tan(90^\circ-A)=\cot A.$

註意 cosec A, sec A, cot A 分別為 sin A, cos A, tan A 之逆數,故從略.

補角之三角函數

⊙$\sin(180^\circ-A)=\sin A.$

⊙$\cos(180^\circ-A)=-\cos A.$

⊙$\tan(180^\circ-A)=-\tan A.$

負角之三角函數

⊙$\sin(-A)=-\sin A.$

⊙$\cos(-A)=\cos A.$

⊙$\tan(-A)=-\tan A.$

90°+A 之三角函數

⊙$\sin(90^\circ+A)=\cos A.$

⊙$\cos(90^\circ+A)=-\sin A.$

⊙$\tan(90^\circ+A)=-\cot A.$

$180°+A$ 之三角函數

◉$\sin(180°+A)=-\sin A.$

◉$\cos(180°+A)=-\cos A.$

◉$\tan(180°+A)=\tan A.$

$270°-A$ 之三角函數

◉$\sin(270°-A)=-\cos A.$

◉$\cos(270°-A)=-\sin A.$

◉$\tan(270°-A)=\cot A.$

$270°+A$ 之三角函數

◉$\sin(270°+A)=-\cos A.$

◉$\cos(270°+A)=\sin A.$

◉$\tan(270°+A)=-\cot A.$

$360°-A$ 之三角函數

◉$\sin(360°-A)=-\sin A.$

◉$\cos(360°-A)=\cos A.$

◉$\tan(360°-A)=-\tan A.$

二角之三角函數

◉$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B.$

◉$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B.$

◉$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$

◉$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B.$

◉$\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}.$

◉$\tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}.$

◉$\cot(A+B)=\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}.$

◉$\cot(A-B)=-\dfrac{\cot A\cot B+1}{\cot A-\cot B}.$

◉$\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B.$

◉$\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B.$

◉$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B.$

◉$\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B.$

◉$\sin C+\sin D=2\sin\dfrac{C+D}{2}\cos\dfrac{C-D}{2}.$

◉$\sin C-\sin D=2\cos\dfrac{C+D}{2}\sin\dfrac{C-D}{2}.$

◉$\cos C+\cos D=2\cos\dfrac{C+D}{2}\cos\dfrac{C-D}{2}.$

◉$\cos C-\cos D=-2\sin\dfrac{C+D}{2}\sin\dfrac{C-D}{2}.$

三角之三角函數

◉$\sin(A+B+C)$

$=\sin A\cos B\cos C+\cos A\sin B\cos C$

$+\cos A\cos B\sin C-\sin A\sin B\sin C.$

◉$\cos(A+B+C)$

$=\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C$

$-\sin A\cos B\sin C-\sin A\sin B\cos C.$

◉$\tan(A+B+C)=(\tan A+\tan B+\tan C$

$-\tan A\tan B\tan C)/(1-\tan A\tan B$

$-\tan B\tan C-\tan C\tan A).$

◉$\cot(A+B+C)=(\cot A\times\cot B\times\cot C$

$-\cot A-\cot B-\cot C)/(\cot B\cot C$

$+\cot C\cot A+\cot A\cot B-1).$

◉若 $A+B+C=90°$，則

$1=\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A.$

$\cot A\cot B\cot C=\cot A+\cot B+\cot C.$

◉若 $A+B+C=180°$，則

$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$

$\cot B\cot C+\cot C\cot A+\cot A\cot B=1.$

倍角之三角函數

◉$\sin 2A=2\sin A\cos A.$

◉$\cos 2A=\cos^2A-\sin^2A$
$=2\cos^2A-1=1-2\sin^2A.$

◉$\tan 2A=\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2A}.$

◉$\cot 2A=\dfrac{\cot^2A-1}{2\cot A}.$

◉$\sin 3A=3\sin A-4\sin^3A.$

◉$\cos 3A=4\cos^3A-3\cos A.$

◉$\tan 3A=\dfrac{3\tan A-\tan^3A}{1-3\tan^2A}.$

◉$\cot 3A=\dfrac{\cot^3A-3\cot A}{3\cot^2A-1}.$

分角之三角函數

◉$\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{2}}.$

◉$\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{2}}.$

◉$2\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}\pm\sqrt{1-\sin A}.$

◉$2\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}\mp\sqrt{1-\sin A}.$

◉$\sqrt{2}\sin\left(\frac{A}{2}+45°\right)=\pm\sqrt{1+\sin A}.$

◉$\sqrt{2}\cos\left(\frac{A}{2}+45°\right)=\pm\sqrt{1-\sin A}.$

◉$\tan\frac{A}{2}=(-1\pm\sqrt{1+\tan^2A})/\tan A$
$=(-1\pm\sec A)\cot A.$

普偏角之三角函數

◉$\cos(n\cdot 360°\pm A)=\cos A.$

◉$\sin\{n\cdot 180°+(-1)^nA\}=\sin A.$

◉$\tan(n\cdot 180°+A)=\tan A.$

三角形四邊形等

◉$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}.$

$$\left.\begin{aligned}&◉a=b\cos C+c\cos B\\&◉b=c\cos A+a\cos C\\&◉c=a\cos B+b\cos A\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}&◉a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\\&◉b^2=c^2+a^2-2ca\cos B\\&◉c^2=a^2+b^2-2ab\cos C\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}&◉\cos A=(b^2+c^2-a^2)/2bc\\&◉\cos B=(c^2+a^2-b^2)/2ca\\&◉\cos C=(a^2+b^2-c^2)/2ab\end{aligned}\right\}$$

次式中假定 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

$$\left.\begin{aligned}&◉\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\\&◉\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}\\&◉\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}&◉\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\\&◉\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}\\&◉\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}\end{aligned}\right\}$$

◉$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$
◉$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$
◉$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$

◉$(b+c)\sin\frac{1}{2}A=a\cos\frac{1}{2}(B-C)$
◉$(c+a)\sin\frac{1}{2}B=b\cos\frac{1}{2}(C-A)$
◉$(a+b)\sin\frac{1}{2}C=c\cos\frac{1}{2}(A-B)$

◉$\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}=\tan\frac{B-C}{2}$
◉$\frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2}=\tan\frac{C-A}{2}$
◉$\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}=\tan\frac{A-B}{2}$

◉$\sin A=\frac{2\Delta}{bc}$. $\sin B=\frac{2\Delta}{ca}$. $\sin C=\frac{2\Delta}{ab}$
但 $\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

◉$r=(s-a)\tan\frac{A}{2}$. $r_1=s\tan\frac{A}{2}$
◉$r_2=s\tan\frac{B}{2}$. $r_3=s\tan\frac{C}{2}$

◉至 a 之中線 $=\frac{1}{2}\sqrt{(b^2+c^2+2bc\cos A)}$.

◉角 A 之內二等分線 $=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$

◉角 A 之外二等分線 $=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b\sim c}$

◉$\Delta=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{b^2\sin A\sin C}{2\sin B}$
$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=rs$
$=r_1(s-a)=r_2(s-b)=r_3(s-c)$
$=\frac{1}{2}h_a a=\frac{abc}{4R}$.

◉圓之內接四邊形之面積
$=\sqrt{\{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)\}}$.

◉任意四邊形之面積
$=\sqrt{\left\{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\times\cos^2\frac{A+C}{2}\right\}}$.

◉外切四邊形之面積 $=\sqrt{abcd}\cdot\sin\frac{A+C}{2}$.

◉內接且外切四邊形之面積 $=\sqrt{abcd}$.

◉正多角形之邊心距 $r=a/2\tan\frac{\pi}{n}$.

◉正多角形之半徑 $R=a/2\sin\frac{\pi}{n}$.

◉同面積 $=\frac{n}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{n}=nr^2\tan\frac{\pi}{n}$.

De Moivre 氏定理

◉$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$.

◉$\cos\alpha=1-\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}-\frac{\alpha^6}{6!}+\cdots\cdots$.

◉$\sin\alpha=\alpha-\frac{\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^5}{5!}-\frac{\alpha^7}{7!}+\cdots\cdots$.

三角函數之展開

◉$\sin n\theta=n\sin\theta-\frac{n(n^2-1)}{3!}\sin^3\theta+\frac{n(n^2-1)(n^2-3^2)}{5!}\sin^5\theta\cdots\cdots$,

◉$\cos n\theta=\cos\theta\left\{1-\frac{n^2-1}{2!}\sin^2\theta+\frac{(n^2-1)(n^2-3^2)}{4!}\sin^4\theta-\cdots\cdots\right\}$.

三角函數之指數值

◉$\cos\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})$.

◉$\sin\theta=\frac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})$.

◉$i\tan\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}$.

級數之和

$\cos\alpha+\cos(\alpha+2\beta)+\cos(\alpha+4\beta)+\cdots+\cos\{\alpha+2(n-1)\beta\}=\dfrac{\cos\{\alpha+(n-1)\beta\}\sin n\beta}{\sin\beta}.$

$\sin\alpha+\sin(\alpha+2\beta)+\sin(\alpha+4\beta)+\cdots+\sin\{\alpha+2(n-1)\beta\}=\dfrac{\sin\{\alpha+(n-1)\beta\}\sin n\beta}{\sin\beta}.$

$\cos\alpha+\cos\left(\alpha+\dfrac{2\pi}{n}\right)+\cos\left(\alpha+\dfrac{4\pi}{n}\right)+\cdots\cdots+\cos\left\{\alpha+\dfrac{2(n-1)\pi}{n}\right\}=0.$

$\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\dfrac{2\pi}{n}\right)+\sin\left(\alpha+\dfrac{4\pi}{n}\right)+\cdots\cdots+\sin\left\{\alpha+\dfrac{2(n-1)\pi}{n}\right\}=0.$

三角函數式之因數分解

◉n 爲偶數時，$x^n-1=(x-1)(x+1)\left(x^2-2x\cos\dfrac{2\pi}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\dfrac{4\pi}{n}+1\right)\times\cdots\cdots\left\{x^2-2x\cos\dfrac{n-4}{n}\pi+1\right\}\left\{x^2-2x\cos\dfrac{n-2}{n}\pi+1\right\}.$

◉n 爲奇數時，$x^n-1=(x-1)\left(x^2-2x\cos\dfrac{2\pi}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\dfrac{4\pi}{n}+1\right)\times\cdots\cdots\left\{x^2-2x\cos\dfrac{n-3}{n}\pi+1\right\}\left\{x^2-2x\cos\dfrac{n-1}{n}\pi+1\right\}.$

◉n 爲偶數時，$x^n+1=\left(x^2-2x\cos\dfrac{\pi}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\dfrac{3\pi}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\dfrac{5\pi}{n}+1\right)\times\cdots\cdots\left(x^2-2x\cos\dfrac{n-3}{n}\pi+1\right)\left(x^2-2x\cos\dfrac{n-1}{n}\pi+1\right).$

◉n 爲奇數時，$x^n+1=(x+1)\left(x^2-2x\cos\dfrac{\pi}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\dfrac{3\pi}{n}+1\right)\times\cdots\cdots\left(x^2-2x\cos\dfrac{n-4}{n}\pi+1\right)\left(x^2-2x\cos\dfrac{n-2}{n}\pi+1\right).$

◉$x^n-x^{-n}=(x-x^{-n})\left(x+x^{-1}-2\cos\dfrac{\pi}{n}\right)\left(x+x^{-1}-2\cos\dfrac{2\pi}{n}\right)\times\cdots\cdots\left(x+x^{-1}-2\cos\dfrac{n-1}{n}\pi\right).$

◉$x^n+x^{-n}=\left(x+x^{-1}-2\cos\dfrac{\pi}{2n}\right)\left(x+x^{-1}-2\cos\dfrac{3\pi}{2n}\right)\cdots\cdots\left(x+x^{-1}-2\cos\dfrac{2n-1}{2n}\pi\right).$

◉$x^{2n}-2x^n\cos\theta+1=\left(x^2-2x\cos\dfrac{\theta}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\dfrac{2\pi+\theta}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\dfrac{4\pi+\theta}{n}+1\right)\times\cdots\cdots\left\{x^2-2x\cos\dfrac{(2n-4)\pi+\theta}{n}+1\right\}\left\{x^2-2x\cos\dfrac{(2n-2)\pi+\theta}{n}+1\right\}.$

◉$x^n+x^{-n}-2\cos n\theta=(x+x^{-1}-2\cos\theta)\left\{x+x^{-1}-2\cos\left(\theta+\dfrac{2\pi}{n}\right)\right\}\times\cdots\cdots\left\{x+x^{-1}-2\cos\left(\theta+\dfrac{2n-2}{n}\right)\right\}.$

II. 三角法公式集 球面

基 本 公 式

◉$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$.

◉$\cos b=\cos c\cos a+\sin c\sin a\cos B$.

◉$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C$.

sin A 之 公 式

◉$\sin A=\sqrt{}(1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a$

$\times\cos b\cos c)/(\sin b\sin c)$

$=2n/(\sin b\sin c)$.

但 $\{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)\}^{\frac{1}{2}}$

$=n$ 及 $2s=a+b+c$.

餘切正弦之公式

◉$\cot a\sin b=\cot A\sin C+\cos b\cos C$.

◉$\cot b\sin a=\cot B\sin C+\cos a\cos C$.

◉$\cot b\sin c=\cot B\sin A+\cos c\cos A$.

◉$\cot c\sin b=\cot C\sin A+\cos b\cos A$.

◉$\cot c\sin a=\cot C\sin B+\cos a\cos B$.

◉$\cot a\sin c=\cot A\sin B+\cos c\cos B$.

正 弦 比 例

◉$\sin A/\sin a=\sin B/\sin b=\sin C/\sin c$

$=2n/(\sin a\sin b\sin c)$.

半 角 之 公 式

◉$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}$.

◉$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}$.

◉$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}}$.

半 弧 之 公 式

◉$\sin\frac{a}{2}=\sqrt{-\frac{\cos S\cos(S-A)}{\sin B\sin C}}$.

◉$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B\sin C}}$.

◉$\tan\frac{a}{2}=\sqrt{-\frac{\cos S\cos(S-A)}{\cos(S-B)\cos(S-C)}}$.

但 $2S=A+B+C$.

Napier 氏 公 式

◉$\tan\frac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{C}{2}$.

◉$\tan\frac{1}{2}(A-B)=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{C}{2}$.

◉$\tan\frac{1}{2}(a+b)=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\tan\frac{c}{2}$.

⊙ $\tan\frac{1}{2}(a-b)=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\tan\frac{c}{2}$.

Delambre 氏比例式

⊙ $\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}c=\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C$.

⊙ $\sin\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}c=\sin\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C$.

⊙ $\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}c=\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C$.

⊙ $\cos\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}c=\sin\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C$.

球面直角三角形

[C 爲 直 角]

⊙ $\sin b=\sin B\sin c$
⊙ $\sin a=\sin A\sin c$

⊙ $\tan a=\cos B\tan c$
⊙ $\tan b=\cos A\tan c$

⊙ $\tan b=\tan B\sin a$
⊙ $\tan a=\tan A\sin b$

⊙ $\tan A\tan B=1/\cos c$
⊙ $\cot A\cot B=\cos c$

內切圓傍切圓外接圓

⊙ $\tan r=\frac{n}{\sin s}=\tan\frac{A}{2}\sin(s-a)$

$=\frac{\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A}\sin a$

$=\frac{N}{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}$.

但 $N=\{-\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\times\cos(S-C)\}^{\frac{1}{2}}$.

⊙ $\cot r=\frac{1}{2N}\{\cos S+\cos(S-A)+\cos(S-B)+\cos(S-C)\}$.

⊙ $\tan r_1=\frac{n}{\sin(s-a)}=\tan\frac{A}{2}\sin s$

$=\frac{\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A}\sin a$

$=\frac{N}{2\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}$.

⊙ $\cot r_1=\frac{1}{2N}\{-\cos S-\cos(S-A)+\cos(S-B)+\cos(S-C)\}$.

⊙ $\tan R=-\frac{\cos S}{N}=\frac{\sin\frac{1}{2}a}{\sin A\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$

$=\frac{\tan\frac{1}{2}a}{\cos(S-A)}=\frac{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{n}$

$=\frac{1}{2n}\{\sin(s-a)+\sin(s-b)+\sin(s-c)-\sin s\}$.

⊙ $\tan R_1=\frac{\cos(S-A)}{N}=\frac{\sin\frac{1}{2}a}{\sin A\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}$

$=\frac{\tan\frac{1}{2}a}{-\cos S}=\frac{2\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{n}$

$=\frac{1}{2n}\{\sin s-\sin(s-a)+\sin(s-b)+\sin(s-c)\}$.

⊙ $(\cot r+\tan R)^2=\frac{1}{4n^2}(\sin a+\sin b+\sin c)^2-1$.

⊙ $(\cot r_1-\tan R)^2=\frac{1}{4n^2}(\sin b+\sin c-\sin a)^2-1$.

面 積

⊙球面三角形 $ABC=(A+B+C-\pi)r^2$.

⊙多角形 $=\{\Sigma-(n-2)\pi\}r^2$.

[但 Σ 爲多角形各角之和].

Cagnoli 氏定理

◉$\sin\frac{1}{2}E=\dfrac{\sqrt{\{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)\}}}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$. 但 $E=A+B+C-\pi$.

Lhuilier 氏定理

◉$\tan\frac{1}{4}E=\sqrt{\{\tan\frac{1}{2}s\tan\frac{1}{2}(s-a)\tan\frac{1}{2}(s-b)\tan\frac{1}{2}(s-c)\}}$.

III. 三角法諸表

三角函數相互之關係

	$\sin\theta=x$	$\cos\theta=x$	$\tan\theta=x$	$\cot\theta=x$	$\sec\theta=x$	$\operatorname{cosec}\theta=x$
$\sin\theta=$	x	$\sqrt{(1-x^2)}$	$\dfrac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\dfrac{\sqrt{(x^2-1)}}{x}$	$\dfrac{1}{x}$
$\cos\theta=$	$\sqrt{(1-x^2)}$	x	$\dfrac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\dfrac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{\sqrt{(x^2-1)}}{x}$
$\tan\theta=$	$\dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\dfrac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}$	x	$\dfrac{1}{x}$	$\sqrt{(x^2-1)}$	$\dfrac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$
$\cot\theta=$	$\dfrac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}$	$\dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\dfrac{1}{x}$	x	$\dfrac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$	$\sqrt{(x^2-1)}$
$\sec\theta=$	$\dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\dfrac{1}{x}$	$\sqrt{(1+x^2)}$	$\dfrac{\sqrt{(1+x^2)}}{x}$	x	$\dfrac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$
$\operatorname{cosec}\theta=$	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\dfrac{\sqrt{(1+x^2)}}{x}$	$\sqrt{(1+x^2)}$	$\dfrac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$	x

逆三角函數相互之關係

	$\sin^{-1}$	$\cos^{-1}$	$\tan^{-1}$	$\cot^{-1}$	$\sec^{-1}$	$\operatorname{cosec}^{-1}$
$\sin^{-1}x=$	x	$\sqrt{(1-x^2)}$	$\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\frac{1}{x}$
$\cos^{-1}x=$	$\sqrt{(1-x^2)}$	x	$\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$
$\tan^{-1}x=$	$\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$	x	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{(1+x^2)}$	$\frac{\sqrt{(1+x^2)}}{x}$
$\cot^{-1}x=$	$\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\frac{1}{x}$	x	$\frac{\sqrt{(1+x^2)}}{x}$	$\sqrt{(1+x^2)}$
$\sec^{-1}x=$	$\frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{(x^2-1)}$	$\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$	x	$\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$
$\operatorname{cosec}^{-1}x=$	$\frac{1}{x}$	$\frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$	$\sqrt{(x^2-1)}$	$\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$	x

雙曲線函數相互之關係

	$\sin hu=x$	$\cos hu=x$	$\tan hu=x$	$\cot hu=x$	$\sec hu=x$	$\operatorname{cosec} hu=x$
$\sin hu=$	x	$\sqrt{(x^2-1)}$	$\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$	$\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}$	$\frac{1}{x}$
$\cos hu=$	$\sqrt{(1+x^2)}$	x	$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{\sqrt{(1+x^2)}}{x}$
$\tan hu=$	$\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x}$	x	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{(1-x^2)}$	$\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$
$\cot hu=$	$\frac{\sqrt{(x^2+1)}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$	$\frac{1}{x}$	x	$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\sqrt{(1+x^2)}$
$\sec hu=$	$\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{(1-x^2)}$	$\frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x}$	x	$\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$
$\operatorname{cosec} hu=$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$	$\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}$	$\sqrt{(x^2-1)}$	$\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$	x

三角函數之符號及變化

象限 / 函數	第一		第二		第三		第四	
正弦	正	由 0 至 1	正	由 1 至 0	負	由 0 至 -1	負	由 -1 至 0
餘割		由 ∞ 至 1		由 1 至 ∞		由 -∞ 至 -1		由 -1 至 -∞
餘弦	正	由 1 至 0	負	由 0 至 -1	負	由 -1 至 0	正	由 0 至 1
正割		由 1 至 ∞		負 -∞ 至 -1		由 -1 至 -∞		由 ∞ 至 1
正切	正	由 0 至 ∞	負	由 -∞ 至 0	正	由 0 至 ∞	負	由 -∞ 至 0
餘切		由 ∞ 至 0		由 0 至 -∞		由 ∞ 至 0		由 0 至 -∞

三角函數大小

度 / 函數	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	度 / 函數
sin.	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	正弦
cos.	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	餘弦
tan.	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	正切
cot.	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞	餘切
sec.	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1	正割
cosec.	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	餘割

特别角之三角函数

	sin	cos	tan	cot	
$\frac{1}{12}\pi=15^\circ$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$\frac{5}{12}\pi=75^\circ$
$\frac{1}{10}\pi=18^\circ$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\frac{2}{5}\pi=72^\circ$
$\frac{1}{5}\pi=36^\circ$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$\frac{3}{10}\pi=54^\circ$
	cos	sin	cot	tan	

特别角之正弦

$\sin\left(3^\circ=\frac{1}{60}\pi\right)$	$\frac{1}{16}\{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)-2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}\}$
$\sin\left(6^\circ=\frac{1}{30}\pi\right)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{30-6\sqrt{5}}-\sqrt{5}-1)$
$\sin\left(9^\circ=\frac{1}{20}\pi\right)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{10}+\sqrt{2}-2\sqrt{5-\sqrt{5}})$
$\sin\left(12^\circ=\frac{1}{15}\pi\right)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{15}+\sqrt{3})$
$\sin\left(15^\circ=\frac{1}{12}\pi\right)$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$
$\sin\left(18^\circ=\frac{1}{10}\pi\right)$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$
$\sin\left(21^\circ=\frac{7}{60}\pi\right)$	$\frac{1}{16}\{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5-\sqrt{5}}-(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+1)\}$
$\sin\left(24^\circ=\frac{2}{15}\pi\right)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}})$
$\sin\left(27^\circ=\frac{3}{20}\pi\right)$	$\frac{1}{8}(2\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{10}+\sqrt{2})$
$\sin\left(30^\circ=\frac{1}{6}\pi\right)$	$\frac{1}{2}$
$\sin\left(33^\circ=\frac{11}{60}\pi\right)$	$\frac{1}{16}\{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)+2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}\}$

$\sin\left(36^\circ=\frac{1}{5}\pi\right)$	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$
$\sin\left(39^\circ=\frac{13}{60}\pi\right)$	$\frac{1}{16}\{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+1)-2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5-\sqrt{5}}\}$
$\sin\left(42^\circ=\frac{7}{30}\pi\right)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{30+6\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1)$
$\sin\left(45^\circ=\frac{1}{4}\pi\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\sin\left(48^\circ=\frac{4}{15}\pi\right)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{15}-\sqrt{3})$
$\sin\left(51^\circ=\frac{17}{60}\pi\right)$	$\frac{1}{16}\{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5-\sqrt{5}}+(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+1)\}$
$\sin\left(54^\circ=\frac{3}{10}\pi\right)$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$
$\sin\left(57^\circ=\frac{19}{60}\pi\right)$	$\frac{1}{16}\{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}-(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)\}$
$\sin\left(60^\circ=\frac{1}{3}\pi\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\sin\left(63^\circ=\frac{7}{20}\pi\right)$	$\frac{1}{8}(2\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{10}-\sqrt{2})$
$\sin\left(66^\circ=\frac{11}{30}\pi\right)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{30-6\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1)$
$\sin\left(69^\circ=\frac{23}{60}\pi\right)$	$\frac{1}{16}\{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+1)+2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5-\sqrt{5}}\}$
$\sin\left(72^\circ=\frac{2}{5}\pi\right)$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
$\sin\left(75^\circ=\frac{5}{12}\pi\right)$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$
$\sin\left(78^\circ=\frac{13}{30}\pi\right)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{30+6\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1)$
$\sin\left(81^\circ=\frac{9}{20}\pi\right)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{10}+\sqrt{2}+2\sqrt{5-\sqrt{5}})$
$\sin\left(84^\circ=\frac{14}{30}\pi\right)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{10-2\sqrt{5}})$
$\sin\left(87^\circ=\frac{29}{60}\pi\right)$	$\frac{1}{16}\{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}+(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)\}$

目　录