XIANXING DAISHU

线性代数

上海交通大学应用数学系编

工程数学丛书

上海交通大学出版社

• 工程数学丛书 •

线 性 代 数

上海交通大学应用数学系编

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书是工程数学丛书之一。内容包括：行列式，矩阵的运算，线性方程组的基本理论及解法，特征值与特征向量的概念与求法，矩阵的相似对角阵及用正交矩阵化实对称矩阵为对角阵的方法，化二次型为标准形的各种方法，线性空间和线性变换的基本理论等。

全书内容深浅得当，并配有经精选的例题和习题，书末附有习题答案或提示。可供高等院校工科各专业作为教材，也可供自学者选用。

工程数学丛

线性代数

上海交通大学出版社出版

（淮海中路1984弄19号）

新华书店上海发行所发行

上海交通大学印刷厂印装

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 8.5 字数 189000

1988年5月第1版 1988年6月第1次印刷

印数：1—8200

ISBN7-313-00236-x/O151 科技书目：177-279

定价：1.45元

序　言

目前，高等院校的工程数学课程，由于内容多、进度快，因此有些重要的内容不得不一带而过，或者删掉，尤其是没有足够多的演题时间，从而使学生对课程内容的理解往往只浮于表面。为了弥补这些不足，编者吸取我校在工程数学教学中积累的有益经验，根据高等学校工科数学课程教学指导委员会（原工科数学教材编委会）的编写要求，针对工科院校的具体特点，编写了一套工程数学教材，并拟配以一册这套教材的习题解答，合称《工程数学丛书》。

丛书中的教材共有5册：《线性代数》、《复变函数》、《积分变换》、《概率论与数理统计初步》和《特殊函数与数学物理方程》。这套教材的特点是：内容丰富，说理清楚，重点突出，深浅得当，通俗易懂；对工程数学中的基本概念、基本理论和基本方法的叙述，力求深入浅出、清晰、准确；并配有大量典型例题和类型齐全的习题。本着循序渐进的原则，对全部内容由易到难，由浅入深地作了统筹安排，书中加有"*"号的内容可根据不同情况予以取舍。这对读者逐步地系统掌握工程数学的基本内容，进一步提高分析问题和解决问题的能力均有裨益。

由于上述特点，这套教材具有比较广泛的适用性。除了全日制高等院校以外，函授大学、电视大学、职工业余大学等都可用来作为教材，自学工程数学的广大读者也可选用，从事科研生产的工程师也可参考。

本套丛书主编袁公英，编委有张建元、贺才兴、武霞敏、吴登益、童品苗、陈茵、唐济楫等同志。《线性代数》由张

建元同志执笔编写。在全套教材编写过程中得到校、系领导的关心、帮助和我系广大教师的大力支持，编者在此一并致以衷心的感谢。

由于编者水平有限，加之时间仓促，疏漏与不当之处在所难免，恳请读者和使用本套教材的教师批评指正。

编　　者

于上海交通大学

1987年10月25日

目　　录

第一章　行列式

行列式理论在数学本身，或在其他的学科中都有广泛的应用，它是解线性方程组的有力工具。中学代数里曾经讨论过二阶、三阶行列式和利用二阶、三阶行列式解二元、三元线性方程组的方法，本章将在此基础上进一步建立 n 阶行列式的理论，为在普遍的情形下讨论解 n 个未知量的线性方程组作准备。

§1　排　　列

为了定义 n 阶行列式，我们先介绍排列的概念和它的一些基本性质。

定义 1　由 1，2，…，n 组成的一个有序数组，称为一个 **n 级排列**。

例如，1324 是一个 4 级排列，51243 是一个 5 级排列。

这里的排列就是 n 个不同元素的全排列，所以 n 级排列的总数为

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots2\cdot1=n!。$$

定义 2　在一个排列中，如果有一对数的前后位置是大数排在小数之前，则称这一对数构成一个**逆序**。一个排列中逆序的总数，称为这个排列的**逆序数**。

例如，在排列4132中，41、43、42、32 是 4 个逆序，所以4132的逆序数是 4 。排列21354中，21、54是两个逆序，所以21354的逆序数是 2 。

排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数记为

$$J(i_1i_2\cdots i_n)。$$

于是 $J(4132)=4$，$J(21354)=2$。

例 1 求 $J(n(n-1)\cdots321)$。

解 在这个排列中，n 后面比它小的数有 $n-1$ 个，它们构成 $n-1$ 个逆序；$n-1$ 后面比它小的数有 $n-2$ 个，它们构成 $n-2$ 个逆序；……；3 后面比它小的数有 2 个，它们构成 2 个逆序；2 后面比它小的数有 1 个，它构成 1 个逆序。所以

$$J(n(n-1)\cdots321)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1$$
$$=\frac{n(n-1)}{2}。$$

一般情况下，排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数

$J(i_1i_2\cdots i_n)=i_1$ 后面比 i_1 小的数字的个数

$+i_2$ 后面比 i_2 小的数字的个数

$+\cdots+i_{n-1}$ 后面比 i_{n-1} 小的数字的个数

例 2 $J(634512)=5+2+2+2=11$。

定义 3 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**，逆序数为奇数的排列称为**奇排列**。

例如，4132 是偶排列，21345 是奇排列。规定逆序数是零的排列为偶排列。排列 $123\cdots n$ 的逆序数是零，因而是偶排列。

定义 4 把一个排列中某两个数的位置互换，而其余的数不动，就得到一个新排列，这种变换称为**对换**。

例如，对排列3421施行 3 与 1 的对换，就变成排列1423；对1423再施行 4 与 2 的对换，又变成排列1243；继续施行 4 与 3 的对换，最后成为按自然数顺序的排列1234。

实际上，设 $i_1i_2\cdots i_n$ 是一个 n 级排列，不难看出经过一系列的对换，可以变为按自然数顺序的排列 $123\cdots n$。对任

意两个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$，总可以通过一系列的对换，由 $i_1i_2\cdots i_n$ 变为 $j_1j_2\cdots j_n$。

关于对换还有下面一个基本定理。

定理 1 每一次对换都改变排列的奇偶性。

证 1°先看两个相邻数对换的情形。设给定的排列为

$$PijQ, \tag{1}$$

其中 P 与 Q 代表排列中若干个数。对换 i 与 j 得到排列

$$PjiQ。 \tag{2}$$

比较(1)、(2)两个排列的逆序数，显然 i、j 与属于 P 或 Q 的数所构成的逆序没有变化。但若原来 i 与 j 构成逆序，则经过对换，逆序就减少一个；若原来 i 与 j 不构成逆序，则经过对换，逆序就增加一个，不论逆序减少 1 个或增加 1 个，排列的奇偶性总是改变了。

2°再看一般情形。设 i 与 j 之间有 s 个数，这时给定的排列为

$$Pik_1k_2\cdots k_sjQ, \tag{3}$$

对换 i 与 j 得到排列

$$Pjk_1k_2\cdots k_siQ。 \tag{4}$$

不难看出，这样一次对换可以通过一系列的相邻数对换来实现。从(3)出发，把 i 依次与 k_1，k_2，…，k_s 对换，这样经过 s 次相邻数的对换后，排列(3)变为

$$Pk_1k_2\cdots k_sijQ。 \tag{5}$$

再从排列(5)出发，把 j 依次与 i，k_s，k_{s-1}，…，k_1 对换，则经过 $s+1$ 次相邻数的对换后，排列(5)变为排列(4)。这就是说，i 与 j 的对换可以通过 $2s+1$ 次相邻数的对换来实现。$2s+1$ 是奇数，所以排列(3)、(4)奇偶性相反。

由定理 1 还可得出以下事实。

定理 2 $n\geqslant 2$时，$n!$个n级排列中，奇、偶排列的个数相等，各有$\frac{n!}{2}$个。

证 设在$n!$个n级排列中有p个奇排列、q个偶排列，我们来证明$p=q$。

对p个奇排列都施行同一个对换，比方说i与j的对换，于是得到p个偶排列。由于对这p个偶排列再施行i与j的对换，又回到原来的p个奇排列，所以这p个偶排列各不相同。但我们一共只有q个偶排列，所以$p\leqslant q$。同理可证$q\leqslant p$。因此$p=q=\frac{n!}{2}$。

例如，由1、2、3组成的全部3级排列为

123，231，312，

132，213，321。

上面一排为偶排列，下面一排为奇排列，各占一半。

§ 2 n阶行列式

首先分析三阶行列式的展开式的结构规律。我们知道，三阶行列式的展开式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

其中a_{ij}（i、$j=1$、2、3）代表三阶行列式中第i行第j列的元素。可以看到上式右端每一项都为形如$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$的3个元素的乘积，并带有一定的符号。这3个元素的第一

个下标（行标）分别为1、2、3，这是一个自然顺序，是人为的，因为我们总可以交换元素的位置来获得这个自然顺序。这3个元素的第二个下标（列标）j_1、j_2、j_3的排列顺序有以下6种：

$$\begin{matrix} 123, & 231, & 312, \\ 132, & 213, & 321. \end{matrix}$$

它们恰好是所有3级排列，说明上述展开式中各项是由行列式不同行不同列的元素相乘得到的，共有3！= 6项。

进一步分析上述展开式右端各项所带的符号，它们与第二个下标的排列有关：当$j_1j_2j_3$是偶排列时，该项取正号；是奇排列时，该项取负号。正项与负项各占一半。于是三阶行列式的展开式可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{J(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中$\sum$是对列标的所有3级排列求和。

二阶行列式情况完全类似，它的展开式可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{J(j_1j_2)} a_{1j_1}a_{2j_2},$$

其中$\sum$是对列标的所有2级排列求和。

至此不难定义n阶行列式。

定义 1　n阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \qquad (2)$$

的代数和，这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，每一项(2)都按下述规则带有符号：当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，(2)带正号，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时，(2) 带负号。于是 n 阶行列式(1)可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum(-1)^{J(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \qquad (3)$$

这里$\sum$是对列标的所有 n 级排列求和。

(3)式也称为**n阶行列式的展开式**。

行列式常用记号 D 来表示。

由行列式定义可知，n 阶行列式是 $n!$ 个项的代数和，每一项都是不同行不同列的 n 个元素的乘积。计算 n 阶行列式时直接按照定义不遗漏不重复地找出这 $n!$ 个项，显然是一件很麻烦的事。下面我们先来看一些简单的例子。

例 1 计算三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}。$$

解 这是一个 4 阶行列式，在展开式中应有$4!=24$项。由于在主对角线（从左上角到右下角的那条对角线）上方的元素全为零，因此不等于零的项就大大减少了。我们来分析

一般项

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}。$$

由于第一行除 a_{11} 外都为零，故只要考虑 $j_1=1$ 的项。第二行中除了 a_{21}、a_{22} 外都为零，现已取了 a_{11}，所以 j_2 必须取2，即第二行中只能取 a_{22}。同理 j_3 和 j_4 只能分别为 3 和 4 。这样一来，行列式的展开式中不等于零的项只可能是 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$，而排列 1 2 3 4 是偶排列，所以这一项带正号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}。$$

换句话说，这个行列式就等于主对角线上元素的乘积。这个行列式也称为**下三角行列式**。

作为特殊情形，有

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{vmatrix}=d_1d_2d_3d_4\ (d_i\neq 0,\ i=1,2,3,4),$$

这种行列式也称为**对角行列式**。

以上情形都可推广到 n 阶行列式的情形。

例 2 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} & \text{\Large 0} & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}。$$

解 同例1，除去为零的项，只剩下唯一的一项

$$a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1},$$

其中第二个下标排列的逆序数为

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2},$$

所以
$$D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}。$$

最后需要补充说明的是，在行列式的定义中，也可以把每项的 n 个元素按列标的自然顺序排列起来，而以行标排列奇的偶性决定各项的符号。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{J(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn},$$

其中$\sum$是对行标的所有 n 级排列求和。

事实上，由于乘法满足交换律，这 n 个元素的次序可以是任意的。一般地，每一项可以写成

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}, \tag{4}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 是两个 n 级排列。可以证明(4)的符号为

$$(-1)^{J(i_1i_2\cdots i_n)+J(j_1j_2\cdots j_n)}。 \tag{5}$$

事实上，把(4)的 n 个元素重新排列，使它们的行标按自然顺序排列，则(4)可以改写为

$$a_{1j_1'}a_{2j_2'}\cdots a_{nj_n'}。 \tag{6}$$

于是这一项的符号为

$$(-1)^{J(j_1'j_2'\cdots j_n')}。\tag{7}$$

现在来证明(5)和(7)是相等的。因为由(4)变到(6)可以经过一系列对换来实现。每作一次对换，元素的行标与列标的排列也都同时作一次对换，它们的排列也同时改变奇偶性，所以这两个排列的逆序数之和

$$J(i_1i_2\cdots i_n)+J(j_1j_2\cdots j_n)$$

的奇偶性不变，于是

$$(-1)^{J(i_1i_2\cdots i_n)+J(j_1j_2\cdots j_n)}$$

$$=(-1)^{J(1\ 2\cdots n)+J(j_1'j_2'\cdots j_n')}=(-1)^{J(j_1'j_2'\cdots j_n')}。$$

这就证明了(4)和(6)的符号的一致性。

例如，$a_{21}a_{32}a_{14}a_{43}a_{55}$ 是5阶行列式中的一项，

$$J(23145)=2,\ J(12435)=1,$$

于是这一项的符号为$(-1)^{2+1}=-1$。

若把这一项按行标的自然顺序排列起来，有 $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}a_{55}$，这时列标排列的逆序数

$$J(41235)=3,$$

同样得到这一项的符号为$(-1)^3=-1$。

根据上面的论述，n 阶行列式的展开式可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{J(i_1i_2\cdots i_n)+J(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n},$$

其中$\sum$是对所有不同行不同列的 n 个元素之积求和。

§ 3 行列式的性质

上一节已经提到，直接按定义来计算行列式，往往是很麻烦的。因为当 n 较大时，$n!$ 就是一个惊人的数目，何况对每一项还要作 n 个元素的乘积。因此，必须对行列式作进一步的研究。下面介绍的行列式的一些性质，对简化行列式的计算是十分有用的。

定义 1 把一个 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行依次变为相应的列，所得到的行列式

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 D 的转置行列式。

性质 1 行列式转置后其值不变，即 $D=D'$。

证 将 D' 记为