TOEPLITZ 矩阵类的快速算法

徐仲 张凯院 陆全 著

西北工业大学出版基金资助出版

西 北 工 业 大 学 出 版 社

（陕）新登字 009 号

【内容简介】 本书是专门研究在科技领域广泛应用的 Toeplitz 矩阵及其有关特殊矩阵类的学术论著。全书分为六章，详细阐述了该类矩阵的性质，介绍了求逆矩阵及广义逆矩阵、求解相应的线性方程组、进行矩阵的三角分解、QR 分解及求特征值与特征向量等的快速算法及其若干应用。

本书系统性强、内容丰富、论证详尽，可作为高等学校有关专业高年级学生和研究生的教材，也可作为从事教学、科研的教师和技术人员的参考书。

TOEPLITZ 矩阵类的快速算法
徐仲 张凯院 陆全 著
责任编辑 冷国伟
责任校对 钱伟峰
*

（邮编 710072 西安市友谊西路 127 号 电话 8491147）
全国各地新华书店经销
长安第二印刷厂印装
ISBN 7-5612-1102-3/O·148
*
开本：850 毫米×1 168 毫米 1/32 印张：9.25 字数：224 千字
1999 年10月第 1 版 1999 年10月第 1 次印刷
印数：1—2 000 册 定价：25.00 元

前　言

Toeplitz 矩阵及与之密切相关的 Hankel 矩阵、中心与反中心对称矩阵、Hilbert 矩阵、Cauchy 矩阵和 Loewner 矩阵等，是应用最广泛的特殊矩阵类之一。从 50 年代末至今，该类矩阵的研究一直受到人们的重视，有关的研究论文达数百篇之多，是甚为活跃的研究领域之一。本书包括了作者近几年来在该领域的部分研究成果，并将散见于诸多资料中有关结果的基本思想和主要方法进行分类、归纳和整理，汇集成书。评阅专家指出："该书将自动控制技术及其它科学技术领域有重要应用价值的 Toeplitz 矩阵和其它特殊矩阵的研究成果，从数学上给出了系统论述，是一本有特色的著作。国外早期有专著发表，但国内尚未见类似的论著出版。该书对于学科发展并推动有关技术发展和高技术人才培养，都有参考价值。"

全书共分六章，按章分别对 Toeplitz 矩阵、Hankel 矩阵、中心对称矩阵、Loewner 矩阵及其相应推广矩阵的性质，矩阵求逆及广义逆、线性方程组求解、三角分解、QR 分解等的快速算法进行了讨论。最后一章介绍了 Toeplitz 矩阵及其有关特殊矩阵类在数值分析、自动控制及数字信号处理等领域的应用。为了便于读者阅读，在撰写过程中，我们注重内容的系统性和条理性，给出了较详细的定理证明，以较简单的方法重新推证了许多结果，分析了算法的计算工作量，明确给出了其计算步骤；尽量用比较浅显的方法叙述应用例子。限于篇幅，著者仅对有限阶矩阵进行了讨论，舍去了算法的误差分析和数值算例。

本书的第一作者曾于 1994 年 9 月至 1995 年 7 月在西安交通大学作访问学者，师从陕西省工业与应用数学学会理事长、西安交通大学应用数学研究中心主任游兆永教授，主要进行特殊矩阵

方面的研究。游兆永教授对于作者撰写特殊矩阵方面的有关论著给予了很大的鼓励、关心和指导，已有一本专著《范德蒙矩阵类的快速算法》于 1997 年出版。游兆永教授不幸于 1997 年底去世，作者谨以此书作为对游兆永教授的纪念。

本书承蒙西北工业大学出版基金资助出版，并得到西北工业大学有关领导、应用数学系领导和同事们的支持与帮助。航空工业总公司 631 所周天孝教授，西北工业大学罗学波教授、叶正麟教授、史忠科教授审阅了书稿，并对其内容和结构提出了有益的建议。在此，作者表示衷心的感谢。

本书第一、二、三、五章由徐仲撰写，第六章由张凯院撰写，第四章由徐仲和陆全撰写。

由于水平所限，难免有疏漏或不妥之处，恳望读者指正。

著　者

1998 年 3 月于西北工业大学

目　　录

第一章 预备知识

本章将对书中采用的符号、编号，以及要用到的基本定理作一概要叙述.

§1.1 几个约定

为了避免重复，对本书中采用的符号作以下约定：

大写黑体字母表示矩阵，如 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{\Gamma}$ 等，$\boldsymbol{O}$ 表示零矩阵；小写黑体字母表示列向量，如 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{f}$ 等，$\boldsymbol{0}$ 表示零向量；小写字母表示数，如 a, b, λ 等. 当用小写字母表示矩阵的元素或向量的分量时，借助下标示明该元素或分量在对应矩阵或向量中的位置，如用 a_{ij} 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列元素，用 x_i 表示向量 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个分量等. 以 a_{ij} 为元素的一般 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 常写成 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{m;n}$，特别地，$n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 常写成 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式和秩分别记为 $\det\boldsymbol{A}$ 和 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，其第 i 行第 j 列元素为 a_{ji}；矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置矩阵记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$，其第 i 行第 j 列元素为 $\overline{a_{ji}}$. 若 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_{ij})_{i,j=1}^{m;n}$ 是 $m \times n$ 分块矩阵，其中 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 均是矩阵，以 $\boldsymbol{A}'$ 表示第 i 行第 j 列分块元素为 $\boldsymbol{A}_{ji}$ 的分块矩阵. 注意，对于分块矩阵来说，$\boldsymbol{A}'$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 一般是不相等的. 以 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为对角元素的对角矩阵记为 $\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$. n 阶单位矩阵用 $\boldsymbol{I}_n$ 表示，简记为 $\boldsymbol{I}$. $\boldsymbol{I}$ 的第 i 列记为 $\boldsymbol{e}_i^{(n)}$，在不会误解的情况下简记为 $\boldsymbol{e}_i$. n 阶方阵

$$\boldsymbol{Z}_n = [\boldsymbol{e}_2 \quad \boldsymbol{e}_3 \quad \cdots \quad \boldsymbol{e}_n \quad \boldsymbol{0}] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 0 \\ \boldsymbol{I}_{n-1} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \qquad (1.1.1)$$

称为**移位矩阵**，简记为 $\boldsymbol{Z}$. 可以验证

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{Z}^r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{I}_{n-r} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}, \quad 1 < r < n \\ \boldsymbol{Z}^r = \boldsymbol{O}, \quad r \geqslant n \end{array}\right\} \tag{1.1.2}$$

n 阶方阵

$$\boldsymbol{J}_n = [\boldsymbol{e}_n \quad \boldsymbol{e}_{n-1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{e}_1] = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & \therefore & \\ 1 & & \end{bmatrix} \tag{1.1.3}$$

称为**次单位矩阵**,简记为 $\boldsymbol{J}$.可以验证

$$\boldsymbol{J}^{-1} = \boldsymbol{J}, \quad \boldsymbol{J}^2 = \boldsymbol{I} \tag{1.1.4}$$

本书采用如下的编号方案:

每一章分成若干节,用§2.3表示第二章第三节.各章的定义、定理、引理、例题等按章节顺序编号,如定理2.2.1表示第二章第二节的第一个定理等.在每一章中,公式按顺序编号,如(1.4.1)表示第一章中第四节第一个公式等.

§1.2 次对称矩阵

如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ 满足 $a_{ij} = a_{ji}$,则称之为对称矩阵.可逆对称矩阵的逆矩阵仍是对称的.

定义 1.2.1 如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ 的元素关于其次对角线对称,即

$$a_{ij} = a_{n+1-j,n+1-i}, \quad i,j = 1,2,\cdots,n$$

则称之为**次对称矩阵**.

例如,当 $n=4$ 时,次对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{22} & a_{12} \\ a_{41} & a_{31} & a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

又例如，式(1.1.1)的移位矩阵 $\boldsymbol{Z}$ 是次对称矩阵，式(1.1.3)的次单位矩阵 $\boldsymbol{J}$ 既是对称的，又是次对称的.

关于次对称矩阵有如下一些性质.

定理 1.2.1　设 $\boldsymbol{J}$ 是 n 阶次单位矩阵，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，则

1)　$\boldsymbol{A}$ 是次对称矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{J}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}=\boldsymbol{A}$；

2)　若 $\boldsymbol{A}$ 是次对称矩阵，则 $\boldsymbol{J}\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{J}$ 均是对称矩阵；

3)　若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是次对称矩阵，k 是数，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，$k\boldsymbol{A}$ 也是次对称矩阵；

4)　若 $\boldsymbol{A}$ 是可逆次对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是次对称矩阵.

证明　1)～3)可直接验证. 下证 4). 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则

$$\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{J}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J})^{-1}=\boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{J}^{-1}=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}$$

证毕

§1.3　逆　矩　阵

一、　加边矩阵的逆矩阵

给定 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$，设

$$\boldsymbol{A}_k=(a_{ij})_{i,j=1}^{k},\quad k=1,2,\cdots,n$$

是 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶顺序主子阵.

定理 1.3.1　设矩阵 $\boldsymbol{A}_k$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}_{k+1}$ 可逆的充要条件是

$$\omega_k=a_{k+1,k+1}-\boldsymbol{r}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_k^{-1}\boldsymbol{c}_k\neq 0$$

且

$$\boldsymbol{A}_{k+1}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_k^{-1} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}+\omega_k^{-1}\begin{bmatrix}-\boldsymbol{A}_k^{-1}\boldsymbol{c}_k\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\boldsymbol{r}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_k^{-1} & 1\end{bmatrix}\tag{1.3.1}$$

其中 $\boldsymbol{c}_k=(a_{1,k+1},\cdots,a_{k,k+1})^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{r}_k^{\mathrm{T}}=(a_{k+1,1},\cdots,a_{k+1,k})$.

证明　因为

$$A_{k+1}=\begin{bmatrix} A_k & c_k \\ r_k^{\mathrm{T}} & a_{k+1,k+1} \end{bmatrix}$$

利用等式

$$\begin{bmatrix} I_k & 0 \\ -r_k^{\mathrm{T}}A_k^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_k & c_k \\ r_k^{\mathrm{T}} & a_{k+1,k+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_k & -A_k^{-1}c_k \\ 0^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_k & 0 \\ 0^{\mathrm{T}} & \omega_k \end{bmatrix}$$

可知，A_{k+1} 可逆的充要条件是 $\omega_k \neq 0$，且

$$A_{k+1}^{-1}=\begin{bmatrix} I_k & -A_k^{-1}c_k \\ 0^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_k^{-1} & 0 \\ 0^{\mathrm{T}} & \omega_k^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_k & 0 \\ -r_k^{\mathrm{T}}A_k^{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

整理之即得式(1.3.1). 证毕

相应的结果可以推广到分块矩阵. 设 $A=(A_{ij})_{i,j=1}^{n}$，其中 A_{ij} 均为 p 阶方阵. 又设 $A_k=(A_{ij})_{i,j=1}^{k}$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 是 A 的 k 阶分块顺序主子阵.

定理 1.3.2 设矩阵 A_k 可逆，则 A_{k+1} 可逆的充要条件是矩阵

$$\Omega_k = A_{k+1,k+1} - R_k' A_k^{-1} C_k$$

可逆，且

$$A_{k+1}^{-1}=\begin{bmatrix} A_k^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -A_k^{-1}C_k \\ I_p \end{bmatrix}\Omega_k^{-1}\begin{bmatrix} -R_k'A_k^{-1} & I_p \end{bmatrix}$$

其中 $C_k=[A_{1,k+1} \cdots A_{k,k+1}]'$，$R_k'=[A_{k+1,1} \cdots A_{k+1,k}]$.

二、 加边线性方程组的求解

考虑线性方程组

$$Ax=f, \quad A^{\mathrm{T}}y=g$$

的求解，其中 A 是 n 阶方阵，x,y 是 n 维未知列向量，$f=(f(1),\cdots,f(n))^{\mathrm{T}}$ 和 $g=(g(1),\cdots,g(n))^{\mathrm{T}}$ 是已知的右端向量. 设

$$x_k=(x_k(1),\cdots,x_k(k))^{\mathrm{T}}, \quad y_k=(y_k(1),\cdots,y_k(k))^{\mathrm{T}}$$

$$u_k=(u_k(1),\cdots,u_k(k))^{\mathrm{T}}, \quad v_k=(v_k(1),\cdots,v_k(k))^{\mathrm{T}}$$

分别是下列线性方程组的解向量

$$A_k x_k = f_k, \quad A_k u_k = e_k^{(k)}$$

$$A_k^{\mathrm{T}} y_k = g_k, \quad A_k^{\mathrm{T}} v_k = e_k^{(k)}$$

其中 A_k 是 A 的 k 阶顺序主子阵，$f_k = (f(1),\cdots,f(k))^{\mathrm{T}}$，$g_k = (g(1),\cdots,g(k))^{\mathrm{T}}$ 都是 k 维向量.

定理 1.3.3 设 A_k 与 A_{k+1} 均可逆，则线性方程组

$$A_k x_k = f_k, \qquad A_k^{\mathrm{T}} y_k = g_k$$

$$A_{k+1} x_{k+1} = f_{k+1}, \quad A_{k+1}^{\mathrm{T}} y_{k+1} = g_{k+1}$$

的解向量满足

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} x_k \\ 0 \end{bmatrix} + \sigma_k u_{k+1}, \quad y_{k+1} = \begin{bmatrix} y_k \\ 0 \end{bmatrix} + \tau_k v_{k+1} \quad (1.3.2)$$

其中 u_{k+1} 和 v_{k+1} 分别是 $A_{k+1} u_{k+1} = e_{k+1}^{(k+1)}$ 和 $A_{k+1}^{\mathrm{T}} v_{k+1} = e_{k+1}^{(k+1)}$ 的解向量，而

$$\sigma_k = f(k+1) - \sum_{j=1}^{k} a_{k+1,j} x_k(j)$$

$$\tau_k = g(k+1) - \sum_{j=1}^{k} a_{j,k+1} y_k(j)$$

证明 将式(1.3.1)两边右乘 f_{k+1} 得

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} x_k \\ 0 \end{bmatrix} + \omega_k^{-1} \begin{bmatrix} -A_k^{-1} c_k \\ 1 \end{bmatrix} (-r_k^{\mathrm{T}} A_k^{-1} f_k + f(k+1)) =$$

$$\begin{bmatrix} x_k \\ 0 \end{bmatrix} + \sigma_k \omega_k^{-1} \begin{bmatrix} -A_k^{-1} c_k \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.3.3)$$

式(1.3.1)两边再右乘 $e_{k+1}^{(k+1)}$ 得

$$u_{k+1} = \omega_k^{-1} \begin{bmatrix} -A_k^{-1} c_k \\ 1 \end{bmatrix}$$

代入式(1.3.3)即得(1.3.2)中第一式. 式(1.3.1)取转置，再仿上述过程即得(1.3.2)中第二式.　　证毕

三、 Sherman-Morrison-Woodbury 公式

Sherman-Morrison-Woodbury 公式是一个由秩-m 矩阵修改

过的矩阵的求逆公式.

定理 1.3.4 设 A 是 n 阶可逆方阵，X，Y 均是 $n\times m$ 矩阵，且 $m\leqslant n$ ，则当且仅当 $I_m+Y^{\mathrm{T}}A^{-1}X$ 可逆时，$A+XY^{\mathrm{T}}$ 是可逆的，且

$$(A+XY^{\mathrm{T}})^{-1}=A^{-1}-A^{-1}X(I_m+Y^{\mathrm{T}}A^{-1}X)^{-1}Y^{\mathrm{T}}A^{-1} \tag{1.3.4}$$

证明 直接验证即得. 证毕

在重要的特殊情形 $m=1$，X 和 Y 可分别取为 n 维列向量 x 和 y，则式(1.3.4)化为 Sherman-Morrison 公式

$$(A+xy^{\mathrm{T}})^{-1}=A^{-1}-\frac{A^{-1}xy^{\mathrm{T}}A^{-1}}{1+y^{\mathrm{T}}A^{-1}x} \tag{1.3.5}$$

若在式(1.3.5)中取 A 为单位矩阵，则得 Sherman 公式

$$(I_n+xy^{\mathrm{T}})^{-1}=I_n-\frac{xy^{\mathrm{T}}}{1+y^{\mathrm{T}}x} \tag{1.3.6}$$

§1.4 三角分解基本定理

由线性代数的结果知，非奇异矩阵 A 可进行三角分解的充要条件是 A 的所有顺序主子阵 A_k $(k=1,2,\cdots,n)$均非奇异. 在讨论矩阵 A 的三角分解算法中，常用到如下两个结论.

定理 1.4.1 设 n 阶方阵 A 的所有顺序主子阵 A_k 均非奇异. 引入 n 阶方阵

$$A^{(0)}=B_0=A,\quad A^{(i)}=\begin{bmatrix} O & O \\ O & B_i \end{bmatrix},\quad i=1,2,\cdots,n \tag{1.4.1}$$

其中 B_i 是 $n-i$ 阶方阵. 又记

$$\left.\begin{aligned} l_i &= (0,\cdots,0,l_i(i),\cdots,l_i(n))^{\mathrm{T}} \\ u_i &= (0,\cdots,0,u_i(i),\cdots,u_i(n))^{\mathrm{T}},\quad i=1,2,\cdots,n \end{aligned}\right\} \tag{1.4.2}$$

若取

$$l_i = A^{(i-1)}e_i,\quad u_i = A^{(i-1)\mathrm{T}}e_i$$

$$d_i = \frac{1}{l_i(i)} = \frac{1}{u_i(i)},\quad i = 1,2,\cdots,n \tag{1.4.3}$$

则有

$$A^{(i-1)} = l_i d_i u_i^{\mathrm{T}} + A^{(i)},\quad i = 1,2,\cdots,n \tag{1.4.4}$$

且矩阵 A 的一种三角分解为

$$A = [l_1 \quad \cdots \quad l_n]\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_n)[u_1 \quad \cdots \quad u_n]^{\mathrm{T}}$$

证明　给式(1.4.4)右乘 e_i，并注意 $A^{(i)}e_i = \mathbf{0}$，得

$$A^{(i-1)}e_i = d_i u_i(i) l_i$$

同样，将式(1.4.4)取转置再右乘 e_i，得

$$A^{(i-1)\mathrm{T}}e_i = d_i l_i(i) u_i$$

令 $d_i = \dfrac{1}{l_i(i)} = \dfrac{1}{u_i(i)}$，就有 $l_i = A^{(i-1)}e_i$ ，$u_i = A^{(i-1)\mathrm{T}}e_i$.

将式(1.4.4)的步骤进行 n 步，并注意 $A^{(n)} = O$，得

$$A = A^{(0)} = l_1 d_1 u_1^{\mathrm{T}} + A^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} l_i d_i u_i^{\mathrm{T}} + A^{(n)} =$$

$$[l_1 \quad \cdots \quad l_n]\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_n)[u_1 \quad \cdots \quad u_n]^{\mathrm{T}}$$

由于　$0 \neq \det A = l_1(1)\cdots l_n(n) d_1 \cdots d_n u_1(1)\cdots u_n(n)$

于是 $l_i(i) \neq 0$, $u_i(i) \neq 0$, $d_i \neq 0$，即式(1.4.3)有意义.

证毕

定理 1.4.2　条件同定理1.4.1，又设

$$\Delta A^{(i)} = LA^{(i)} - A^{(i)}U$$

其中 L 是下三角矩阵，U 是上三角矩阵. 则矩阵 B_i ($i = 0,1,\cdots,n-1$) 非奇异，且

$$\mathrm{rank}(\Delta A^{(i)}) \leqslant \mathrm{rank}(\Delta A^{(i-1)}),\quad i = 1,2,\cdots,n$$

证明　由式(1.4.1)～(1.4.4)知

$$B_{i-1} = (l_i(i),\cdots,l_i(n))^{\mathrm{T}} d_i (u_i(i),\cdots,u_i(n)) + \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{0} & B_i \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1/d_i & \boldsymbol{s}_i^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{t}_i & \boldsymbol{B}_i + d_i\boldsymbol{t}_i\boldsymbol{s}_i^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{s}_i^{\mathrm{T}} = (u_i(i+1),\cdots,u_i(n))$，$\boldsymbol{t}_i = (l_i(i+1),\cdots,l_i(n))^{\mathrm{T}}$. 利用

$$\begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{0}^T \\ -\mathrm{d}_i\boldsymbol{t}_i & \boldsymbol{I}_{n-i} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/d_i & \boldsymbol{s}_i^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{t}_i & \boldsymbol{B}_i + d_i\boldsymbol{t}_i\boldsymbol{s}_i^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -d_i\boldsymbol{s}_i^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_{n-i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/d_i & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_i \end{bmatrix} \tag{1.4.5}$$

得

$$\det\boldsymbol{B}_{i-1} = \frac{\det\boldsymbol{B}_i}{d_i}, \quad i = 1,2,\cdots,n-1$$

由 $\boldsymbol{B}_0 = \boldsymbol{A}$ 非奇异及 $d_i \neq 0$ 知 $\det\boldsymbol{B}_i \neq 0$ $(i = 0,1,\cdots,n-1)$. 利用式(1.4.5)可求得

$$\boldsymbol{B}_{i-1}^{-1} = \begin{bmatrix} d_i(1 + d_i\boldsymbol{s}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i^{-1}\boldsymbol{t}_i) & -d_i\boldsymbol{s}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i^{-1} \\ -d_i\boldsymbol{B}_i^{-1}\boldsymbol{t}_i & \boldsymbol{B}_i^{-1} \end{bmatrix} \tag{1.4.6}$$

设

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{L}_1^{(i)} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{L}_2^{(i)} & \boldsymbol{L}_3^{(i)} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_1^{(i)} & \boldsymbol{U}_2^{(i)} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{U}_3^{(i)} \end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{L}_3^{(i)}$ 是 $n-i$ 阶下三角矩阵，$\boldsymbol{U}_3^{(i)}$ 是 $n-i$ 阶上三角矩阵. 又设

$$\Delta_i\boldsymbol{B}_i = \boldsymbol{L}_3^{(i)}\boldsymbol{B}_i - \boldsymbol{B}_i\boldsymbol{U}_3^{(i)}, \quad \overline{\Delta}_i\boldsymbol{B}_i^{-1} = \boldsymbol{B}_i^{-1}\boldsymbol{L}_3^{(i)} - \boldsymbol{U}_3^{(i)}\boldsymbol{B}_i^{-1}$$

则由式(1.4.6)，有

$$\overline{\Delta}_{i-1}\boldsymbol{B}_{i-1}^{-1} = \begin{bmatrix} * & * \\ * & \overline{\Delta}_i\boldsymbol{B}_i^{-1} \end{bmatrix}$$

根据子矩阵的秩不大于原矩阵的秩，得

$$\begin{aligned} \mathrm{rank}(\Delta\boldsymbol{A}^{(i)}) &= \mathrm{rank}(\Delta_i\boldsymbol{B}_i) = \mathrm{rank}[(\Delta_i\boldsymbol{B}_i)\boldsymbol{B}_i^{-1}] = \\ &\mathrm{rank}[\boldsymbol{B}_i(\overline{\Delta}_i\boldsymbol{B}_i^{-1})] = \mathrm{rank}(\overline{\Delta}_i\boldsymbol{B}_i^{-1}) \leqslant \\ &\mathrm{rank}(\overline{\Delta}_{i-1}\boldsymbol{B}_{i-1}^{-1}) = \mathrm{rank}(\Delta_{i-1}\boldsymbol{B}_{i-1}) = \\ &\mathrm{rank}(\Delta y/\boldsymbol{A}^{(i-1)}) \end{aligned}$$

证毕

§1.5 矩阵的 Moore-Penrose 逆

矩阵的逆的概念,原来是对非奇异方阵才有意义的.逆矩阵的存在,使得矩阵方程中可以使用消去律.如当方阵 $\boldsymbol{A}$ 非奇异时,线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有惟一解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$.但是如果方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是奇异矩阵或长方阵,或者 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 是矛盾方程组,这时应该如何将该方程组在某种意义下的解通过矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的某种逆加以表示呢?这就有必要将逆矩阵的概念推广到奇异方阵或一般长方阵的情形.当然,这种推广后所得到的矩阵——广义逆矩阵,应该具备普通逆矩阵的若干性质,而且当 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异方阵时,推广后的矩阵应该与 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 相吻合.在诸多广义逆矩阵中,以 E. H. Moore 于1920年首先提出的、R. Penrose 于1955年以更明确的形式给出的广义逆矩阵最为常用.

定义 1.5.1 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,若 $n\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足条件:

1) $\boldsymbol{AXA}=\boldsymbol{A}$;

2) $\boldsymbol{XAX}=\boldsymbol{X}$;

3) $(\boldsymbol{AX})^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{AX}$;

4) $(\boldsymbol{XA})^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{XA}$,

则称 $\boldsymbol{X}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 **Moore-Penrose 逆**,记为 $\boldsymbol{A}^{+}$.

$\boldsymbol{A}^{+}$ 的存在及惟一性见如下结论.

定理 1.5.1 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore-Penrose 逆存在且惟一.

证明 若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 零矩阵,则 $n\times m$ 零矩阵是 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore-Penrose 逆. 当 $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=m$ 时,可直接验证,$\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{H}})^{-1}$;而当 $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=n$ 时,$\boldsymbol{A}^{+}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$;一般的非零矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一定可以表为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{FG} \tag{1.5.1}$$