

3

普通高等教育机电类规划教材

控制工程基础

燕山大学 王益群 孔祥东 主编



机械工业出版社
China Machine Press

普通高等教育机电类规划教材

控制工程基础

主编 王益群 孔祥东
主审 史维祥



机械工业出版社

本书主要介绍工程上广为应用的经典控制论中信息处理和系统分析与综合的基本方法。内容包括控制系统的数学模型、时间响应分析、频率响应分析、稳定性分析、误差分析、系统的综合与校正,同时还介绍了非线性系统和计算机采样控制系统。在论述上注意深入浅出、精讲多练、简洁实用。每章附有例题和习题。本书适于作机械设计制造及其自动化、材料成型与控制工程及其他非电类专业的教材,也可供有关科技人员参考。

15.45 / 12

图书在版编目(CIP)数据

控制工程基础/王益群,孔祥东主编. —北京:机械工业出版社, 2000

普通高等教育机电类规划教材

ISBN 7-111-07924-8

I. 控… II. ①王… ②孔… III. 控制系统-高等学校-教材
IV. TP271

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 43530 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑:钱飒飒 孙祥根 版式设计:冉晓华 责任校对:张晓蓉

封面设计:方 芬 责任印制:路 琳

中国建筑工业出版社密云印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2001 年 1 月第 1 版·第 1 次印刷

1000mm×1400mm B5·7 印张·267 千字

0 001—5 000 册

定价:15.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换
本社购书热线电话(010) 68993821、68326677-2527

前 言

根据全国高校机械工程教学指导委员会 1998 年武汉会议的决定,编写了这本适应教学计划 40~50 学时的“控制工程基础”教材。

本书是在原《控制工程基础》(王益群、阳含和主编,机械工业出版社,1993)统编教材基础上,结合编者近些年教改实践和计算机技术的普及重新编写而成的。

本书以介绍工程上广为应用的经典控制论为主,以使读者能够学会信息处理和系统分析与综合的基本方法。在编写时,力求重点突出,使读者对经典控制论有较全面的了解。考虑到近些年计算机应用的推广和求解手段的进步,所以还简要介绍了计算机采样控制系统和控制系统计算机辅助分析的基本方法,以使读者建立起这方面的基本概念。

全书共分九章,包括绪论、数学模型、时间响应分析、频率特性、稳定性分析、误差分析、系统的综合与校正、非线性系统和计算机采样控制系统等,有 * 号的章节为加深拓宽的内容,可根据需要选讲。

在论述上力求做到概念准确,层次清晰,深入浅出,易教易学,适当结合机、电、液方面编入一些易于理解的例题和习题。本书适于作机械设计制造及其自动化、材料成型与控制工程专业及其他非电类专业的教材,也可供有关科技人员参考。

本书由燕山大学王益群教授、孔祥东教授主编。参加编写工作的有王益群(第一章)、孔祥东(第二章、第四章、第五章)、李久彤(第三章)、高英杰(第六章、附录)、焦晓红(第七章、第八章)、方一鸣(第九章)。

本书由西安交通大学史维祥教授主审。2000 年 4 月在秦皇岛燕山大学召开了本书的审稿会,西安交通大学、北京航空航天大学、燕山大学和机械工业出版社的有关专家出席了会议并提出了许多宝贵意见,在此对上述单位及有关专家表示衷心感谢!

由于编者水平有限,有不当之处,恳请读者批评指正。

编 者
2000 年 5 月

目 录

前言

第一章 绪论	1
第一节 概述	1
第二节 自动控制系统的基本概念	2
习题	7
第二章 控制系统的数学模型	8
第一节 控制系统的微分方程及线性化方程	8
第二节 拉氏变换及反变换	16
第三节 传递函数的概念及基本环节的传递函数	27
第四节 系统框图及其简化	30
* 第五节 系统信号流图及梅逊公式	36
习题	37
第三章 控制系统的时间响应分析	40
第一节 时间响应及典型输入信号	40
第二节 一阶系统的时间响应	43
第三节 二阶系统的时间响应	46
* 第四节 高阶系统的时间响应	55
习题	60
第四章 控制系统的频率特性和根轨迹	61
第一节 频率特性的基本概念	61
第二节 频率特性表示法	66
第三节 控制系统的闭环频响	80
第四节 系统的瞬态响应指标和频率响应指标之间的关系	87
第五节 根轨迹的基本概念	91
习题	92
第五章 控制系统的稳定性分析	95
第一节 控制系统稳定性的基本概念	95
第二节 控制系统的稳定判据	97
第三节 控制系统的相对稳定性	111
习题	116
第六章 控制系统的误差分析和计算	119
第一节 误差与稳态误差的基本概念	119

第二节 误差计算	122
习题	129
第七章 控制系统的综合与校正	131
第一节 概述	131
第二节 串联校正装置的形式及其特性	134
第三节 用频率特性法确定串联校正装置	139
第四节 反馈校正	145
第五节 复合校正	148
习题	153
第八章 非线性系统	155
第一节 非线性系统的基本概念	155
第二节 描述函数法	158
* 第三节 相平面法	162
* 第四节 非线性系统的计算机辅助分析	167
习题	170
第九章 计算机采样控制系统	172
第一节 概述	172
第二节 信号的采样与保持	173
第三节 Z 变换和 Z 反变换	177
第四节 采样控制系统的数学模型	183
第五节 采样控制系统的性能分析	189
* 第六节 采样控制系统的设计和计算机仿真及其应用举例	194
习题	199
附录	202
附录 A 典型环节(机、电、液)	202
附录 B 机械网络的传递函数	203
附录 C 电器校正网络	204
附录 D 控制系统 CAD 软件 MATLAB 简介	209
参考文献	215

第一章 绪 论

第一节 概 述

控制工程是一门研究“控制论”在工程中应用的科学。“控制工程基础”主要阐述自动控制技术的基础理论。控制理论不仅是一门极为重要的科学，而且也是科学方法论之一，因此本课程是一门非常重要的技术基础课。

自动控制理论的产生可追溯到 18 世纪英国第一次技术革命，1765 年瓦特 (Jams Watt) 发明了蒸汽机，采用离心式飞锤调速器控制蒸汽机转速，引发了工程界对系统稳定性的讨论，由此，自动控制理论随着生产的机械化及电器技术的发展而发展起来。第二次世界大战期间，因军事上的需要，雷达及火力控制系统有了迅速的发展，控制论创始人维纳 (N.Wiener) 在火炮自动控制的研究中发现了极为重要的反馈概念，他总结了包括生理学、信息论等诸多学科在内的前人成果，于 1948 年发表了著名的“控制论——关于在动物和机器中控制和通讯的科学”一文，奠定了控制论这门科学的基础。维纳发现，机器系统、生命系统甚至社会和经济系统都有一个共同的特点，即通过信息的传递、加工处理和反馈来进行控制，亦即控制论所具有的信息、反馈与控制三个要素，这就是控制论的中心思想。控制论建立后的很短时间内便迅速渗透到其他许多学科领域，大大推动了近代科学技术的发展并派生出许多新的边缘学科。1954 年我国学者钱学森运用控制论的思想和方法，首创了“工程控制论”，把控制论推广到其他领域，继而出现了生物控制论——运用控制论研究生命系统的控制与信息处理；经济控制论——运用控制论研究经济运行与发展问题；社会控制论——运用控制论研究社会管理与社会服务问题。随着科技进步特别是计算机科学的发展，控制论无论是在三要素的内涵上，还是在其深度与广度上都在发展变化着，对促进生产的发展和社会进步产生着深远的影响，就其发展过程，大体可分三个阶段。

第一阶段：20 世纪 40~50 年代为经典控制论发展时期。经典控制论的内容是以传递函数为基础，主要研究单输入、单输出控制系统的分析和设计问题，对线性定常系统，这种方法是成熟而有效的。

第二阶段：20 世纪 60~70 年代为现代控制论发展时期，这期间随着计算机技术的发展和空间技术的进步，产生了把经典控制论中的高阶常微分方程转化为一阶微分方程组来描述系统的方法，即所谓状态空间法，这种方法可以解决多输入、多输出问题，对非线性、时变系统也有效。

第三阶段：20 世纪 70 年代末至今，控制论向着“大系统理论”和“智能控制论”发展。“大系统理论”是用控制和信息的观点研究大系统的结构方案、总体设计中的分析方法和协调问题，“智能控制论”是研究与模拟人类活动的机理。现代科学揭示，人体是一个具有高度自组织、自适应、自调节能力的生命有机体，是具有非线性、时变和随机性、模糊性的特大系统。研究具有仿人智能的工程控制和信息处理问题，以使具有高度复杂性、高度不确定性的系统达到人们对控制系统越来越高的要求。

回顾控制论发展的历程，它反映了人类社会由机械化步入电气化，继而走向自动化、信息化和智能化的时代特征。

从控制论的发展中可以看出，经典控制论是基础，现代控制论、智能控制论等都是在此基础上发展起来的。必须指出，时至今日，经典控制论在工业和运输领域，包括机械、化工、能源、交通、轻工甚至国防的大多数实际工程中仍然是极为重要的，相当多的工程问题还是用它来解决。经典控制论仍不失为解决工程问题的基本方法，因此本书将主要介绍经典控制理论。

在实际工程问题上，机械、电气、液压和计算机被广泛采用，而且常常互相渗透、相互配合，向机电液一体化发展，这就需要结合机电液系统阐述工程上共同遵循的基本控制规律，即“控制工程基础”。

使被控制量按照给定量的变化规律而变化，这就是控制系统所要完成的基本任务。学习控制工程基础要解决两个问题：一是如何分析某个给定控制系统的工作原理、稳定性和过渡过程品质；二是如何根据实际需要来进行控制系统的设计，并用机、电、液、光等设备来实现这一系统。前者主要是分析系统，后者是综合与设计，无论解决哪类问题，都必须具有丰富的控制理论知识，同时能以系统的而不是孤立的、动态的而不是静态的观点和方法来处理问题，才能达到预期的目的。

第二节 自动控制系统的基本概念

在各种生产过程和生产设备中，常常需要使其中某些物理量（如温度、压力、位置、速度等）保持恒定，或者让它们按照一定的规律变化。要满足这种需要，就应该对生产机械或设备进行及时的控制和调整，以抵消外界的扰动和影响。下面介绍自动控制系统如何对这些物理量实现自动控制。

一、自动控制系统工作原理

首先研究恒温系统这个例子。实现恒温控制有两种办法：人工控制和自动控制。图 1-1 所示为人工控制的恒温箱。人们可以通过调压器改变电阻丝的电流，以达到控制温度的目的。箱内温度是由温度计测量的。人工调节过程可归结如

下：

- 1) 观测由测量元件（温度计）测出的恒温箱的温度（被控制量）；
- 2) 与要求的温度值（给定值）进行比较，得出偏差的大小和方向；

3) 根据偏差的大小和方向再进行控制：
当恒温箱温度高于所要求的给定温度值时，就调节调压器动触头使电流减小，温度降低；若温度低于给定的值，则调节调压器动触头，使电流增加，温度升高。

因此，人工控制的过程就是测量、求偏差、再控制以纠正偏差的过程。简单地讲就是“检测偏差用以纠正偏差”的过程。

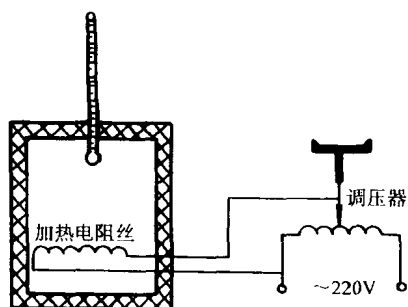


图 1-1 人工控制的恒温箱

对于这样简单的控制形式，如果能找到一个控制器代替人的职能，这样一个人工调节系统就可以变成自动控制系统了。图 1-2 所示是恒温箱自动控制系统。其中，恒温箱的温度是由给定信号电压 u_1 控制的。当外界因素引起箱内温度变化时，作为测量元件的热电偶，把温度转换成对应的电压信号 u_2 并反馈回去与给定信号 u_1 相比较，所得结果即为温度的偏差信号 $\Delta u = u_1 - u_2$ 。经过电压、功率放大后，用以改变电动机的转速和方向，并通过传动装置拖动调压器动触头。当温度偏高时，动触头向着减小电流的方向运动，反之加大电流，直到温度达到给定值为止，即只有在偏差信号 $\Delta u = 0$ 时，电动机才停转。这样就完成了所要求的控制任务。而所有这些装置便组成了一个自动控制系统。

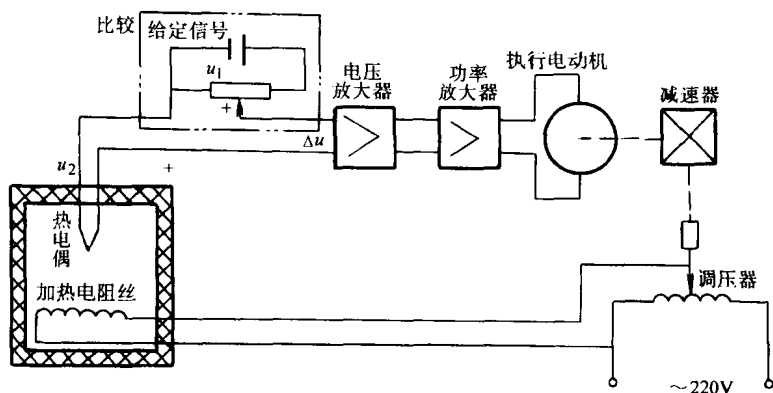


图 1-2 恒温箱的自动控制系统

图 1-3 所示为一台反馈控制的液压板带轧机原理图。由于板带轧制的速度和精度要求愈来愈高，现代化轧机的压下机构已经由电液伺服系统代替了旧式的机

械式压下机构。图中，板带出口厚度信息 h 由检测元件 3 测出并反馈到电液伺服系统 2 中，发出控制信号以驱动液压缸 1，从而调节轧制辊缝，使得板带出口厚度 h 保持在要求的公差范围内。

上述人工控制系统和自动控制系统是极其相似的。执行机构类似于人手，测量装置相当于人的眼睛，控制器类似于人脑。另外，它们还有一个共同的特点，就是都要检测偏差，并用检测到的偏差去纠正偏差，可见没有偏差便没有调节过程。在自动控制系统中，这一偏差是通过反馈建立起来的。给定量也叫控制系统的输入量，被控制量称为系统的输出量。反馈就是指输出量通过适当的测量装置将信号全部或一部分返回输入端，使之与输入量进行比较。比较的结果叫偏差。因此，基于反馈基础上的“检测偏差用以纠正偏差”的原理又称为反馈控制原理。利用反馈控制原理组成的系统称为反馈控制系统。实现自动控制的装置可各不相同，但反馈控制的原理却是相同的，可以说，反馈控制是实现自动控制最基本的方法。

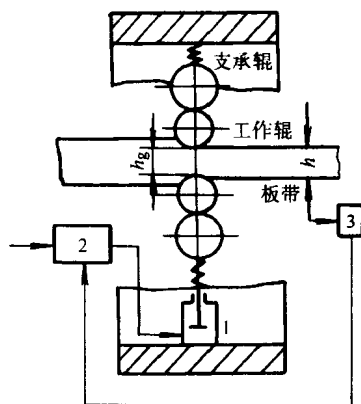


图 1-3 板厚控制简图

1—液压缸 2—电液伺服系统 3—检测元件

二、开环控制与闭环控制

工业上用的控制系统，根据有无反馈作用又可分为两类：开环控制与闭环控制。

1. 开环控制系统 如果系统的输出端和输入端之间不存在反馈回路，输出量对系统的控制作用没有影响，这样的系统称为开环控制系统。图 1-4 所示的电动机转速控制系统就是开环控制的。当给定电压改变时，电动机转速也跟着改变，但这个控制系统

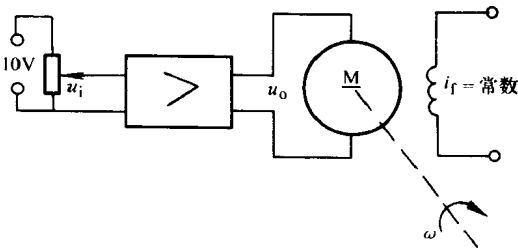


图 1-4 电动机转速控制系统

经受不住负载力矩变化对转速的影响，即负载力矩改变，转速也要改变。

2. 闭环控制系统 反馈控制系统也叫做闭环控制系统。这种系统的特点是系统的输出端和输入端之间存在反馈回路，即输出量对控制作用有直接影响。闭环的作用就是应用反馈来减少偏差。

闭环控制突出的优点是精度高，不管出现什么干扰，只要被控制量的实际值偏离给定值时，闭环控制就会产生控制作用来减小这一偏差。图 1-5 所示的闭环调速系统就能大大降低负载力矩对转速的影响，例如负载加大，转速就会降低，

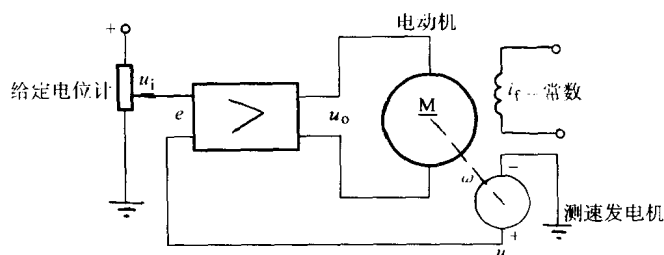


图 1-5 闭环调速系统原理图

但有了反馈，偏差就会增大，电动机电压就会升高，转速又会上升。

闭环系统也有它的缺点，这类系统是检测偏差用以纠正偏差，或者说是靠偏差进行控制。在工作过程中系统总会存在着偏差，由于元件的惯性（如负载的惯性），很容易引起振荡，使系统不稳定。因此精度和稳定性是闭环系统存在的一对矛盾。

从稳定性的角度看，开环系统比较容易建造，结构也比较简单，因为开环系统一般不存在稳定性问题。

这里还要说明，机械动力学系统，也可以画成具有反馈的方块图，但这个反馈不是人为加上的，而是机械系统所固有的，一般来说就不叫做反馈控制系统，但它可用反馈控制理论来分析。

三、反馈控制系统的基本组成

图 1-6 就是一个典型的反馈控制系统，该图表示了这些元件在系统中的位置及其相互间的关系。由图可以看出，作为一个典型的反馈控制系统应该包括反馈元件、给定元件、比较元件、放大元件、执行元件及校正元件等。

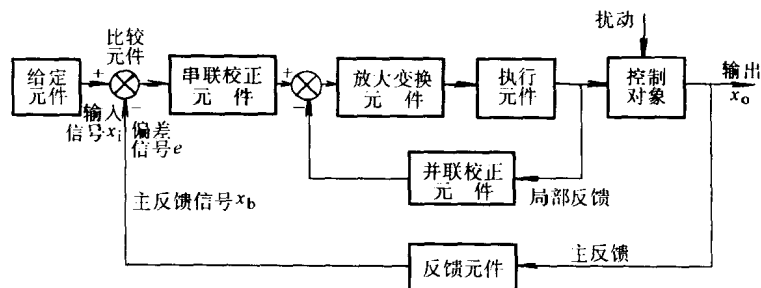


图 1-6 典型的反馈控制系统框图

(1) 给定元件：主要用于产生给定信号或输入信号，例如，调速系统的给定电位计。

(2) 反馈元件：它测量被控量或输出量，产生主反馈信号，该信号与输出量存在着确定的函数关系（通常为比例关系）。例如，调速系统的测速发电机。

(3) 比较元件：用来比较输入信号和反馈信号之间的偏差。可以是一个差接的电路，它往往不是一个专门的物理元件，有时也叫比较环节。而自整角机、旋转变压器、机械式差动装置都是物理的比较元件。

(4) 放大元件：对偏差信号进行放大和功率放大的元件。例如，伺服功率放大器、电液伺服阀等。

(5) 执行元件：直接对控制对象进行操作的元件。例如，执行电动机、液压马达等。

(6) 控制对象：控制系统所要操纵的对象，它的输出量即为系统的被控制量，例如，机床工作台等。

(7) 校正元件：或称校正装置，用以稳定控制系统，提高控制性能。有反馈校正和串联校正等形式。

四、自动控制系统的基本类型

自动控制系统的类型很多，它们的结构类型和所完成任务也各不相同。主要可分为下列几种：

1. 按给定量的运动规律分

(1) 恒值调节系统：例如稳压电源、恒温系统等。对于这类系统，分析重点在于克服扰动对输出量的影响。

(2) 程序控制系统：当输入量为已知给定的时间函数时，称为程序控制系统。近年来，由于微处理器的发展，大量的数字程序控制系统投入了运行。

(3) 随动系统：这种系统的给定量是时间的未知函数，即给定量的变化规律事先无法确定，要求输出量能够准确、快速地复现给定量，这样的系统称为随动系统，如火炮自动瞄准敌机的系统、液压仿形刀架随动系统等。

2. 按系统反应特性分

(1) 连续控制系统：即系统中各个参量的变化都是连续进行的，并可分为线性系统和非线性系统。可以用线性微分方程描述的系统称为线性控制系统，不能用线性微分方程描述的系统就叫做非线性系统。

(2) 数字控制系统：控制系统的给定量、反馈量、偏差量都是数字量，数值上不连续，时间上也是离散的。一般来说，测量、放大、比较、给定等信号处理均由微处理器实现，其输出经 D/A 转换加给伺服放大器。现在这种系统已随着微处理器的发展而日益增多。

按系统组成元件的物理性质又可分为电气控制系统、液压控制系统等。

五、对控制系统的基本要求

自动控制系统用于不同的目的，要求也往往不一样。但自动控制技术是研究各类控制系统共同规律的一门技术，对控制系统有一个共同的要求，一般可归结为稳定、准确、快速三个方面。

(1) 稳定性：由于系统存在着惯性，当系统的各个参数匹配不妥时，将会引起系统的振荡而失去工作能力。稳定性就是指动态过程的振荡倾向和系统能否恢复平衡状态的能力。稳定性的要求是系统工作的首要条件。

(2) 准确性：是指在调整过程结束后输出量与给定量之间的偏差，或称为静态精度，这也是衡量系统工作性能的重要指标。例如数控机床精度愈高，则加工精度也越高。而一般恒温 and 恒速系统的精度都可在给定值的 1% 以内。

(3) 快速性：这是在系统稳定的前提下提出的。快速性是指当系统输出量与给定量之间产生偏差时，消除这种偏差过程的快速程度。

综上所述，对控制系统的基本要求是在稳定的前提下，系统要稳、准、快。

由于受控对象的具体情况不同，各种系统对稳、准、快的要求各有侧重，例如，随动系统对快速性要求较高，而调速系统则对稳定性提出较严格的要求。

同一系统稳、准、快是相互制约的。快速性好，可能会有强烈振荡；改善稳定性，控制过程可能又过于迟缓，精度也可能变坏。分析和解决这些矛盾，也是本学科讨论的重要内容。对于机械动力学系统的要求，首要的也是稳定性，因为过大的振荡将会使部件过载而损坏，此外还要降低噪声、增加刚度等，这些都是控制理论研究的主要问题。

习 题

要求了解控制论的中心思想及其发展过程；明确控制系统的工作原理和开环控制与闭环控制的概念；掌握反馈控制系统的基本组成、自动控制系统的基本类型和对控制系统的基本要求。

- 1-1 控制论的中心思想是什么？简述其发展过程。
- 1-2 试述控制系统的工作原理。
- 1-3 何谓开环控制与闭环控制？
- 1-4 试述反馈控制系统的基本组成。
- 1-5 反馈控制原理是什么？
- 1-6 试述自动控制系统的基本类型。
- 1-7 试述对控制系统的基本要求。

第二章 控制系统的数学模型

对于一个控制系统，在一定的输入作用下有怎样的运动规律以及它的稳定情况和动态过程都是我们所希望了解的。如果将物理系统在信号传递过程中的这些特性用数学表达式描述出来，就得到了组成物理系统的数学模型。所谓系统的数学模型就是描述系统的数学表达式。建立控制系统的数学模型，并在此基础上对控制系统进行分析、综合，是控制工程的基本方法。

本章先介绍控制系统微分方程的求取方法及微分方程线性化的方法，介绍传递函数及列写传递函数的方法，讲述重要的数学工具——拉普拉斯变换，最后介绍描述系统的框图和信号流程图。

第一节 控制系统的微分方程及线性化方程

工程上常用的数学模型包括微分方程、传递函数和状态方程。微分方程是基本的数学模型，是列写传递函数的基础。

当系统的动态特性可由线性微分方程来描述时，该系统称为线性系统。对于线性系统可以应用叠加原理，即系统同时有多个输入及输出，可先分别考虑各个输入，作为单输入和单输出系统来处理，求出单个输入、输出关系，最后对各输出进行叠加，这样便于分析和计算。但实际系统很少是理想的线性系统，或多或少带有非线性因素，例如机械系统中的间隙、干摩擦等非线性因素，在某些情况下可进行近似的线性化处理，以便作为线性系统进行分析。但是对某些要求精确分析的系统，当非线性因素不可忽略时，则必须应用非线性理论来处理。

工程系统还可分为定常系统和时变系统，当描述工程系统的微分方程的系数与时间无关时，称为常系数微分方程，系统则为定常系统。反之，当系统微分方程的系数是时间的函数时，系统则为时变系统。

下面介绍建立控制系统微分方程的一般原理和方法。

一、机械系统的微分方程

机械系统的微分方程可用牛顿第二定律推导。牛顿第二定律：一物体的加速度，与其所受的合外力成正比，与其质量成反比，而且加速度与合外力同方向（作用在物体上的合外力与该物体的惯性力构成平衡力系）。用公式可表示为

$$-m\ddot{x} + \sum F_i = 0 \quad (2-1)$$

式中 $\sum F_i$ ——作用在物体上的合外力；

x ——物体的加速度；

m ——物体的质量；
 $-m\ddot{x}$ ——物体的惯性力。

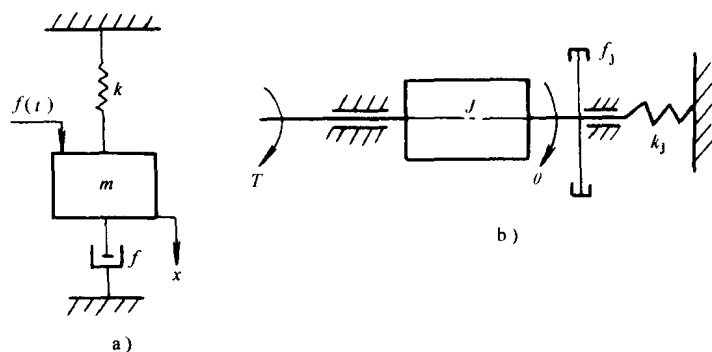


图 2-1 机械系统
a) 平移系统 b) 回转系统

如图 2-1a 所示的平移机械系统，可应用牛顿第二定律，列写出如下的运动微分方程式

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + kx = f(t) \quad (2-2)$$

式中 m ——运动体的质量，单位为 kg；
 x —— m 的运动位移，单位为 m；
 f ——粘性阻尼系数，单位为 Nsm^{-1} ；
 k ——弹簧常数（或弹簧刚度），单位为 N/m ；
 $f(t)$ ——外力，单位为 N。

图 2-1b 为回转运动的机械系统，相应的运动微分方程为

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} + f_J \frac{d\theta}{dt} + K_J \theta = T \quad (2-3)$$

式中 J ——旋转体的转动惯量，单位为 kgm^2 ；
 θ ——转角，单位为 rad；
 f_J ——转动时的粘性阻尼系数，单位为 Nms/rad ；
 K_J ——扭转弹簧刚度，单位为 Nm/rad ；
 T ——外加转矩，单位为 Nm 。

例 2-1 机械式加速度计。

加速度计简图如图 2-2 所示，它用于测量某一运动物体（如车辆）的加速度，测量时，加速度计的框架固定在待测的运动体上，当运动体作加速运动时，该框架随之作同样的加速运动。

x 为车辆（即加速度计框架）相对于某固定参照物（例如地面）的位移。

y 为质量 m 相对于框架的位移。

x 和 y 的正方向如图中所示。由于 y 是相对于框架而度量的，所以质量 m 相对于地面的位移为 $(y - x)$ ，于是对该系统可写出如下方程：

$$m \frac{d^2(y - x)}{dt^2} + f \frac{dy}{dt} + ky = 0$$

上式可改写为

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + f \frac{dy}{dt} + ky = m \frac{d^2 x}{dt^2} = ma$$

式中 a ——车辆的加速度，即加速度计的输入量；

y ——输出量（可以从刻度线上读出）。

如果输入一个恒加速度，则在稳定情况下其输出 y 也是常数，从而其导数就为零，得到

$$ma = ky$$

或

$$a = \frac{k}{m}y$$

上式表明：此时加速度计的质量 m 的稳态输出位移 y 正比于输入加速度 a 。因此，可用读数 y 值来衡量其加速度的大小。当然，如果输入加速度不是常量，而是随时间变化的，则式中的 $\frac{dy}{dt}$ 和 $\frac{d^2 y}{dt^2}$ 均不为零。

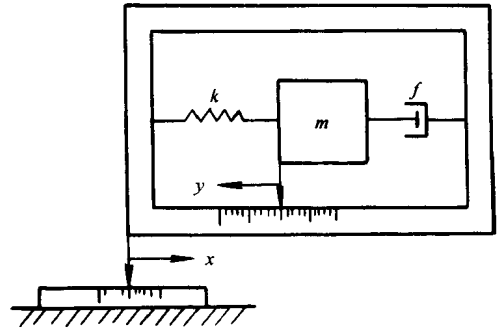


图 2-2 加速度计原理图

例 2-2 齿轮传动的动力学分析。

设有如图 2-3a 所示的齿轮传动链，由电动机 M 输入的转矩为 T_m ， L 为输出端负载， T_L 为负载转矩。图中所示的 z_i 为各齿轮齿数， J_1 、 J_2 、 J_3 及 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 分别为各轴及相应齿轮的转动惯量和转角。假设各轴均为绝对刚性，即 $K_J = \infty$ ，根据式 (2-3) 可得如下动力学方程：

$$\begin{aligned} T_m &= J_1 \ddot{\theta}_1 + f_1 \dot{\theta}_1 + T_1 \\ T_2 &= J_2 \ddot{\theta}_2 + f_2 \dot{\theta}_2 + T_3 \\ T_4 &= J_3 \ddot{\theta}_3 + f_3 \dot{\theta}_3 + T_L \end{aligned} \quad (2-4)$$

式中 f_1 、 f_2 、 f_3 ——传动中各轴及齿轮的粘性阻尼系数；

T_1 ——齿轮 z_1 对 T_m 的反转矩；

T_2 —— z_2 对 T_1 的反转矩；

T_3 —— z_3 对 T_2 的反转矩；

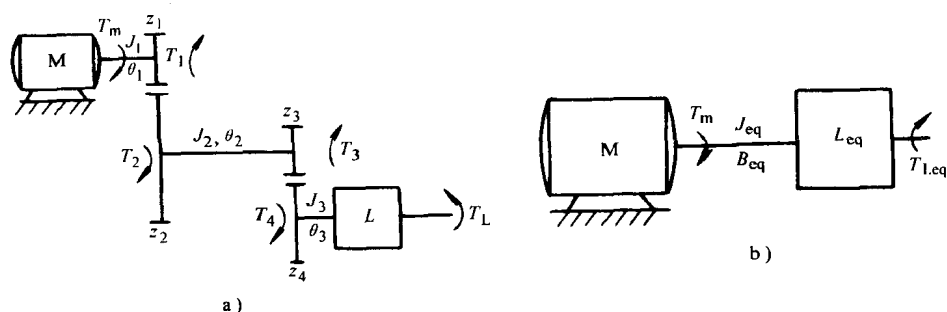


图 2-3 齿轮传动链

a) 原始轮系 b) 等效轮系

 T_4 —— z_4 对 T_3 的反转矩； T_L ——输出端负载对 T_4 的反转矩，即负载转矩。

由齿轮传动的基本关系可知

$$T_2 = \frac{z_1}{z_2} T_1, \theta_2 = \frac{z_1}{z_2} \theta_1$$

$$T_4 = \frac{z_3}{z_4} T_3, \theta_3 = \frac{z_3}{z_4} \theta_2 = \frac{z_1}{z_2} \frac{z_3}{z_4} \theta_1$$

于是由式 (2-4) 可得

$$\begin{aligned} T_m &= J_1 \ddot{\theta}_1 + f_1 \dot{\theta}_1 + \frac{z_1}{z_2} \left[J_2 \ddot{\theta}_2 + f_2 \dot{\theta}_2 + \frac{z_3}{z_4} (J_3 \ddot{\theta}_3 + f_3 \dot{\theta}_3 + T_L) \right] \\ &= \left[J_1 + \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 J_2 + \left(\frac{z_1}{z_2} \frac{z_3}{z_4} \right)^2 J_3 \right] \ddot{\theta}_1 + \left[f_1 + \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 f_2 + \left(\frac{z_1}{z_2} \frac{z_3}{z_4} \right)^2 f_3 \right] \dot{\theta}_1 + \left(\frac{z_1}{z_2} \frac{z_3}{z_4} \right) T_L \end{aligned}$$

$$\text{令} \quad J_{eq} = J_1 + \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 J_2 + \left(\frac{z_1}{z_2} \frac{z_3}{z_4} \right)^2 J_3$$

 J_{eq} 称为等效转动惯量；

$$\text{令} \quad f_{eq} = f_1 + \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 f_2 + \left(\frac{z_1}{z_2} \frac{z_3}{z_4} \right)^2 f_3$$

 f_{eq} 称为等效阻尼系数；

$$\text{令} \quad T_{Leq} = \left(\frac{z_1}{z_2} \frac{z_3}{z_4} \right) T_L$$

 T_{Leq} 称为等效输出转矩。

将上式改为

$$T_m = J_{eq} \ddot{\theta}_1 + f_{eq} \dot{\theta}_1 + T_{Leq}$$

则图 2-3a 所示的传动装置可简化为图 2-3b 所示的等效齿轮传动。