高等学校适用教材

高等数学

（第2版）

下册

陈一鸣　徐玉民　主编

机械工业出版社

高等学校适用教材

高等数学

一

主　编　陈一鸣　徐玉民

副主编　王知人　侯玉梅　金燕生

编　者　苍　爽　赵晓知　张忠君

　　　　赵利光

主　审　钟晓珠　王永茂

机械工业出版社

本书是根据国家教委工科数学课程指导委员会编制的《高等数学课程教学基本要求》而编写的教材。

全书共分上、下两册。下册共有两篇：多元函数微积分；无穷级数、微分方程。每章后面都有习题和习题答案。

本书具有理论严谨、语言通顺、说理浅显、叙述详尽等特点，并配有较多的例题和课后习题，便于学生自学。

本书可作为高等工科院校教材，也可作为工程技术人员自学用书或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 下册/陈一鸣，徐玉民主编．-2版。-北京：机械工业出版社，1998.4

高等学校适用教材

ISBN 7-111-06042-3

Ⅰ．高… Ⅱ．①陈…②徐… Ⅲ．高等数学-高等学校-教材Ⅳ．013

中国版本图书馆CIP数据核字(97)第28344号

出 版 人 马九荣(北京市百万庄南街1号 邮政编码100037)

责任编辑：张一萍 版式设计：杨丽华 责任校对：唐海燕

封面设计：李 明 责任印制：侯新民

机械工业出版社京丰印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

1995年4月第1版·1998年第2月第2版第2次印刷

787mm×1092mm 1/32·14 5/8印张·324千字

3501—6500册

定价：20.00元

前　　言

本书是根据国家教委工科数学课程指导委员会编制的《高等数学课程基本要求》编写的，编者曾先后在两个年级的高等数学课程教学中试用过，收到了良好的教学效果。经过反复修改讲稿，并听取了各方面的宝贵意见，形成了这本教材。

本教材的突出特点是：在内容选取上重点突出、难点明确，在内容的讲授上深入浅出、层次清楚、语言通俗易懂，理论严谨等。本书各章节都有较多的例题，以便教师选用，也便于学生自学。在每章后面都配有足量的习题。习题分（一）、（二）、（三）三部分，其中部分（一）是为学生复习概念时准备的；部分（二）可供教师给学生留作业时选用；部分（三）是具有提高性质的习题，可供教师上习题课选用及课后留给学生的习题。

本书共分上、下两册，上册内容包括：函数、极限与连续，一元函数微分学，一元函数积分学，空间解析几何与向量代数。下册内容包括多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数，微分方程。全书共分四篇十七章。

本书可作为高等工科院校高等数学课程的教材或教学参考书。对于报考工科硕士研究生的学生，也是一本较好的复习参考书。

本书上册由唐宗贤任主编；陈一鸣、高岩、赵晓知任副主

编，下册由陈一鸣任主编，赵晓知、王宝文、谭忠富任副主编。

本书上册由陈国良副教授任主审，下册由唐宗贤副教授任主审。在本书的编写过程中，曾得到燕山大学数学教研室田乃硕教授和其他数学教师的热情帮助和具体指导。在此，我们表示衷心的感谢。

由于编者水平所限，加之时间仓促，书中一定存在很多缺点和不足之处，甚至可能出现错误，希望使用本教材的教师和学生给予批评指正。

编　　者

1994年6月

第 2 版 前 言

本书第 1 版自出版以来作为教材，已经经历了多次数学实践，受到了同行们的好评。

此次出版，我们根据几年来的教学实践及同行们的宝贵意见，对部分内容进行了重新编写与修改。例如在微分方程一章增加了微分方程级数解的选学内容；在曲线积分一章增加了关于绕相同奇点闭路积分的定理 3；在重积分一章对二重积分及三重积分则明确给出计算方法的步骤总结。这样就使教材更具适应性。

借此机会，向使用本教材并提出宝贵意见的同行们表示深切的谢意。

编 者

1997 年 1 月

目　录

第五篇 多元函数微积分

第十章 多元函数的微分学

前面我们讨论的函数只有一个自变量，这种函数称为一元函数。但在自然科学与工程技术问题中，研究的对象往往牵涉到许多方面的因素，反映到数学上就是一个变量的变化依赖于多个变量的变化，表达这种关系的函数称为多元函数。本章将介绍多元函数的微分学和积分学。它们的内容、研究方法都与一元函数紧密相关。因此，在学习多元函数时，要注意区分和比较一元函数与多元函数的共性与个性，以加深理解。本章将在一元函数微分学的基础上，讨论多元函数的微分法及其应用。讨论中我们以二元函数为主，因为从一元函数到二元函数会产生一些新的问题，而从二元函数到二元以上的多元函数则可相仿地类推。

第一节 多元函数的概念

一、多元函数的概念

在自然科学和工程实际问题中，我们所研究的对象往往牵涉到许多方面的因素。下面举三个例子。

例 1 矩形的面积 S 是由它的底边长 x 与宽 y 所确定，即

$$S=xy \qquad (x>0, y>0)$$

这里，当 x、y 取定一对值 (x,y) 时，S 的对应值也就随之确

定。

例 2　1mol 理想气体的压强 p 是由其体积 V 和温度 T 所决定的，即

$$p=\frac{RT}{V}\quad (V>0, T>0)$$

其中 R 是常量。当 V 和 T 每取一对值 (V,T) 时，p 的值也就完全确定出来。

例 3　电流所产生的热量 Q 决定于电压 U、电流强度 I 以及时间 t。这些量之间的关系是

$$Q=0.24IUt\quad (I>0,\ U>0,\ t>0)$$

I、U、t 是三个独立的量。当它们分别取值时，有一组有序的数 (I,U,t)，则 Q 的值就随之确定。

以上各例中变量 x、y、V、T、I、U、t 在它们的取值范围内都是相互独立变化的，而且对它们的各组不同的值，都可以按照一个确定的规律确定变量 S、p、Q 的值。例 1、例 2 中三个变量间的相互对应关系称为二元函数，例 3 中四个变量间的相互对应关系称为三元函数。对于二元函数我们有如下的定义。

定义　若对变量 x 与 y 在其可以取值的范围 D 内每取一组数时，变量 z 按着一个确定的法则有一个确定的值与之对应，则称变量 z 是变量 x 与 y 的二元函数，记作 $z=f(x,y)$。

在上述定义中，可以独立取值的两个变量 x 和 y 叫自变量，变量 z 叫因变量，自变量可以取值的范围 D 叫做函数的定义域。z 是 x、y 的函数，也可以记作 $z=z(x,y)$ 或 $z=\varphi(x,y)$ 等等。

习惯上，人们仍用符号 $f(x_0,y_0)$ 表示当 $x=x_0$，$y=y_0$ 时因变量 z 所取的值。

例 4 $z=f(x,y)=x^2+y^2$ 是一个二元函数。它的定义域是 xOy 整个坐标平面($-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$),而

$$f(0,1)=0^2+1^2=1$$

$$f(1,2)=1^2+2^2=5$$

相仿地,可以给出三元以及三元以上函数的定义,n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的定义域 D 应该是 n 维空间中的点集。二元以上的函数皆称为多元函数。多元函数也可以叫点函数,记作 $u=f(P)$,其中 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为 D 中的一点。例如,$z=f(x,y)$可以记成 $z=f(P)$,$P(x,y)\in D$。

二、二元函数的定义域

如果我们将自变量 x 和 y 的每一组值看作是 xOy 平面上点的坐标,则 $z=f(x,y)$的定义域就是 xOy 平面上满足某个特定条件的点集。

例 5 求函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$的定义域。

解 由已知函数的表示式,自变量所取的值必须适合不等式 $1-x^2-y^2\geqslant 0$,即已给函数的定义域由不等式 $x^2+y^2\leqslant 1$ 表示,记作 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$,见图 10-1。

例 6 求函数 $z=\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{b^2-y^2}$的定义域。

解 由已知函数的表示式,自变量所取的值,必须适合 $a^2-x^2\geqslant 0,b^2-y^2\geqslant 0$,即已给函数的定义域为

$$\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant a\\ -b\leqslant y\leqslant b\end{cases}$$

这是一个以 $2a$ 为底、$2b$ 为高、包括边界的矩形区域(见图 10-2)。

二元函数的定义域通常是由平面上一条或几段光滑曲线围成的连通的部分平面[1]。这样的部分平面称为区域。围成区

[1] 如果一块部分平面内任意两点均可用完全属于此部分平面的折线连结起来,则此部分平面称为连通的。

域的曲线称为区域的边界，边界上的点称为边界点。包括边界在内的区域称为闭域，不包括边界在内的区域称为开域。

如果一个区域 D(开域或闭域)内任意两点之间的距离都不超过某一常数 M，则称 D 为有界区域，否则称为无界区域。

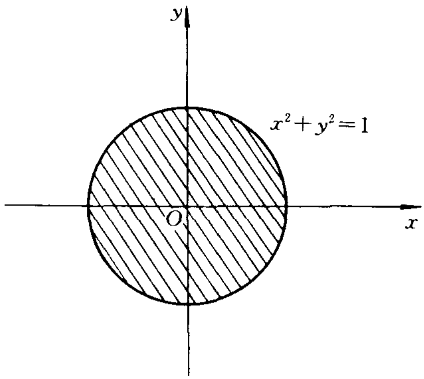

图 10-1

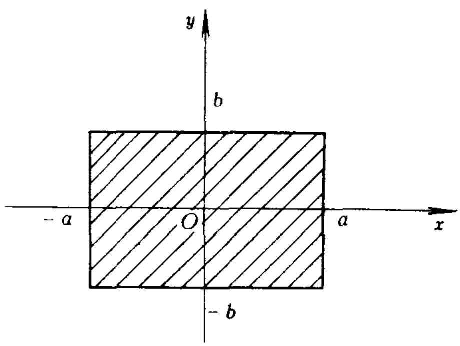

图 10-2

例 7 函数 $z=\ln(x+y)$ 只在 $x+y>0$ 时有定义。它的定义域是位于直线 $y=-x$ 上方且不包括这直线在内的半平面（见图 10-3）。这是一个无界开区域。

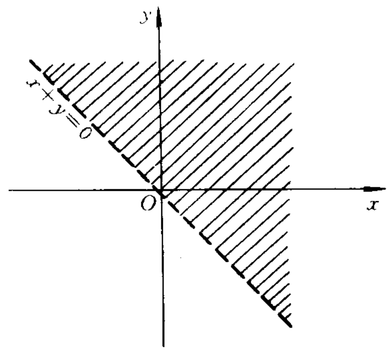

图 10-3

三、二元函数的几何意义

设 $z=f(x,y)$ 的定义域是 xOy 平面上的一个区域 D，则在 D 内任取一点 $M_0(x_0,y_0)$ 时，相应地得到 z 的一个值 $z_0=f(x_0,y_0)$，即在空间直角坐标系中得到一个点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$（见图 10-4）。当 M_0 在 D 内变动，取遍 D 内所有点时，与之相应地 P_0 点便在区域 D 的上空形成一张曲面，此曲面在 xOy 平面上的投影区域就是函数 $z=f(x,y)$ 的定义域。

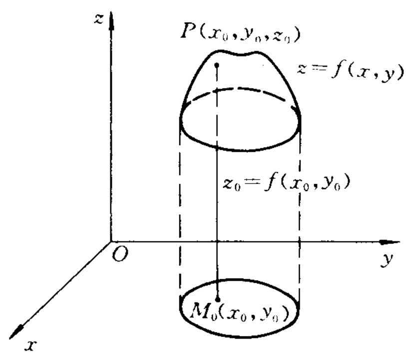

图 10-4

对于三元函数 $u=f(x,y,z)$，它的定义域一般是三维空间中的某一个区域。如函数 $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}$ 的定义域为满足 $R^2-x^2-y^2-z^2\geqslant 0$ 的点集，即

$$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$$

它的图形是以原点为中心，半径为 R 的三维空间中的一个球体的内部区域。这时函数的图形涉及四维空间，无法直接地画出来。

第二节　二元函数的极限与连续性

一、二元函数的极限

在一元函数中，我们曾研究过当自变量趋向于有限值时函数的极限。对于二元函数，同样可考虑当自变量 x 和 y 趋向有限值 x_0 和 y_0 时，函数 $z=f(x,y)$ 的极限。也就是研究当点 (x,y) 向点 (x_0,y_0) 趋近时，函数 $f(x,y)$ 的变化趋势。二元函数的情况要比一元函数的情况复杂得多，在 xOy 平面上，点 (x,y) 趋向于点 (x_0,y_0) 的方式可以有各种方式。如果当点 (x,y) 以任意方式趋向于点 (x_0,y_0) 时，函数 $f(x,y)$ 总趋向于一个确定常数 A，那么我们就称 A 是二元函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限。一般我们称为二重极限，记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \text{ 或 } \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

也可写作 $f(x,y)\to A$，当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时。严格的定义如下：

定义　设 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域[1]内有定义（P_0 可以除外），A 为常数，如果对于任意给定的正数 ε，总存在一个相应的正数 δ，使得当

$$|x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta\quad (x,y)\neq(x_0,y_0)$$

时，或当
$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

[1] 在 xOy 平面内以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为中心，由不等式

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2$$

所表示的一切点 (x,y) 的集合称为 P_0 点的 δ 邻域。

时，恒有 $$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$
成立，则称 A 为 $f(x,y)$ 当 $x\to x_0, y\to y_0$ 时的极限。

例 1 试证 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$

证 由不等式 $$\frac{|xy|}{x^2+y^2}\leqslant\frac{1}{2}$$
知 $$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|=\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right||x|\leqslant\frac{1}{2}|x|$$
可见，对于任意给定的正数 ε，只要取 $\delta=2\varepsilon$，就能使得当 $0<|x|<\delta$ 时（这时不论 y 为何值），就总有
$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|<\frac{1}{2}|x|<\frac{1}{2}\delta=\varepsilon$$
即证得 $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^2+y^2}=0$$

例 2 试证 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0$

证 由不等式 $$\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\leqslant 1$$
知 $$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\leqslant|x^2+y^2|$$
可见，对于任意给定的正数 ε，只须取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$，就可使当
$$0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$$
时，总有 $$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|\leqslant|x^2+y^2|<\varepsilon$$
成立，即证得 $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0$$
最后要指出的是：根据二元函数的极限定义可知，所谓二元函数的极限存在，是指点 (x,y) 以任何方式趋向于点 (x_0,y_0) 时，函数 $z=f(x,y)$ 都无限接近 A。因此，如果点 (x,y) 以某一特

殊方式，如沿着一条定直线或定曲线趋向于点(x_0,y_0)时，即使函数无限接近于某一确定值，我们还不能由此断定函数的极限存在。但是，当点(x,y)以不同方式趋向于点(x_0,y_0)时，函数趋向于不同的值，我们可以断定这函数的极限不存在。

例 3 已知二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0 \quad , & x^2+y^2=0\end{cases}$$

试证明：当$(x,y)\to(0,0)$时，这个函数没有极根。

证 因为在x轴及y轴上的点，函数值都为0。所以(x,y)沿x轴趋向于$(0,0)$及沿y轴趋向于$(0,0)$时，$f(x,y)$的极限值都是0。但在直线$y=x$上的点(除去原点外)函数值都为1。因此，当(x,y)沿直线$y=x$趋向于$(0,0)$时，$f(x,y)$的极限值为1。由此可见，(x,y)沿上述特殊路径趋向原点$(0,0)$时，函数的极限虽然都存在，但是不相等，所以函数的极限不存在。

例 4 已给二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0 \quad , & x^2+y^2=0\end{cases}$$

试证明：当$(x,y)\to(0,0)$时，这个函数没有极限。

证 令(x,y)沿直线$y=kx$趋向于原点$(0,0)$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{kx^3}{x^4+k^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx}{x^2+k^2}=0(k\neq 0)$$

这说明$P(x,y)$沿任何直线方向趋向$(0,0)$时，函数的极限均为0。但我们仍不能断定极限存在。事实上，当(x,y)沿抛物线$y=x^2$趋向于原点$(0,0)$时，有