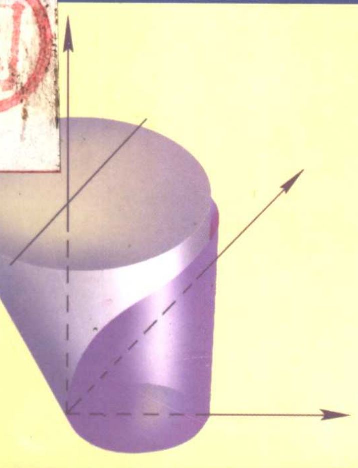
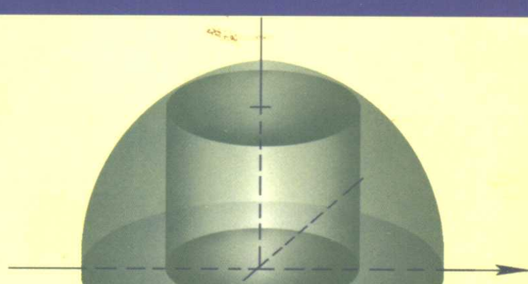
高等院校选用教材系列

高等数学系列教材

应用概率统计

周润兰 喻胜华 主编





科学出版社

内 容 简 介

本书是高等数学系列教材的第三册,其内容包括随机变量与随机向量、参数估计、假设检验、回归分析与方差分析、正交试验、随机过程等. 各节后面配有适量习题，书末附有习题答案.

本书与传统的同类教材的区别是：重统计，重应用. 体现了当今工科数学教学的趋势. 本书结构严谨、内容精练、条理清楚、重点突出、例题较多.

本书可作为各类高等院校工程数学课程的教材，也可作为工程技术及管理人员的自学用书或应用参考书.

图书在版编目（CIP）数据

应用概率统计/周润兰，喻胜华主编 . -北京:科学出版社，1999
（高等数学系列教材）

ISBN 7-03-007775-X

Ⅰ. 应… Ⅱ. ①周… ②喻… Ⅲ. ①概率论 ②数理统计
Ⅳ. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 31380 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717

科地亚印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1999 年 8 月第 一 版 开本：850×1168 1/32
1999 年 8 月第一次印刷 印张：9 3/8
印数：1—7 000 字数：239 000

定价：15.00 元

《高等数学系列教材》

主　编　刘楚中

主　审　周叔子

《应用概率统计》

主　编　周润兰　喻胜华
编　者　王仙桃　戴斌祥　万　中
　　　　邓爱珍　许和连　罗　汉

前　言

我国国民经济和科学技术在21世纪的更大发展已成必然之势，培养各类高等专门人才的我国大学教育的改革也势在必行. 作为大学教育中重要一环的大学数学教育的改革应如何革故鼎新，以适应新的形势，这是广大数学教育工作者面临的重大课题. 近年来，我校十分注重这方面的工作，组织了一大批教学经验丰富、又具创新精神的教师进行教学和教材的改革研究.

高等数学是高等院校众多专业学生必修的重要基础理论课，它的设置是为培养各类高等专业人才服务的，因此我们编写的这套高等数学系列教材，在传授知识的同时，注意到通过各环节逐步培养学生具有抽象概括问题的能力、逻辑推理能力、空间想象能力和自学能力，还特别注意培养学生具有比较熟练的运算能力和综合运用所学知识去分析问题和解决问题的能力.

这套系列教材由《一元分析基础》、《多元微积分与代数》、《应用概率统计》和《数学实验》四册组成，它们在结构体系和内容选取方面，不同于以往的众多同类教材，它是按照培养跨世纪人才数学素质的要求编写的，渗透了不少现代数学的观点和内容，以开阔学生的眼界，启迪他们的思维. 正因为如此，这套教材中难免会有不妥之处，希望使用本教材的教师和学生提出宝贵意见. 本教材中带 * 号的内容，可根据授课学时和教学对象进行取舍.

这套系列教材由刘楚中任总主编，周叔子任总主审，其中的《应用概率统计》由周润兰、喻胜华主编，参加编写的人员还有王仙桃、戴斌祥、万中、邓爱珍、许和连和罗汉.

这套系列教材在编写过程中得到了湖南大学教务处的大力支持，在此表示衷心感谢.

湖南大学应用数学系

1998 年 4 月

目　　录

第一章　随机变量 ………………………………………… 1

第一节　概率论的基本概念 ………………………………… 1

一、随机试验 ……………………………………………… 1

二、古典概型 ……………………………………………… 2

三、概率的公理化定义 …………………………………… 4

习题 1-1 …………………………………………………… 6

第二节　条件概率、全概率公式和 Bayes 公式 …………… 7

一、条件概率和乘法公式 ………………………………… 7

二、全概率公式和 Bayes 公式 …………………………… 10

三、独立性 ………………………………………………… 12

习题 1-2 …………………………………………………… 13

第三节　随机变量及其分布 ………………………………… 14

一、随机变量 ……………………………………………… 14

二、随机变量的分布函数 ………………………………… 15

三、几种常见的分布函数 ………………………………… 18

习题 1-3 …………………………………………………… 23

第二章　随机向量　数字特征 ………………………… 26

第一节　随机向量及其分布 ………………………………… 26

一、二维随机向量的联合分布 …………………………… 26

二、二维随机向量的边缘分布 …………………………… 29

三、随机变量的相互独立性 ……………………………… 32

四、两个随机变量的函数的分布 ………………………… 35

习题 2-1 …………………………………………………… 38

第二节　数字特征 …………………………………………… 41

一、数学期望 ……………………………………………… 41

二、方差 …………………………………………………… 47

三、协方差 ………………………………………………… 51

四、相关系数 ……………………………………………… 53

习题 2-2 …… 56
第三节 大数定律和中心极限定理 …… 59
一、大数定律 …… 59
二、中心极限定理 …… 61
习题 2-3 …… 64
第三章 统计估值 …… 66
第一节 数理统计学的基本问题与基本概念 …… 66
一、基本问题 …… 66
二、基本概念 …… 66
习题 3-1 …… 73
第二节 分布函数(或分布密度)的近似求法 …… 74
一、经验分布函数 …… 74
二、频率直方图 …… 75
习题 3-2 …… 76
第三节 数学期望与方差的点估计法 …… 77
一、问题与参数估计的思想 …… 77
二、点估计的优劣标准 …… 77
三、数学期望与方差的点估计法 …… 81
习题 3-3 …… 82
第四节 数学期望与方差的区间估计法 …… 83
一、正态总体数学期望的区间估计 …… 84
二、正态总体方差的区间估计 …… 86
三、两个正态总体数学期望差的区间估计 …… 87
四、两个正态总体方差比的区间估计 …… 90
习题 3-4 …… 92
第五节 最大似然估计法 …… 92
习题 3-5 …… 97
第四章 假设检验 …… 98
第一节 假设检验概述 …… 98
一、假设检验的实际背景 …… 98
二、假设检验的基本思想与实施步骤 …… 100
三、两类错误 …… 102
习题 4-1 …… 103

第二节　一个正态总体的假设检验 …… 103
一、一个正态总体的假设检验 …… 103
二、一个正态总体的方差检验 …… 107
习题 4-2 …… 110
第三节　两个正态总体的假设检验 …… 111
一、两个正态总体的均值差检验 …… 111
二、两个正态总体方差比的检验法 …… 114
习题 4-3 …… 118
第四节　总体分布函数的假设检验 …… 120
习题 4-4 …… 125
第五章　统计分析 …… 127
第一节　回归分析的基本思想 …… 127
一、回归分析的基本思想 …… 127
二、求回归的一般步骤 …… 128
习题 5-1 …… 130
第二节　一元线性回归 …… 130
一、a,b 和 σ^2 的点估计 …… 130
二、回归显著性检验 …… 135
三、预测 …… 139
四、控制 …… 142
习题 5-2 …… 142
第三节　多元线性回归 …… 143
一、多元线性回归的数学模型 …… 144
二、β 的最小二乘估计 …… 145
三、中心化 …… 146
四、多元线性回归的假设检验 …… 148
五、多项式回归 …… 151
习题 5-3 …… 154
第四节　单因素方程分析 …… 155
一、方差分析的基本思想 …… 155
二、单因素方差分析 …… 157
习题 5-4 …… 167
第五节　双因素方差分析 …… 168

一、无交互效应的双因素试验的方差分析 …………………… 168
*二、有交互效应的双因素试验的方差分析 …………………… 174
习题 5-5 ………………………………………………………… 180
第六章 正交试验法 ……………………………………………… 182
第一节 正交表与正交试验 ……………………………………… 182
一、正交表 ……………………………………………………… 182
二、利用正交表安排试验 ……………………………………… 183
三、正交试验的几何解释 ……………………………………… 185
第二节 正交试验结果的分析 …………………………………… 186
一、直观分析 …………………………………………………… 186
二、方差分析 …………………………………………………… 188
习题 6-2 ………………………………………………………… 192
第三节 混合水平的正交试验 …………………………………… 193
一、直接利用混合水平的正交表 ……………………………… 193
二、拟水平法 …………………………………………………… 195
习题 6-3 ………………………………………………………… 197
第四节 考虑交互作用的正交试验 ……………………………… 198
一、交互作用表 ………………………………………………… 198
二、有交互作用的正交试验 …………………………………… 199
习题 6-4 ………………………………………………………… 202
第五节 多指标的试验分析 ……………………………………… 203
第七章 随机过程 ………………………………………………… 208
第一节 随机过程的基本概念 …………………………………… 208
一、随机过程的定义 …………………………………………… 208
二、随机过程的概率分布 ……………………………………… 209
三、随机过程的数字特征 ……………………………………… 211
四、随机微积分 ………………………………………………… 213
习题 7-1 ………………………………………………………… 218
第二节 平稳过程 ………………………………………………… 219
一、平稳过程的定义 …………………………………………… 219
二、平稳过程的相关函数的性质 ……………………………… 221
三、平稳过程的遍历性 ………………………………………… 223
习题 7-2 ………………………………………………………… 227

第三节　马尔科夫过程 …………………………………………………… 228
一、马尔科夫过程的直观描述 ………………………………… 228
二、马氏链 …………………………………………………………… 229
三、时间连续、状态离散的马尔科夫过程 …………………… 236
习题 7-3 ……………………………………………………………… 240
第四节　几类重要的随机过程简介 ……………………………… 240
一、正态过程 ……………………………………………………… 240
二、独立增量过程 ………………………………………………… 242
三、维纳过程 ……………………………………………………… 243
四、泊松过程 ……………………………………………………… 245
习题 7-4 ……………………………………………………………… 248
附表 1　泊松分布表 ………………………………………………… 249
附表 2　标准正态分布表 …………………………………………… 251
附表 3　t 分布表 …………………………………………………… 252
附表 4　χ^2 分布表 ……………………………………………… 253
附表 5　F 分布表 …………………………………………………… 255
附表 6　相关系数检验表 …………………………………………… 264
附表 7　常用正交表 ………………………………………………… 265
习题答案 ……………………………………………………………… 275

第一章　随机变量

第一节　概率论的基本概念

一、随机试验

概率论是一门研究随机现象量的规律性的数学学科. 为了研究随机现象,就要对客观事物进行观察和试验,我们把这种观察和试验统称为试验. 概率论中所研究的试验具有下列特点:

1° 在相同的条件下可重复进行多次;

2° 每次试验的可能结果不止一个,而究竟出现哪个结果,试验不能准确地预言;

3° 试验中一切可能的结果在试验前是已知的,每次试验出现且只出现可能结果中的一个.

我们把具有上述特点的试验称为随机试验. 在重复进行试验时个别结果发生与否具有偶然性,但当重复试验次数相当大时,总有某种规律性出现.

例 1　抛一枚硬币,观察其出现正反面情况,一次试验就是抛一枚硬币,这是随机试验,记为 E. 试验的可能结果有两个:出现正面、出现反面. 在试验前无法断言哪个结果出现,但重复多次后,"出现正面"这个结果的相对频率却呈现出稳定性(即接近 0.5),这便是规律.

随机试验中的每一个可能结果称为基本事件,通常用 ω 表示. 全体基本事件组成的集合称为样本空间,通常用字母 Ω 表示. 我们把每次试验都必须出现的事件称为必然事件,也用 Ω 表示. 把每次试验都不可能出现的事件称为不可能事件,记为 $\varnothing$.

在例 1 中,样本空间为

$$\Omega = \{\text{出现正面、出现反面}\},$$

它是由“出现正面”、“出现反面”这两个基本事件所构成.

在随机试验中可能出现也可能不出现的事件称为随机事件，通常用大写的字母 $A,B,C,\cdots$ 表示.

在例 1 中“出现正面”、“出现反面”都是随机事件，而通常提到的随机事件是由若干个基本事件所组成，因而从集合论的观点可以把随机事件看成是样本空间的某个子集.

对随机事件(简称为事件)有下列一些关系：

1° $A\subset B$：如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则说事件 B 包含事件 A，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，也就是说 $\omega\in A\Rightarrow\omega\in B$.

2° $A\cup B$：事件 A 与 B 中至少有一个发生所构成的事件称为事件 A 与 B 的和(并)，记为 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{\omega\mid\omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$.

3° $A\cap B$：由事件 A 与 B 同时发生而构成的事件称为 A 与 B 的积(交)，记为 $A\cap B$ 或 AB，即 $A\cap B=\{\omega\mid\omega\in A$ 且 $\omega\in B\}$.

4° $AB=\varnothing$，则说事件 A 与 B 互不相容.

5° 如果事件 A、B 满足 $A\cup B=\Omega$ 且 $AB=\varnothing$，则称 B 为 A 的对立事件，记为 $B=\bar{A}$.

6° $A-B$：事件 A 发生而 B 不发生，即 $A-B=\{\omega\mid\omega\in A$ 但 $\omega\notin B\}$.

由 5° 知 $A-B=A\bar{B}$.

二、古典概型

我们讨论一类简单又直观的随机试验，它们具有两个特点：

1° 试验的可能结果的个数有限，即只有有限个基本事件，设为 n 个，记为 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$. 样本空间 Ω 为

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}.$$

2° 在每次试验中它的各种可能结果(即各基本事件)出现的可能性相同(称为等可能性).

具有这两个特点的试验称为古典概型(或等可能概型).

在例 1 中提到的抛硬币观察出现正、反面的试验就是古典概

型.

对古典概型,事件 A 的概率定义如下:

定义 1 设有古典概型 E,它的样本空间 Ω 包含 n 个基本事件. 对任意事件 A,若 A 包含 k 个基本事件,则事件 A 的概率 $P(A)$ 定义为

$$P(A)=\frac{\text{事件 } A \text{ 包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}=\frac{k}{n}.$$

这就是所谓概率的古典定义. 从此定义可看出它具有下列几条性质:

(i)非负性. 对任意事件 A 有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(ii)规范性. 必然事件的概率等于 1,即 $P(\Omega)=1$;不可能事件的概率等于 0,即 $P(\varnothing)=0$;

(iii)可加性. 设事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_m(m\leqslant n)$两两互不相容(即 $A_iA_j=\varnothing,i\neq j$),则

$$P(\bigcup_{i=1}^{m}A_i)=\sum_{i=1}^{m}P(A_i).$$

证 (i)、(ii)由定义即知成立,下证(iii).

设 $A_i=\{\omega_1^{(i)},\cdots,\omega_{k_i}^{(i)}\}$是由 $k_i(\leqslant n)$个不同的基本事件所组成.则

$$P(A_i)=\frac{k_i}{n},$$

而事件

$$\bigcup_{i=1}^{m}A_i=\{\omega_1^{(1)},\cdots,\omega_{k_1}^{(1)};\cdots;\omega_1^{(m)},\cdots,\omega_{k_m}^{(m)}\}$$

包含 $\sum\limits_{i=1}^{m}k_i$ 个不同的基本事件,故

$$P(\bigcup_{i=1}^{m}A_i)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}k_i}{n}=\sum_{i=1}^{m}\frac{k_i}{n}=\sum_{i=1}^{m}P(A_i).$$

例 2 设 100 件产品中有 5 件不合格品,而 5 件不合格品中有 3 件次品 2 件废品,现从这 100 件产品中任取一件,求取到的是不合格品的概率.

解 这个试验属于古典概型，以 A 表示事件“取到的是不合格品”，于是

$$P(A)=\frac{5}{100}=\frac{1}{20}.$$

三、概率的公理化定义

古典概型要求基本事件的总数是有限的，而且每个基本事件的出现都必须具有某种等可能性，但是近代概率论的应用所涉及的情况却多不如此，所以有必要加以抽象地概括而给出概率的公理化定义.

定义 2 事件的概率 P 是定义在事件族 $\mathscr{U}$ 上且满足下列三个条件的函数：

(A)非负性 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(B)规范性 $P(\Omega)=1, P(\varnothing)=0$；

(C)完全可加性 设 $A_i(i=1,2,\cdots)$ 为两两互不相容的事件组（即 $A_iA_j=\varnothing, i\neq j$），则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i).$$

由这个定义可以推出概率 P 的其它一些性质：

1° 若 $A_1,\cdots,A_n$ 两两互不相容，则 $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$.

这条性质的证明只需在(C)中取 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$ 即可得到.

2° 对事件 A、B，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

证 由 $A\cup B=A\cup\overline{A}B$ 知

$$P(A\cup B)=P(A)+P(\overline{A}B).$$

又由 $B=AB\cup\overline{A}B$ 知

$$P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B).$$

于是

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

作为 2°的推论易知

3° $P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$.

4° $P(\overline{A})=1-P(A)$.

4° 的证明由 $\Omega=A\cup\overline{A}$ 及 $P(\Omega)=1$ 即可得到.

5° $P(B-A)=P(B)-P(AB)$.

证 $B-A=B-AB=B(\overline{AB})$,故

$$\begin{aligned}P(B-A)&=P[B(\overline{AB})]\\&=P(B)+P(\overline{AB})-P[B\cup(\overline{AB})]\\&=P(B)+1-P(AB)-1\\&=P(B)-P(AB).\end{aligned}$$

作为 5° 的推论易知

6° 若 $A\subset B$,则 $P(A)\leqslant P(B)$.

例 3 已知事件 A、B 的概率为 $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$,求证 $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$.

证
$$\begin{aligned}P(\overline{A}\overline{B})&=P(\overline{A\cup B})\\&=1-P(A\cup B)\\&=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]\\&=1-[1-P(AB)]\\&=P(AB).\end{aligned}$$

例 4 设事件 A、B 的概率分别为$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{3}$,根据下列情况分别求 $P(B-A)$的值.

(1)$A\subset B$;(2)$P(AB)=\frac{1}{6}$.

解 由 5°知 $P(B-A)=P(B)-P(AB)$.

(1)若 $A\subset B$,则

$$\begin{aligned}P(B-A)&=P(B)-P(A)\\&=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\\&=\frac{1}{12}.\end{aligned}$$

(2)$P(B-A)=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$.

习题 1-1

1. 一口袋中有一只红球和一只白球，依次从中取 2 个球（第一次取出后不再放回），观察其颜色. 写出这个试验的样本空间.

2. 将一枚硬币抛 3 次，观察出现正反面的情况，

(1)写出这个试验的样本空间；

(2)用基本事件表示事件 A："恰有一次出现正面".

3. 设随机试验 E 的样本空间 $\Omega=\{1,2,\cdots,10\}$，事件 $A=\{2,3,4\}$，$B=\{3,4,5\}$，$C=\{5,6,7\}$. 用样本空间 Ω 的子事件表示下列事件：

(1)$\overline{A}B$；(2)$\overline{A}\cup B$；(3)$\overline{AB}$；(4)$\overline{ABC}$；(5)$\overline{A(B\cup C)}$.

4. 从一批零件中任取 2 个，设事件 A 为"第一个零件为合格品"、事件 B 为"第二个零件为合格品". 问 AB、$\overline{A}$、$\overline{B}$、$\overline{AB}$、$A-B$、$A\cup B$ 及 $\overline{A\cup B}$ 分别表示什么事件？

5. 设 A、B、C 是三个事件，试用 A、B、C 的运算关系表示下列事件：

(1)A、B、C 都出现；

(2)A、B、C 都不出现；

(3)A、B、C 都不出现的对立事件；

(4)A、B、C 中不多于两个事件出现；

(5)A、B、C 中至少有两个事件出现.

6. 设一个工人生产了 4 个零件，又 A_i 表示事件"工人生产的第 i 个零件是正品"($i=1,\cdots,4$)，试用诸 A_i 表示下列事件：

(1)没有一个产品是次品；

(2)至少有一个产品是次品；

(3)只有一个产品是次品；

(4)至少有三个产品不是次品.

7. 袋中有 2 个白球，3 个黑球.

(1)从袋中任意取出 1 球，求取出的球是白球的概率；

(2)从袋中任意取出 2 球，求取出的 2 球都是黑球的概率.

8. 设一批产品共 100 件，其中 98 件是合格品，2 件是次品，从中任意抽取 3 件，求：

(1)抽出的 3 件中恰有 1 件是次品的概率；

(2)抽出的 3 件中至少有 1 件是次品的概率.

9. 设一批产品共 100 件，其中 98 件是合格品，2 件是次品，从中任意抽

取 3 件(每次取 1 件,取后放回),求:

(1)抽出的 3 件中恰有 1 件是次品的概率;

(2)抽出的 3 件中至少有 1 件是次品的概率.

10. 在房间里有 10 个人,分别佩戴着从 1 号到 10 号的纪念章,任意选 3 人,记录其纪念章的号码.

(1)求最小的号码为 5 的概率;

(2)求最大的号码为 5 的概率.

11. 某城市的自行车分别以 00001 到 10000 编号,共 10000 辆,问事件 A:"偶然遇到一辆自行车,其牌照号码中没有数字 8"的概率等于多少?

12. 设事件 A、B 及 $A\cup B$ 的概率分别为 p、q、r,求:

$P(AB)$; $P(A\overline{B})$; $P(\overline{AB})$.

13. 设 A_1、A_2 为两个随机事件,证明

$$P(A_1A_2)=1-P(\overline{A}_1)-P(\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2).$$

14. 设 A、B、C 是三个事件且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$,$P(AB)=P(BC)=0$,$P(AC)=\frac{1}{8}$,求事件:"$A$、$B$、$C$ 中至少有一个发生"的概率.

15. 已知在 10 个晶体管中有 2 个次品,在其中取 2 次,每次随机地取 1 只,作不放回抽样,求下列事件的概率:

(1)二只都是正品;

(2)二只都是次品;

(3)一只是正品,一只是次品.

16. 袋中放有 a 个白球和 b 个黑球,随机地取出一个,然后放回,并同时再放进与取出的球同色的球 c 个,再取第二个,这样连续取三次,求取出的 3 个球中头两个是黑球第三个是白球的概率.

第二节 条件概率、全概率公式和 Bayes 公式

一、条件概率和乘法公式

在实际问题中,除了需要考虑事件 B 的概率 $P(B)$ 外,还要在"事件 A 已经出现"这一附加条件下"事件 B 出现"的概率,记为 $P(B|A)$,读作在条件 A 下事件 B 的概率.

在第一节的例 2 中,设 B 表示"取到的是废品",则事件"取到

不合格品且是废品"就是 AB，于是

$$P(B|A)=\frac{2}{5},\qquad P(AB)=\frac{2}{100}=\frac{1}{50}.$$

这样得到关系

$$P(B|A)=\frac{2}{5}=\frac{\frac{2}{100}}{\frac{5}{100}}=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

类似上例的计算可知，上述结论对古典概型中的任何两个事件 A、$B(P(A)>0)$ 均成立. 由此我们给出下列一般定义.

定义 1 设 E 为随机试验，Ω 为样本空间，A、B 为任意两个事件，设 $P(A)>0$，则称

$$P(B|A)\triangleq\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在"事件 A 出现"的条件下事件 B 的条件概率或简称为事件 B 关于事件 A 的条件概率.

条件概率满足概率定义中的三个条件，即对固定的事件 A，若 $P(A)>0$，则

1° 对任何事件 B 有 $0\leqslant P(B|A)\leqslant 1$；

2° $P(\Omega|A)=1, P(\varnothing|A)=0$；

3° 对两两互不相容的事件组 $B_1,\cdots,B_i,\cdots$，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i|A)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i|A).$$

证 1°、2°的证明由定义易得，下证 3°.

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i|A)=\frac{P(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_iA)}{P(A)}=\frac{\sum_{i=1}^{\infty}P(B_iA)}{P(A)}$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{P(B_iA)}{P(A)}=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i|A).$$

由条件概率的定义即得

乘法公式 Ⅰ. 若 $P(A)>0$，则

$$P(AB)=P(A)P(B|A).$$