断裂失效的概率分析和评估基础

钟群鹏　金　星
洪廷姬　陶春虎　编著

北京航空航天大学出版社
http://www.buaapress.cn.net

断裂失效的概率分析和评估基础

钟群鹏　金　星　洪延姬　陶春虎　编著

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本书主要介绍断裂失效概率分析和评估的基本理论、方法和应用，包括断裂失效的概率统计和随机过程、失效分析的可靠性和工程断裂力学的基础知识；采用随机变量和随机过程描述疲劳裂纹扩展规律及其速率的近似求解方法；基于英国标准 BSI PD—6493 基础上的断裂失效概率分析和安全评估原理与方法。本书内容力求简明扼要，重点突出，便于计算机上编程计算，是一本基本原理与计算机科学相结合的专著。

本书可供高等学校高年级大学生、研究生、大学教师和其他科学工作者参考，特别适合于从事断裂失效分析的专业人员阅读。

图书在版编目（CIP）数据

断裂失效的概率分析和评估基础/钟群鹏等编著. –北京：北京航空航天大学出版社，1999.11

ISBN 7–81012–870–1

Ⅰ.断…　Ⅱ. 钟…　Ⅲ. 断裂–失效分析–概率　Ⅳ. 0346.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 05532 号

断裂失效的概率分析和评估基础

钟群鹏　金　星　洪延姬　陶春虎　编著

责任编辑　刘宝俊

责任校对　陈　坤

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市学院路 37 号（100083）　发行部电话 010–82317024

http://www.buaapress.cn.net

E-mail:pressell@publica.bj.cninfo.net

北京宏文印刷厂印装　各地书店经销

*

开本：850×1168　1/32　印张：9.125　字数：245 千字

2000 年 6 月第 1 版　2000 年 6 月第 1 次印刷　印数：2 000 册

ISBN 7–81012–870–1/TB・065　　定价：17.00 元

序

构件材料的断裂失效受失效偶然性和必然性的协同作用控制。必然性反映规律，偶然性反映差异。一方面由于实际构件所受的外力不仅随工况不同而改变，而且还受偶然因素的影响；另一方面构件的抗力也由于材料组织的不均匀、内部缺陷的随机分布和加工制造的不一致，存在很大的分散性。实践表明：差异造成的随机涨落在总体上服从某些统计规律，人们可以察觉到系统从无序状态会转化为有序，从而为断裂失效的概率分析和评估提供了科学依据。基于这一客观存在，结构安全性与可靠性研究旨在从经济性和维修性要求出发、在规定工作条件下、在完成规定功能下、在规定使用寿命内，使结构因疲劳、断裂、老化而失效的可能性减至最低程度。

失效分析和评定是涉及工程力学、材料科学和可靠性工程的综合学科。本书简明扼要地介绍了失效分析和评定需要的力学基础知识和概率分析方法，归纳总结了失效分析和评定需要的概率统计基础知识和随机过程基础知识。为了吸取国外先进经验，本书介绍了在英国标准 PD—6493 基础上的失效概率分析和评定方法。

本书内容新颖、概念清晰、重点突出、文理通顺，以工程实用为目的，介绍了失效分析和评定需要的基本公式，便于计算机编程计算，解决断裂失效的概率分析和评定问题。

本书可供高等院校师生和工程技术人员参考。

中国科学院院士

北京航空航天大学教授

高镇同

一九九八年三月

前 言

随着工程设计水平的提高，人们已经不能满足于要么安全、要么失效这样的安全评定方法。实际构件在使用过程中由于损伤的逐渐累积，失效可能性逐渐增大，安全可能性逐渐减弱，所以人们采用失效概率表示危险程度，采用可靠度表示安全程度。失效概率和可靠度为我们定量比较构件危险程度和安全程度提供了定量指标。

由于外载荷的不确定性，构件材料本身的不确定性，构件形状和尺寸在其形位公差范围内的随机波动，实际构件工作环境与理想化标准试件实验环境的差异，实际构件到理想化标准试件相似性简化的出入，以及损伤物理模型的过于简化都会引起所讨论问题的不确定性，需要用概率的方法给出答案。因此工程问题的概率分析方法已经引起了广泛的重视。

本书介绍的是断裂失效概率分析和评估的基本理论和方法，以工程实用为目的，内容选取力求简明扼要，重点突出，便于计算机上编程计算。

第一章介绍失效分析概率统计基础知识，第二章介绍失效分析的随机过程基础知识，第三章介绍失效问题概率分析中常见随机变量和随机过程的模拟方法，第四章介绍失效分析的可靠性基础知识，第五章介绍失效分析工程断裂力学基础知识，第六章介绍基于光滑构件疲劳理论的失效分析概率方法，第七章介绍裂纹结构疲劳概率分析方法，第八章介绍采用随机变量和随机过程描述疲劳裂纹扩展方法，第九章介绍基于英国标准 PD — 6493 质量带理论和 R6 方法的概率分析方法，第十章为冲击失效分析简介。

本书得到材料疲劳断裂国家重点实验室和中国航空工业总公

司失效分析中心的大力资助，在此表示衷心感谢。

由于时间仓促、水平有限，书中一定存在许多缺点和不足，希望读者批评指正。

目　　录

第一章　失效分析概率统计基础

通常的材料力学、弹塑性力学和损伤力学失效分析和完整性评估都是确定性的方法，取一定的安全系数，保证判断的安全性。给出的判断只有两种结论，即要么安全，要么不安全，是防止失效的评定，而不是预计危险程度和安全程度的评定，因而不能用于定量比较构件的危险程度和安全程度。

材料性能的实测数据具有分散性，服役过程中的环境因素有时会使材料性能发生变化,构件的几何尺寸也在公差允许范围内波动,外载荷也具有不同程度的随机性。所以危险点的应力实际上是随机的，该处材料的强度也是随机的，而且这种随机性随着时间有时还要变化，因此失效分析和安全评定中要考虑上述的随机性，评定作出的判断应该是危险程度或安全程度的概率表示。危险程度或安全程度的概率为定量比较构件危险程度或安全程度提供了重要指标。

本章系统介绍了失效分析概率评定中所涉及的概率统计基础知识。

§1.1　总体、个体和样本

总体(或)[])是指具有某些共同特征的研究对象的全体。总体可以是有限集，也可以是无限集。对任何给定的总体，其特性参数都是固定的常数，例如均值和方差。

总体中的每一个研究对象称为**个体**。实际问题往往不允许对总体中的每一个个体逐一进行研究。只能从总体中抽出一部分个体进行研究。这一部分个体称为**样本(或子样)**。样本所包含的个

体的数目，称为**样本的容量**。样本是从总体中抽出的代表，用以推断总体的特征参数。例如为了研究一定工艺条件下生产的材料性能指标(总体)，只能选出部分试件(个体)进行研究，用以推断该工艺条件下生产的材料性能指标。

通常讨论的都是简单随机样本。设样本 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，样本容量为 n，如果：1) 每个 $x_k (k = 1, 2, \cdots, n)$与总体 X 具有相同的分布；2) 总体中的每一个个体被抽到的机会相等，并且 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 相互独立，则称此样本为**简单随机样本**。

一般把容量 $n \geqslant 50$ 的样本称为**大样本**；$n < 50$ 的样本称为小样本。但是这不是绝对标准，有时视具体问题而定。

根据样本数据进行计算而得到的量称为**统计量**。它是样本的函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，也是随机变量。例如样本均值 $\bar{x} = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) / n$ 是统计量。

§1.2 总体的常用概率分布

对于具有分散性的、所研究构件的某些性质(例如寿命、强度和裂纹分布等)，常常采用正态分布、对数正态分布和威布尔分布描述。

1.2.1 正态分布

一、正态分布的性质

若随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{1.1}$$

其中：$\mu, \sigma(\sigma > 0)$ 为常数，则称 X 服从均值为μ、标准差为σ 的正态分布或高斯(Gauss)分布，记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$。

正态分布累积概率分布函数为：

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{2}\right]\mathrm{d}x \tag{1.2}$$

上式的计算借助于标准正态分布函数表得到。

正态分布是对称分布，其概率密度函数 $f(x)$ 对于直线 $x=\mu$ 是对称函数。正态分布概率密度曲线 $y=f(x)$ 的位置完全由均值 μ 所确定，所以称 μ 为位置参数。标准差 σ 反映随机变量在均值 μ 附近的分散程度，如图 1.1 和图 1.2 所示。标准差 σ 越小，概率密度函数 $y=f(x)$ 图形变得越尖，分散性越小，故而 X 落在 μ 附近的概率越大。

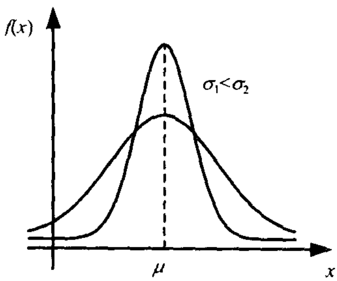

图 1.1　正态分布 $f(x)$ 示意图

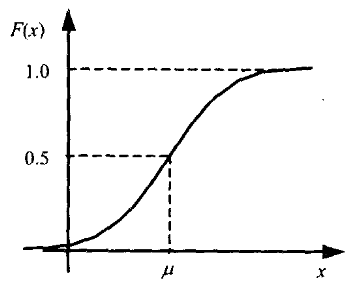

图 1.2　正态分布 $F(x)$ 示意图

对于正态随机变量 X 有：

$$P(\mu-3\sigma\leqslant X\leqslant\mu+3\sigma)\approx 0.9974 \tag{1.3}$$

或

$$P(|X-\mu|>3\sigma)\approx 0.0026$$

即正态随机变量的值落在区间 $[\mu-3\sigma,\mu+3\sigma]$ 内几乎是肯定的事件；而它的值落在区间 $[\mu-3\sigma,\mu+3\sigma]$ 之外的事件是小概率事件。这就是所谓“**3σ规则**”。这是异常数据取舍的常用标准，如果 X 落在 $[\mu-3\sigma,\mu+3\sigma]$ 之外，则认为是异常数据，舍去。

二、标准正态分布

若正态分布随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其中 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时，称随机变量 X 服从标准正态分布，记为 $X \sim N(0,1)$。其概率密度函数和累积概率分布函数分别用 $\varphi(x), \Phi(x)$ 表示。

即有：

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{1.4}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \tag{1.5}$$

显然，$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$。

标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 的函数表，可在数学手册中查找。

一般正态累积分布函数由标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 求得。若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 $(X-\mu)/\sigma \sim N(0,1)$，所以对 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 有：

$$F(x) = P(X \leqslant x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \tag{1.6}$$

$$P(x_1 < X \leqslant x_2) = \Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right) \tag{1.7}$$

三、中心极限定理

设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，服从同一分布，且具有相同数学期望和方差：$E(X_k) = \mu, D(X_k) = \sigma^2 \neq 0 \ (k = 1,2,\cdots)$，则随机变量

$$\overline{X} = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n \tag{1.8}$$

当 n 充分大时，服从正态分布

$$\overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n) \tag{1.9}$$

这说明，尽管总体的概率分布不一定是正态分布，只要样本容量 n 充分大，样本的均值 $\overline{X}$ 呈现近似的正态分布，其均值等于总体均值 μ ，其标准差等于 $\sigma/\sqrt{n}$ ， σ 是总体的标准差。即 n 充分大时，可以用样本的均值 $\overline{X}$ 推断总体均值 μ ，并且 n 越大估计越准确。这正是正态随机变量得到广泛应用的原因。

四、描述总体分布的数字特征

总体的概率密度函数大致位置、离散程度和分布特征通常用以下数字特征描述。

1．位置特征参数

一般用均值表示，均值是描述总体分布取值平均位置的参数，用符号 μ 表示。

2．散布特征参数

散布特征参数用来描述总体分布在均值附近取值的分散程度。常用标准差 σ 或变异系数 C 表示，变异系数为

$$C=\sigma/\mu \tag{1.10}$$

标准差 σ 或变异系数 C 越小，在均值附近取值的分散程度越小。

3．分布特征参数

分布特征参数常用的有偏度系数和峰度系数，表示总体概率密度函数相对正态分布(相对同均值 μ 和标准差 σ 的正态分布)的差异。

偏度系数表示总体分布的不对称性，用三阶中心矩表示为

$$\gamma_1=E[(X-\mu)^3] \tag{1.11}$$

或用无量纲化三阶中心矩表示为

$$\gamma_1'=E[(X-\mu)^3]/\sigma^3 \tag{1.12}$$

其中： σ 为总体标准差。当 $\gamma_1>0$ (或 $\gamma_1'>0$)时为正偏， $\gamma_1<0$ (或 $\gamma_1'<0$)时为负偏， $\gamma_1=0$ (或 $\gamma_1'=0$)时为对称分布——正态分布，

如图 1.3 表示。

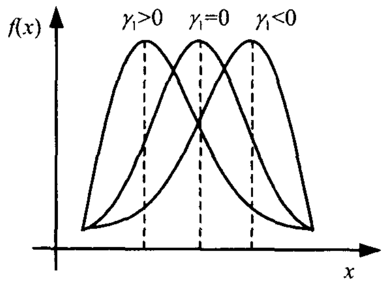

图 1.3 偏度系数示意图

峰度系数用来表示总体概率密度函数图形顶峰的凸平度，用四阶中心矩或无量纲化四阶中心矩表示为

$$\gamma_2 = E[(X-\mu)^4] \tag{1.13}$$

或

$$\gamma_2' = E[(X-\mu)^4]/\sigma^4 - 3$$

无量纲峰度系数$\gamma_2' > 0$表示比对应相同均值μ和标准差σ的正态分布概率密度图形顶峰更凸出；无量纲峰度系数$\gamma_2' < 0$表示比相同均值μ和标准差σ的正态分布概率密度图形顶峰低；无量纲峰度系数$\gamma_2' = 0$表示正态分布，如图 1.4 所示。

由于正态分布的偏度系数(或无量纲偏度系数)、无量纲峰度系数皆为零，所以常把γ_1(或γ_1')、无量纲γ_2'作为偏离正态分布的尺度，或用其进行正态检验(样本容量 n >100 为宜)。

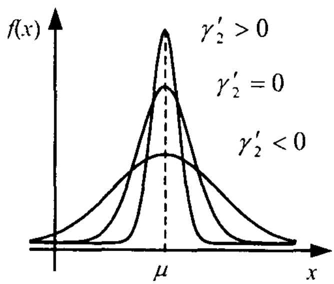

图 1.4　无量纲峰度系数示意图

1.2.2　对数正态分布

设随机变量 X 的自然对数 $Y=\ln X$ 服从正态分布，即 $\ln X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则称 X 服从对数正态分布。它的概率密度函数和累积概率分布函数分别为：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\cdot\exp\left[-\dfrac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] & (0<x<\infty)\\ 0 & (x\leqslant 0)\end{cases} \tag{1.14}$$

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\Phi\left[\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right] \tag{1.15}$$

$$P\{x_1<X\leqslant x_2\}=F(x_2)-F(x_1)=\Phi\left(\frac{\ln x_2-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\ln x_1-\mu}{\sigma}\right) \tag{1.16}$$

式中：$\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布函数。

对数正态分布的均值和方差分别为：

$$E(X)=\exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right) \tag{1.17}$$

$$D(X)=\exp(2\mu+\sigma^2)[\exp(\sigma^2)-1] \tag{1.18}$$

反过来，如果已知对数正态分布随机变量 X 的均值 $E(X)$和方差 $D(X)$，则正态分布随机变量$Y=\ln X$ 的均值μ 和方差σ^2 分别为：

$$\mu=\ln\{E^2(X)/[1+C^2(X)]\}^{1/2} \tag{1.19}$$

$$\sigma^2=\ln[1+C^2(X)] \tag{1.20}$$

其中：$C(X)=\sqrt{D(X)}\Big/E(X)$ 是随机变量 X 的变异系数。

对数正态分布的概率密度函数为正偏，其三阶中心矩(偏度系数)为：

$$\begin{aligned}\gamma_1=&\exp(3\mu+4.5\sigma^2)-3\exp(3\mu+2.5\sigma^2)+\\&2\exp(3\mu+1.5\sigma^2)\end{aligned} \tag{1.21}$$

对数正态分布在机械产品可靠性分析中应用广泛。例如疲劳裂纹扩展寿命可以看作是对数正态分布。

1.2.3 威布尔分布

设随机变量 X 服从三参数威布尔分布，则其概率密度函数和累积概率分布函数为：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{\alpha}(x-\gamma)^{\beta-1}\cdot\exp\left[-\dfrac{(x-\gamma)^{\beta}}{\alpha}\right] & (x\geqslant\gamma)\\ 0 & (x<\gamma)\end{cases} \tag{1.22}$$

$$F(x)=P(X\leqslant x)=1-\exp\left[-\frac{(x-\gamma)^{\beta}}{\alpha}\right]\quad(\gamma\leqslant x<\infty) \tag{1.23}$$

式中：$\beta>0,\beta$ 为形状参数；$\alpha>0,\alpha$ 为尺度参数；γ 为位置参数。

一般形状参数 β 取不同的值，可得到正偏、负偏和对称的概率密度函数，例如指数分布、瑞利分布和正态分布等。尺度参数α 越大，则分布的分散程度越大。位置参数改变时，仅概率密度曲线的起始位置改变，曲线的形状不变。所以三参数威布尔分布的拟合能力较强。