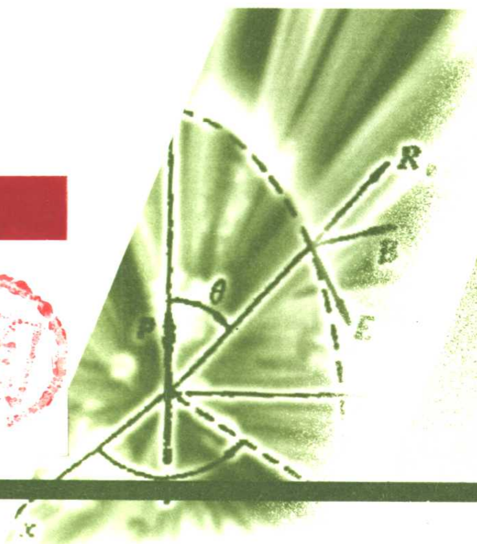
DIANDONGLIXUE

电动力学

王秀江 刘迎春 编



吉林大学
出版社

电 动 力 学

王秀江　刘迎春　编

吉林大学出版社

电动力学

王秀江　刘迎春　编

责任编辑、责任校对.王瑞金　　封面设计:孙　群

吉林大学出版社出版　　吉林大学出版社发行
(长春市解放大路125号)　长春市永昌福利印刷厂印刷

开本:787×1092毫米 1/16　　2000年9月第1版
印张.18.125　　2000年9月第1次印刷
字数 458千字　　印数.1—1000册

ISBN 7—5601—2421—6/O·264　　定价.23.00元

前　　言

本书是根据编者在吉林大学物理系授课的讲义整理而成的。全书共分8章，第一章是数学准备。第二章至第六章介绍宏观电磁场的基本理论。从电磁现象的基本规律出发，阐述了静电场、稳定电磁场、似稳电磁场、辐射和传播的主要内容，强调在各种条件下，如何从基本方程出发去计算和分析电磁场。第七章介绍狭义相对论。第八章，介绍带电粒子和电磁场的相互作用。

有一些理论，如磁单极子理论、超光速粒子理论等，目前还只能认为仅是理论上的探索，尚未得到实验的肯定，故在本教材中未作介绍。关于物质电磁性质的微观理论，如介质的极化和磁化、超导理论等，因在固体物理教材中已有详细介绍，为避免重复，在本书中也就不涉及了。

编者力求将电动力学的基本概念和理论叙述得清楚易懂，公式推导尽可能详细，对基本方法，尽可能多举一些典型例题加以说明。每章后面都有复习思考题和习题及答案供读者参考。限于编者水平，缺点、错误之处在所难免，恳请有关专家及读者批评指正。

编　者

2000 年 5 月

目　　录

第一章　矢量分析和场论基础

电动力学的主要任务是计算电磁场的分布，因此，必然要遇到场的概念."场"是什么?场有些什么特点? 如何从数学上描述它们? 这些都是首先应弄清楚的问题.

许多物理领域所研究的物质对象连续地分布在一定的空间范围，空间各点处的物理性质、运动状态以及相互作用一般是不相同的，描述这些性质、状态和作用的所有物理量都是空间各点的函数. 一定物理量的空间分布称为场，如描述物体温度分布的温度场，描述流体速度分布的速度场，描述引力作用的引力场，描述电磁作用的电磁场等等. 从物理观点看，要了解一个场的运动规律，就是要知道相应的物理量在空间各点的分布和随时间变化的情况.

与质点或刚体力学的情况不同，因为质点和刚体的自由度是有限的，而电磁场的自由度是无限的，因此需要应用新的数学工具. 从数学观点看，一个场就是指一个空间坐标函数. 各种场都由相应物理量的空间坐标函数来表示，这些空间坐标函数称为场函数. 不管物理量的具体性质，研究它们共同的空间分布特性和数量关系，这是数学场论的任务. 如果场函数是空间坐标的标量函数

$$\phi = \phi(x, y, z) \tag{1}$$

就称为标量场. 如果场函数是空间坐标的矢量函数

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(x, y, z) = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k} \tag{2}$$

称为矢量场. 不随时间变化的场称为稳定场. 如果场函数还是时间的函数，则称为变化场. 研究场的运动规律，就是研究相应场函数随空间和时间的变化关系. 这一章介绍数学场论的基础，重点讨论矢量场，分析它的性质和结构.

§1　矢量代数的基本公式

在直角坐标系中，三个单位矢量

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i} &= \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{j} &= \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{k} &= \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_3 \end{aligned} \tag{1.1}$$

是互相垂直的常矢量. 任一矢量 $\boldsymbol{A}$ 可用沿坐标轴的三个分量表示，即

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k} = \sum_{i=1}^{3} A_i\boldsymbol{e}_i \tag{1.2}$$

它的数值为

$$A = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2} \tag{1.3}$$

它的方向由三个方向余弦确定

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A}, \quad \cos\beta = \frac{A_y}{A}, \quad \cos\gamma = \frac{A_z}{A} \tag{1.4}$$

两个矢量相加，只要相应分量相加即可

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(A_x+B_x)\boldsymbol{i}+(A_y+B_y)\boldsymbol{j}+(A_z+B_z)\boldsymbol{k} \tag{1.5}$$

两个矢量相乘有三类乘积：标量积、矢量积和张量积.

标量积是一个标量，等于两个矢量的数值相乘，再乘以两矢量夹角的余弦

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos\theta \tag{1.6}$$

标量积满足交换律

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} \tag{1.7}$$

和分配律

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} \tag{1.8}$$

按照标量积的定义可知

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij}=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases} \tag{1.9}$$

所以

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\sum_i A_i\boldsymbol{e}_i\cdot\sum_j B_j\boldsymbol{e}_j=\sum_{i,j}A_iB_j\delta_{ij}=\sum_i A_iB_i$$

即

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \tag{1.10}$$

矢量积是一个矢量，它的数值是两个矢量的数值相乘，再乘以夹角的正弦；它的方向与两个矢量所在平面垂直，沿着从第一个矢量转向第二个矢量的右手螺旋前进的方向，即

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=AB\sin\theta\boldsymbol{e}_n \tag{1.11}$$

其中 $\boldsymbol{e}_n$ 是从 $\boldsymbol{A}$ 转向 $\boldsymbol{B}$ 的右手螺旋前进方向的单位矢量.

矢量积不满足交换律，因为

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}) \tag{1.12}$$

但满足分配律

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C} \tag{1.13}$$

按照矢量积的定义可知

$$\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j=\sum_k\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k \tag{1.14}$$

其中勒维-齐维塔(Levi-Civita)记号 ε_{ijk} 定义如下：

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}+1, & ijk\ \text{是 123 的偶排列}\\ -1, & ijk\ \text{是 123 的奇排列}\\ 0, & \text{任意二个指标相同}\end{cases} \tag{1.15}$$

因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}&=\sum_i A_i\boldsymbol{e}_i\times\sum_j B_j\boldsymbol{e}_j\\ &=\sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}A_iB_j\boldsymbol{e}_k\\ &=(A_yB_z-A_zB_y)\boldsymbol{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\boldsymbol{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\boldsymbol{k}\\ &=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}\end{aligned} \tag{1.16}$$

利用标量积和矢量积的定义，可以证明两个很有用的公式：

三个矢量的混合积

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \tag{1.17}$$

双重矢量积

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{1.18}$$

先证明混合积公式.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})&=\boldsymbol{A}\cdot\sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}B_jC_k\boldsymbol{e}_i\\&=\sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}A_iB_jC_k\\&=\begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\B_x & B_y & B_z\\C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}\end{aligned} \tag{1.19}$$

由行列式可看出混合积对 A,B,C 具有轮换对称性.

其次,证明双重矢量积公式.这要用到关于勒维-齐维塔记号的一个重要等式

$$\sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk}=\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm} \tag{1.20}$$

双重矢量积

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})&=\Big(\sum_{i}A_j\boldsymbol{e}_j\Big)\times\Big(\sum_{mnk}\varepsilon_{mnk}B_mC_n\boldsymbol{e}_k\Big)\\&=\sum_{ij}\sum_{mnk}C_{ijk}A_jB_m\boldsymbol{e}_i\\&=\sum_{ij}\sum_{mnk}(\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm})A_jB_mC_n\boldsymbol{e}_i\\&=\sum_{ij}(A_jB_iC_j-C_iA_jB_j)\boldsymbol{e}_i\\&=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\end{aligned}$$

§2　张量与并矢及其运算规则

我们知道,一些物理量,像质量、电荷、温度等等,都是标量,只有一个数值;另一些物理量,像力、速度、加速度等等,都是矢量,不仅具有数值,而且还有一定的方向.在直角坐标系中,每个矢量都有三个分量.在物理学中,还有一些物理量,其性质比矢量更复杂,例如弹性体中的应力和形变、各向异性晶体中的介电常数、磁导率等等.现以各向异性晶体中的电极化为例来说明.在电磁学中已熟悉各向同性介质的极化,在这种介质中电位移矢量 $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$,$\boldsymbol{D}$ 与电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的方向一致,并与 $\boldsymbol{E}$ 成正比,介电常数 ε 是一个标量.但在各向异性介质中,$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的方向一般不相同,并且在介质的同一点上,介质的极化随 $\boldsymbol{E}$ 的方向而变化.对于各向异性介质,介电常数不再是一个标量.实验发现,当场强不太强时,$\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 各分量仍保持线性关系,一般形式是

$$\begin{cases} D_x = \varepsilon_{11}E_x + \varepsilon_{12}E_y + \varepsilon_{13}E_z \\ D_y = \varepsilon_{21}E_x + \varepsilon_{22}E_y + \varepsilon_{23}E_z \\ D_z = \varepsilon_{31}E_x + \varepsilon_{32}E_y + \varepsilon_{33}E_z \end{cases} \tag{2.1}$$

由此可见，各向异性介质的介电常数在直角坐标系中一般有九个分量，这样的量称为二阶张量，一般的二阶张量可用矩阵表示如下：

$$\overleftrightarrow{\mathscr{T}} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

为了统一名称，可把标量称为零阶张量，只有一个量；矢量可称为一阶张量，具有三个分量；二阶张量则具有九个分量，等等.

二阶张量也可由两个矢量的张量积构成. 两个矢量的张量积称为并矢

$$\overleftrightarrow{\mathscr{T}} = \boldsymbol{AB} \tag{2.3}$$

$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 直接并列，中间没有任何运算符号. 矢量 $\boldsymbol{A}$ 称为并矢 $\overleftrightarrow{\mathscr{T}}$ 的前项，$\boldsymbol{B}$ 称为并矢的后项. 将并矢用分量表示，立刻看到它有九个分量.

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\mathscr{T}} &= \boldsymbol{AB} \\ &= (A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k})(B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k}) \\ &= A_xB_x\boldsymbol{ii} + A_xB_y\boldsymbol{ij} + A_xB_z\boldsymbol{ik} + A_yB_x\boldsymbol{ji} + A_yB_y\boldsymbol{jj} + A_yB_z\boldsymbol{jk} \\ &\quad + A_zB_x\boldsymbol{ki} + A_zB_y\boldsymbol{kj} + A_zB_z\boldsymbol{kk} \\ &= \sum_{ij} A_iB_j\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \qquad (i,j = 1,2,3) \end{aligned} \tag{2.4}$$

在一般情况下，一个并矢的前后项不能互相交换

$$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA} \tag{2.5}$$

一般二阶张量也可写成并矢式

$$\overleftrightarrow{\mathscr{T}} = \sum_{ij} T_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \qquad (i,j = 1,2,3) \tag{2.6}$$

因此并矢 $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ 可作为二阶张量的九个基.

一个特殊的并矢式

$$\overleftrightarrow{\mathscr{I}} = \boldsymbol{ii} + \boldsymbol{jj} + \boldsymbol{kk} \tag{2.7}$$

$\mathscr{I}$ 称为单位张量，它的矩阵表示为

$$\mathscr{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

下面介绍张量和并矢的一些代数运算规则. 熟悉并矢运算的关键在于牢记并矢的定义和并矢的前后项不能交换，然后将并矢中的前后项当成普通的矢量来运算.

两个同阶张量相加，就是将它们对应的分量相加，即

$$\overleftrightarrow{\mathscr{T}} + \overleftrightarrow{\mathscr{V}} = \sum_{ij}(T_{ij} + V_{ij})\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \tag{2.9}$$

标量与张量相乘，就是将标量与张量的每个分量逐项相乘，即

$$\phi\overleftrightarrow{\mathscr{T}} = \sum_{ij}\phi T_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = \overleftrightarrow{\mathscr{T}}\phi \tag{2.10}$$

并矢与矢量的点乘为

$$(\boldsymbol{AB})\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}) \tag{2.11}$$

$$\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{AB})=(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} \tag{2.12}$$

并矢与矢量点乘，结果为矢量. 需要注意矢量与并矢的前、后项点乘结果是不同的，与前项点乘，其方向是后项矢量的方向；与后项点乘，则其方向为前项矢量的方向. 故一般说来

$$(\boldsymbol{AB})\cdot\boldsymbol{C}\neq\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{AB}) \tag{2.13}$$

并矢与矢量的叉乘为

$$(\boldsymbol{AB})\times\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) \tag{2.14}$$

$$\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{AB})=(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}$$

并矢与矢量叉乘，结果仍为并矢. 不被叉乘的矢量当做独立矢量，其余两个矢量按矢量积规则运算. 一般说来

$$(\boldsymbol{AB})\times\boldsymbol{C}\neq\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{AB}) \tag{2.15}$$

并矢与并矢的一次点乘为

$$(\boldsymbol{AB})\cdot(\boldsymbol{CD})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{D}=(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{AD} \tag{2.16}$$

$$(\boldsymbol{CD})\cdot(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{CB} \tag{2.17}$$

两个并矢点乘是将靠近的两个矢量点乘，其余未被点乘的两个矢量构成一个新的并矢；已经点乘的两个矢量变成标量，可以放在新并矢前后. 一般说来

$$(\boldsymbol{AB})\cdot(\boldsymbol{CD})\neq(\boldsymbol{CD})\cdot(\boldsymbol{AB}) \tag{2.18}$$

并矢与并矢的二次点乘为

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{AB}):(\boldsymbol{CD})&=(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})\\&=(\boldsymbol{CD}):(\boldsymbol{AB})\end{aligned} \tag{2.19}$$

先将靠近的两个矢量点乘，再将剩下的两个矢量点乘，两次点乘所得结果为一标量. 其先后次序可以交换.

单位张量与任一矢量的点乘等于原矢量，与任一并矢的点乘等于原并矢.

$$\overleftrightarrow{\mathscr{I}}\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{I}}=\boldsymbol{C} \tag{2.20}$$

$$\overleftrightarrow{\mathscr{I}}\cdot\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AB}\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{I}}=\boldsymbol{AB} \tag{2.21}$$

并有

$$\overleftrightarrow{\mathscr{I}}:\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}:\overleftrightarrow{\mathscr{I}} \tag{2.22}$$

上述并矢的方法可推广到任意个矢量的情形，例如由三个矢量的并矢，可构成一个三阶张量

$$\boldsymbol{ABC}=\sum_{ijk}A_iBC_k\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k \tag{2.23}$$

在场论中遇到的矢量大都是空间坐标函数，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(x,y,z)$. 对矢量场函数，前面所介绍的矢量运算的基本公式及并矢的运算规则也都完全适用.

§3 梯度、散度和旋度

为了细致刻划标量场和矢量场的空间分布特性，在场论中引进了梯度、散度和旋度三个重要概念.

1. 标量场的梯度

这个概念来源于对标量场 $\phi(x,y,z)$ 的变化率的研究．考查场函数 ϕ 从点 $M(x,y,z)$ 经过一段微小距离 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 到点 $M'(x',y',z')$ 的变化情况：

$$\begin{aligned}\Phi(M') - \Phi(M) &= \mathrm{d}\phi \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathrm{d}z \\ &= \boldsymbol{G}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \end{aligned} \tag{3.1}$$

这是两个矢量的标量积，矢量 $\boldsymbol{G}$ 称为标量场的梯度

$$\boldsymbol{G} = \mathrm{grad}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{3.2}$$

标量场沿任一方向 $\boldsymbol{e}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 的变化率．称为方向导数，

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial \boldsymbol{l}} &= \frac{\partial\phi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\phi}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial\phi}{\partial z}\cos\gamma \\ &= (\mathrm{grad}\phi)\cdot\boldsymbol{e}\end{aligned} \tag{3.3}$$

因为 $\boldsymbol{e}$ 是任意的，故 M 点的方向导数有无限多. 沿哪一个方向 ϕ 的变化率最大？显然，当 $\boldsymbol{e}$ 与梯度 $\mathrm{grad}\phi$ 方向一致时，方向导数最大. 因而梯度的数值给出场函数 $\phi(x,y,z)$ 在 M 点的最大变化率，它的方向是场函数变化率最大的方向. 知道了梯度，由上式就可算出标量场函数沿任一方向的变化率. 因此梯度完全刻划了标量场的空间分布特性.

2. 矢量场的散度

有些矢量场，例如静电场，电场线不是闭合的，从正电荷出发，终止于负电荷，电荷是静电场的场源，称为有源场. 为了描述有源场的特性，引进了矢量场散度的概念.

在矢量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ 中，任取一闭合曲面 S，定义场量 $\boldsymbol{A}$ 穿过 S 面的通量为

$$\phi = \oint_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{3.4}$$

对不同的矢量场，通量的物理意义不同. 对电场 $\boldsymbol{E}$，电通量表示穿出闭合曲面 S 的电场线总数，电通量愈大，表示从 S 面内穿出来的电场线数愈多. 但这样定义的通量只能标志某一空间范围内场的发散情况，我们希望找一个能细致刻划场中每一点发散情况的物理量，为此引入单位体积的通量的极限，记为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V} \tag{3.5}$$

式中 ΔV 是闭合曲面 S 所包围的体积. 当 $\Delta V\to 0$ 时，上述极限值就能刻划出矢量场在某一点 M 的发散程度，称为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 在 M 点的散度.

当 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}>0$ 时，通过包围该点的无穷小闭合曲面的通量为正，表明在该点有产生场的力线的源头；反之当 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}<0$ 时，则表明该点有会聚场的力线的负源. 例如静电场，正电荷是发出电场线的正源，负电荷是会聚电场线的负源. 如果场中各点的散度均为零，这样的矢量场是无源场. 因此，散度完全刻划了一个矢量场的力线发散或会聚的情况.

3. 矢量场的旋度

有些矢量场，例如磁场，磁场线是闭合的. 为了描述这类矢量场的特性，引进了矢量场旋度的概念.

首先定义矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的环流量，它是场函数 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ 沿任一空间闭合曲线 $\boldsymbol{L}$ 的线积分

$$\Gamma = \oint_L \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{3.6}$$

在流体中，如果某处有涡旋存在，则流体速度场的环流量不等于零. 在场论中则用环流量来刻划任意矢量场的涡旋特性，但环流量的大小与 L 所包围的面积 S 有关. 为了更细致地刻划场中任一点 M 处涡旋的强弱，引入单位面积环流量的极限，称为涡旋量，记为

$$R_n = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_L \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S} \tag{3.7}$$

式中 ΔS 为闭合曲线 L 所包围的面积，$\boldsymbol{n}$ 为面积元 ΔS 的正法线方向. 不难看出涡旋量的大小与所取面积元 ΔS 的方位有关. 当 ΔS 取某一方位时，涡旋量最大；而在其它方位时，则可看成是此最大涡旋量在此方向的分量. 定义一个新的矢量 $\boldsymbol{R}$，它的数值是 M 点的最大涡旋量，它的方向是涡旋量最大时面积元 ΔS 的法线正方向，它可以用沿三个坐标轴方向的涡旋量表示出来

$$\boldsymbol{R}(M) = R_x\boldsymbol{i} + R_y\boldsymbol{j} + R_z\boldsymbol{k} \tag{3.8}$$

此矢量称为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度，记为

$$\boldsymbol{R}(m) = \mathrm{rot}A \tag{3.9}$$

旋度 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ 是矢量场 $\boldsymbol{A}$ 在 M 点的最大涡旋量的方向和数值. 沿任一方向 $\boldsymbol{n}$ 的涡旋量为

$$\mathrm{rot}_n\boldsymbol{A} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_L \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S} \tag{3.10}$$

因此，旋度完全刻划了一个矢量场的涡旋特性.

下面列出梯度、散度、旋度在各坐标系中的表达式.

直角坐标系中的表达式：在直角坐标系中，利用矢量算符

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{3.11}$$

则有

$$\mathrm{grad}\phi = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{3.12}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\boldsymbol{A} &= \nabla \times \boldsymbol{A} \\
&= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\nabla^2\phi = \nabla \cdot \nabla\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \tag{3.15}$$

柱坐标系中的表达式：用 $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_z$ 表示柱坐标系中的三个单位矢量，则有

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{\partial\phi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \tag{3.16}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A}{\partial z} \tag{3.17}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\theta & A_z \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\theta + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\boldsymbol{e}_z \tag{3.18}$$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \tag{3.19}$$

球坐标系中的表达式：用 $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\varphi$ 表示球坐标中的三个单位矢量，则有

$$\nabla\phi = \frac{\partial \phi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi \tag{3.20}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \tag{3.21}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right]\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right]\boldsymbol{e}_\theta$$

$$+ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\boldsymbol{e}_\varphi \tag{3.22}$$

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial \varphi^2} \tag{3.23}$$

注意，在球坐标系中的上述表达式，在 z 轴上失去意义，因为 $\sin\theta = 0$.

§4 ▽算符的运算规则

在电磁场理论中经常进行梯度、散度、旋度的运算. 如果每次都要在一个具体的坐标系中用分量来进行运算，非常麻烦. 研究发现，如果利用算符

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{4.1}$$

来进行运算，将会简便得多，可以大大提高运算的效率.

从▽算符的定义看到，它有两个基本性质：既是矢量算符，又是线性微商算符. 将它作用于场量进行运算时，既要注意它的微商作用，又要考虑到它的矢量性. 为了保持▽算符在运算过程中的矢量关系，就必须熟记矢量代数中的一些基本公式. 现举例说明▽算符的运算规则.

例 1 设 ϕ 和 ψ 是两个标量场，即空间坐标的标量函数，求 $\nabla(\phi\psi) = ?$

解 首先记住▽算符的两重性质. 第一步把它当成一个微商算符，根据微商法则有

$$\nabla(\phi\psi) = \nabla(\phi_c\psi) + \nabla(\phi\psi_c) \tag{4.2}$$

在场量上加下指标 c，表示▽算符对 ϕ_c 或 ψ_c 没有微商作用，可作常量处理. 第二步再按矢量代

数规则调整场函数的位置，把带 c 的场量移到 ∇ 算符的前面，最后得到

$$\nabla(\phi\psi) = \phi_c \nabla \psi + \psi_c \nabla \phi = \phi \nabla \psi + \psi \nabla \phi \tag{4.3}$$

调整完毕后，下标 c 就可不写了.

例 2 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是两个矢量场，即空间坐标的矢量函数，求 $\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = ?$

解 第一步进行微商运算

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}_c) + \nabla \cdot (\boldsymbol{A}_c \times \boldsymbol{B}) \tag{4.4}$$

注意，对于矢量场进行微商运算时，先不要变更矢量的位置. 第二步按矢量性质作调整，利用混合积公式

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \tag{4.5}$$

可得

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}_c) = \boldsymbol{B}_c \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) \tag{4.6}$$

同理可得

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A}_c \times \boldsymbol{B}) = -\boldsymbol{A}_c \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) \tag{4.7}$$

上式中的负号是由于 $\boldsymbol{B}$ 必须放在 ∇ 算符的后面，两者交换位置而出现的. 最后得到

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) \tag{4.8}$$

注意，调整矢量场位置时，必须利用矢量代数公式，同时还必须保持原先的微商关系不被破坏.

例 3 $\nabla \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \nabla \times (\boldsymbol{A}_c \times \boldsymbol{B}) + \nabla \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}_c)$ (4.9)

利用双重矢量积公式作调整.

解

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \tag{4.10}$$

由于不能破坏原来的微商关系，故第一项应写为

$$\nabla \times (\boldsymbol{A}_c \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}_c \nabla \cdot \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}_c \cdot \nabla \boldsymbol{B} \tag{4.11}$$

而初学者往往错误地写为

$$\nabla \times (\boldsymbol{A}_c \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}_c \nabla \cdot \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B} \nabla \cdot \boldsymbol{A}_c \tag{4.12}$$

这里的错误在于只注意了矢量性质，而忽视了微商关系. 因为 $\boldsymbol{A}_c$ 不被 ∇ 算符微商，应该移到 ∇ 算符的前面，而 $\boldsymbol{B}$ 要被 ∇ 算符微商，应放到 ∇ 算符后面. 同理，第二项应写为

$$\nabla \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}_c) = \boldsymbol{B}_c \cdot \nabla \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}_c \nabla \cdot \boldsymbol{A} \tag{4.13}$$

最后得到

$$\nabla \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A} \nabla \cdot \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} \cdot \nabla \boldsymbol{B} + \boldsymbol{B} \cdot \nabla \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} \nabla \cdot \boldsymbol{A} \tag{4.14}$$

例 4 $\nabla(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = \nabla(\boldsymbol{A}_c \cdot \boldsymbol{B}) + \nabla(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}_c)$ (4.15)

等式右端两项如何调整?

解

$$\nabla(\boldsymbol{A}_c \cdot \boldsymbol{B}) \neq (\nabla \boldsymbol{A}_c) \cdot \boldsymbol{B} \tag{4.16}$$

因为微商关系错了.

$$\nabla(\boldsymbol{A}_c \cdot \boldsymbol{B}) \neq \boldsymbol{A}_c \cdot \nabla \boldsymbol{B} \tag{4.17}$$

因为矢量关系错了.

$$\nabla(\boldsymbol{A}_c \cdot \boldsymbol{B}) = \nabla(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}_c) = (\nabla \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{A}_c \tag{4.18}$$

运算虽然没有错误，但由于并矢和矢量的点乘不满足交换律，故 $\boldsymbol{A}_c$ 只能放在 ∇ 算符后面. 如果不加以特殊标志，就容易被误认为还要被 ∇ 算符作用. 所以一般利用双重矢量积公式进行调整

$$\nabla(\boldsymbol{A}_c \cdot \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}_c \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{A}_c \cdot \nabla \boldsymbol{B} \tag{4.19}$$

同理

$$\nabla(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}_c) = \boldsymbol{B}_c \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) + \boldsymbol{B}_c \cdot \nabla \boldsymbol{A} \tag{4.20}$$

最后得

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})+\boldsymbol{A}\cdot\nabla\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})+\boldsymbol{B}\cdot\nabla\boldsymbol{A} \tag{4.21}$$

注意，在开始学习时，可将不被∇算符微商的场量用下标 c 标出来，在掌握了这个运算规则后，就不必用下标 c 了. 只要心中记住哪些量是不被∇算符微商的，在中间运算过程中不要把微商关系弄错就行.

从上述几个例题看出，运用∇算符的关键在于牢记其两重性. 首先作微商运算，再按矢量规则作调整. 微商不能改变矢量关系，调整不要搞错微商对象. 记住上面这几点后，只解决了会运算的问题，还要求能熟练用∇算符作运算. 在电磁场理论中出现的标量或矢量场函数都是场源点与待求场点间距离的函数，对这类特殊的场函数，还需熟记一些公式，这会使我们的运算更简便.

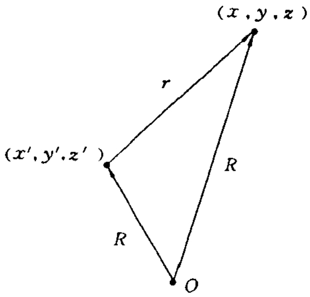


图 1.1

如图 1.1 所示，场源点坐标为(x',y',z')，以矢径 $\boldsymbol{R}'$表示；待求场点的坐标为(x,y,z)，以矢径 $\boldsymbol{R}$ 表示. 从源点到场点的矢径以 $\boldsymbol{r}$ 表示，即

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}'=(x-x')\boldsymbol{i}+(y-y')\boldsymbol{j}+(z-z')\boldsymbol{k} \tag{4.22}$$

$$r=|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}'|=[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{1/2} \tag{4.23}$$

算符∇只对场点进行运算，用带撇的算符∇'表示只对源点进行运算. 两者运算结果只相差一个负号，例如

$$\nabla f(r)=-\nabla' f(r) \tag{4.24}$$

由直接微商可以证明以下公式：

$$\nabla r=\frac{\boldsymbol{r}}{r}=e_r \tag{4.25}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{r}=3 \tag{4.26}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{r}=0 \tag{4.27}$$

$$\nabla\boldsymbol{r}=\boldsymbol{ii}+\boldsymbol{jj}+\boldsymbol{kk}=\overleftrightarrow{\mathscr{I}} \tag{4.28}$$

关于复合函数的几个公式：

$$\nabla f[\phi(\boldsymbol{r})]=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\phi}\nabla\phi \tag{4.29}$$

$$\nabla f(r)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\nabla r=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{4.30}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}[u(r)]=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} \tag{4.31}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}[u(r)]=-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u}\times\nabla\boldsymbol{u} \tag{4.32}$$

例 5 已知电偶极子的电势为

$$\phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{4.33}$$

求电场强度 $\boldsymbol{E}=-\nabla\phi=$？（其中电偶极矩 $\boldsymbol{p}$ 是常矢量.）

解 因为

$$\nabla\left(\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=\frac{1}{r^3}\nabla(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})+(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\nabla\frac{1}{r^3}$$