二阶两个自变数两个未知函数的常系数线性偏微分方程组

华罗庚　吴兹潜　林　伟　著

科学出版社

二阶两个自变数两个未知函数的常系数线性偏微分方程组

华罗庚　吴兹潜　林　伟　著

科　学　出　版　社

1 9 7 9

内 容 简 介

本书研究了二阶两个自变数两个未知函数的常系数线性偏微分方程组的分类，并把它化成两种标准型．在此基础上分别讨论了各类方程组定解问题的存在唯一性．本书还从椭圆型方程组出发，研究了相当广泛的一类函数，即 (λ,k) 型双解析函数．

本书可供数学工作者，高等院校数学系师生参考．

二阶两个自变数两个未知函数的
常系数线性偏微分方程组

华罗庚　吴兹潜　林　伟　著

*

科 学 出 版 社 出 版
北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1979 年 10 月第 一 版　开本：850×1168 1/32
1979 年 10 月第一次印刷　印张：10 1/2
印数：0001—60,450　字数：275,000

统一书号：13031・973
本社书号：1374・13—1

定价： 1.30 元

甲二

序　　言

一九六二年承广东中山大学邀请前去讲学，我讲了八讲，其内容写成《从单位圆谈起》一书(科学出版社，1977). 我讲得不多，但学了不少，例如从胡金昌教授的常微分方程的研究中就看到了辛群的应用，又从华南工学院王康廷副教授的偏微分方程组的研究中，使我注意到分类的重要性．等等．

对于偏微分方程组我所知极少，但是林伟、吴兹潜经常和我一齐讨论这个问题，后来他们就开始在这方面从事工作，两年多时间内就写成这本书的初稿． 书稿送交出版时，刚好就遭遇到林彪、"四人帮"的干扰破坏，以致这书稿被搁了十三年．

幸亏以华国锋同志为首的党中央一举粉碎了"四人帮"，才使这本书有了问世的机会． 论时间从开始写到现在已经十五年了，而实际上只不过工作了两年多． 一方面看到青年同志奋发有为，增强了能够在短期内赶上世界水平的信心，另方面更痛恨林彪、"四人帮"浪费了我们宝贵时光，扼杀科学发展，不然这本书的水平会比现在更好．

这本书的出发点是从最简单的两个变数、两个未知函数、两个齐次方程开始，所以推广和发展的余地是很大的．又因为它与普通的微分方程相比函数多了，方程多了，所以对边值问题、初始值问题以及各种混合问题的提法也就多了，使内容更丰富，因而更有发展前途．这许多问题的继续发展，可能是今后研究的方向．至于偏微分方程组的应用(例如，计算结构力学、断裂力学等)和实际计算(例如，有限单元法、条形单元法等)都不在本书范围内，许多其他应用还有待于今后去发现．

总之，我对这方面是所知不多的，看青年们能写出这本书来非常高兴，不揣冒昧写这几句话作为序言．欢迎大家多加批评．

华　罗　庚

一九七八年五月

目　　录

第一章　二阶两个自变数两个未知函数线性偏微分方程组分类

二阶偏微分方程

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\cdots=0 \qquad (*)$$

与方程

$$\bar{a}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\bar{b}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\bar{c}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\cdots=0 \qquad (**)$$

的等价关系是由自变数变换来定义的．方程(*)经过自变数变换

$$\xi=\xi(x, y),\quad \eta=\eta(x, y),\quad \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)}\neq 0,$$

变成方程(**)，并且

$$\bar{a}=\xi_x^2 a+2\xi_x\xi_y b+\xi_y^2 c,$$
$$\bar{b}=\xi_x\eta_x a+(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)b+\xi_y\eta_y c,$$
$$\bar{c}=\eta_x^2 a+2\eta_x\eta_y b+\eta_y^2 c.$$

因此，方程(*)可以化成下面的三种形式的方程之一：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\cdots=0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\cdots=0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\cdots=0.$$

这就是方程(*)的标准形式．

最简单的偏微分方程组是二阶两个自变数两个未知函数线性偏微分方程组

$$A\frac{\partial^2}{\partial x^2}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+2B\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+C\frac{\partial^2}{\partial y^2}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=0.$$

其中，A，B，C 是二行二列的实方阵，故方程组有十二个参数．参数越多就越复杂．因此，把方程组化成标准型就更为需要了．

§1 偏微分方程组之间的等价关系

矩阵形式的偏微分方程

$$A\frac{\partial^2}{\partial x^2}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+2B\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+C\frac{\partial^2}{\partial y^2}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=0 \qquad \text{(I)}$$

表示二阶两个自变数 x，y 的两个未知函数 u，v 的偏微分方程组，这里

$$A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\a_3 & a_4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_1 & b_2\\b_3 & b_4\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}c_1 & c_2\\c_3 & c_4\end{pmatrix}$$

都是实方阵，方程组 (I) 与方程组

$$A_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+2B_1\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+C_1\frac{\partial^2}{\partial y^2}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=0 \qquad \text{(II)}$$

之间的等价关系是由以下三种运算来定义的：

i) 方程之间的线性组合．即方程组 (I) 左乘一个二行二列的满秩方阵

$$P=\begin{pmatrix}p_1 & p_2\\p_3 & p_4\end{pmatrix},\quad |P|\neq 0,$$

使方程组 (I) 的系数变成

$$A_1=PA,\ B_1=PB,\ C_1=PC,\ |P|\neq 0.$$

ii) 未知函数的变换．当未知函数列阵 $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ 用一个二行二列的满秩方阵

$$Q=\begin{pmatrix}q_1 & q_2\\q_3 & q_4\end{pmatrix},\quad |Q|\neq 0$$

来作线性变换

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \quad |Q| \neq 0$$

时，方程组 (I) 的系数变成

$$A_1 = AQ, \ B_1 = BQ, \ C_1 = CQ, \ |Q| \neq 0.$$

iii) 自变数的线性变换. 作自变数的非异线性变换

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} \neq 0$$

时，由于

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = p^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2pr \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_1} + r^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = pq \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + (ps + qr) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_1} + rs \frac{\partial^2}{\partial y_1^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = q^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2qs \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_1} + s^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}.$$

使方程组 (I) 的系数变成

$$A_1 = p^2 A + 2pqB + q^2 C,$$
$$B_1 = prA + (ps + qr)B + qsC,$$
$$C_1 = r^2 A + 2rsB + s^2 C.$$

定义 若方程组 (I) 连续运用以上三种运算，使方程组 (I) 变成方程组 (II)，则方程组 (I) 和方程组 (II) 是互相等价的.

§2 可分解的方程组

定义 若方程组 (I) 经过方程之间的线性组合，未知函数的线性变换，自变数的线性变换等三种非奇异运算，使方程组 (I) 的系数变成

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix},$$

则称方程组 (I) 是可分解的.

如果方程组 (I) 是可分解的，通过上述三种变换后，它可以写

成

$$a_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b_1\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c_1\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

$$a_3\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+2b_3\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+c_3\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$=-\left(a_4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b_4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c_4\frac{\partial^4 u}{\partial y^2}\right).$$

因此，求方程组 (I) 的定解问题，变成求两个二阶两个自变数两个未知函数的常系数线性偏微分方程的定解问题.

附记　1975 年 A. B. Бицадзе[11] 认为方程组

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=0 \qquad (*)$$

是具有两条重特征线 $x-y=\text{const}$, $x+y=\text{const}$ 的双曲型方程组. 我们要指出：方程组(*)是可分解的，而且不是双曲型的. 对方程组 (*) 左乘以 $P=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$, 未知函数作变换 $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix}$, 则方程组 (*) 变成

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix}=0.$$

实际上，它是两个二阶抛物型方程：

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 v_1}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}=0.$$

定理　方程组 (I) 是可分解的充分而且必要的条件是存在两个非零矢量 (a, b) 及 (a', b') 使

$$(a, b)A = \alpha(a', b'),\ (a, b)B = \beta(a', b'),$$
$$(a, b)C = \gamma(a', b'). \tag{2.1}$$

这里，α, β, γ 是实数.

证 1) 若方程组 (I) 是可分解的，则方程组 (I) 可以经过 i), ii), iii) 三种非异的变换使它们的系数变成

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix},\quad B_1 = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix},\quad C_1 = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix},$$

则存在非零矢量 $(1, 0)$，使

$$(1, 0)A_1 = a_1(1, 0),\ (1, 0)B_1 = b_1(1, 0),$$
$$(1, 0)C = c_1(1, 0).$$

如果 A_1, B_1, C_1 是方程组 (I) 运用 i), ii) 两种变换得来的，则

$$A_1 = PAQ,\ B_1 = PBQ,\ C_1 = PCQ,\ |P| \neq 0,\ |Q| \neq 0.$$

得

$$(a, b) = (1, 0)P,\ (a', b') = (1, 0)Q^{-1}$$

使条件 (2.1) 成立.

若 A_1, B_1, C_1 是方程组 (I) 运用 iii) 变换得来的，则

$$A_1 = p^2A + 2pqB + q^2C,$$
$$B_1 = prA + (ps + qr)B + qsC,\quad \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} \neq 0,$$
$$C_1 = r^2A + 2rsB + s^2C,$$

求其反变换得

$$A = p_1^2A_1 + 2p_1q_1B_1 + q_1^2C_1,$$
$$B = p_1r_1A_1 + (p_1s_1 + q_1r_1)B_1 + q_1s_1C_1,$$
$$C = r_1^2A_1 + 2r_1s_1B_1 + s_1^2C_1.$$

这里，

$$\begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ r_1 & s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}^{-1},\quad \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ r_1 & s_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

又由于

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix},\quad B_1 = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix},\quad C_1 = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix},$$

故矢量

$$(a, b)=(1, 0), \quad (a', b')=(1, 0)$$

使条件 (2.1) 成立.

2) 如果存在两个非零矢量 (a, b) 及 (a', b') 使条件(2.1)成立,则有满秩方阵 P, Q, 使

$$(a, b)=(1, 0)P, \quad (a', b')=(1, 0)Q^{-1}.$$

由 (2.1) 有

$$(1, 0)PA=\alpha(1, 0)Q^{-1}, \quad (1, 0)PB=\beta(1, 0)Q^{-1},$$
$$(1, 0)PC=\gamma(1, 0)Q^{-1}.$$

命

$$A_1=PAQ, \quad B_1=PBQ, \quad C_1=PCQ,$$

得

$$A_1=\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \quad B_1=\begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}, \quad C_1=\begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}.$$

即方程组 (I) 运用 i), ii) 两种变换, 它变成可分解的情形. 明欲证.

§3 特征四次型的标准型

定义 行列式

$$F(\xi, \eta)=|A\xi^2+2B\xi\eta+C\eta^2|$$

称为方程组 (I) 的特征四次型.

方程组 (I) 经过 i), ii) 两种变换,变成方程组 (II), 而且

$$A_1=PAQ, \ B_1=PBQ, \ C_1=PCQ, \ |P|\neq 0, \ |Q|\neq 0.$$

故特征四次型为

$$F(\xi, \eta)=|A_1\xi^2+2B_1\xi\eta+C_1\eta^2|$$
$$=|P||Q||A\xi^2+2B\xi\eta+C\eta^2|.$$

得

定理 I 若方程组(I)运用 i), ii) 两种变换,特征四次型仅差一个不为零的常数因子 $|P||Q|$.

定理 II 若方程组 (I) 运用 iii) 变换, 则

$$F_1(\xi, \eta)=|A_1\xi^2+2B_1\xi\eta+C_1\eta^2|=F(\xi', \eta'),$$

而

$$\xi' = p\xi + r\eta, \quad \eta' = q\xi + s\eta.$$

证　方程组 (I) 运用 iii) 变换后得

$$A_1 = p^2A + 2pqB + q^2C,$$

$$B_1 = prA + (ps + qr)B + qsC, \quad \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} \neq 0.$$

$$C_1 = r^2A + 2rsB + s^2C.$$

故

$$\begin{aligned} F_1(\xi, \eta) &= |A_1\xi^2 + 2B_1\xi\eta + C_1\eta^2| \\ &= |A(p^2\xi^2 + 2pr\xi\eta + r^2\eta^2) + 2B[pq\xi^2 + (ps \\ &\quad + qr)\xi\eta + rs\eta^2] + C(q^2\xi^2 + 2qs\xi\eta + s^2\eta^2)| \\ &= |A\xi'^2 + 2B\xi'\eta' + C\eta'^2| \\ &= F(\xi', \eta'). \end{aligned}$$

得所证.

命

$$\frac{\xi_i}{\eta_i} = \tau_i, \quad \frac{\xi_i'}{\eta_i'} = \tau_i', \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

分别是 $F_1(\tau, 1) = 0$ 及 $F(\tau', 1) = 0$ 的根. 而

$$\tau_i' = \frac{p\tau_i + r}{q\tau_i + s}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{3.1}$$

是关于 τ_i 的实系数的线性变换.

四次方程的根有下面的九种情况：1. 两对不同复根；2. 一对复重根；3. 一对复根、一实重根；4. 一对复根，两不同实根；5. 四不同实根；6. 三不同实根；7. 两实重根；8. 一实三重根、一单根；9. 一实四重根.

特征四次型的根具有四次方程的根的九种情形. 通过线性变换(3.1)可以将特征四次型化成标准型式. 现在依照 $F(\tau, 1) = 0$ 的根的性质依次讨论于下：

1) $F(\tau, 1) = 0$ 有两对不同复根. 设这两对复根是 τ_1, $\bar{\tau}_1$, τ_2, $\bar{\tau}_2$. 作 τ_1, τ_2 的连线的垂直平分线，交 x 轴于点 O_1，以 O_1 为

心，过点 τ_1, τ_2 作圆 c，则 c 也通过 $\bar{\tau}_1$、$\bar{\tau}_2$，且与 x 轴正交 (图 1.1).
命其交点为 p, q，则线性变换

$$w = \rho^2 \frac{z - p}{z - q},$$

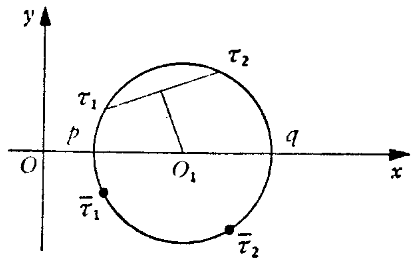

图 1.1

把圆 c 变为虚轴，把 τ_1, $\bar{\tau}_1$, τ_2, $\bar{\tau}_2$ 变成 i, $-i$, ki, $-ki$, $0 < k < 1$，即得

$$F(\xi, \eta) = (\xi^2 + \eta^2)(\xi^2 + k^2\eta^2), \quad 0 < k < 1. \tag{3.2}$$

同样可以证明，当 $F(\tau, 1) = 0$ 有一对复重根时，

$$F(\xi, \eta) = (\xi^2 + \eta^2)^2, \tag{3.3}$$

它是 (3.2) 当 $k = 1$ 时的情形.

2) $F(\tau, 1) = 0$ 有两不同实根与一对复根(图 1.2). 设 $F(\tau, 1) = 0$ 的两实根是 p, q, 线性变换

$$z' = \frac{z - p}{z - q}$$

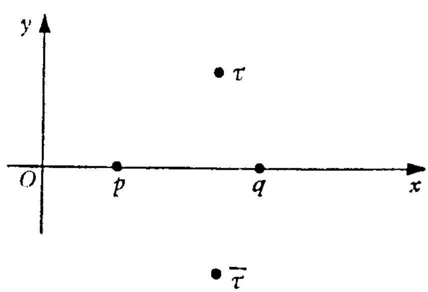

图 1.2

把点 p, q 变成 0, ∞. 再作变换

$$w = \rho^2 z',$$

它把一对复根变成 $e^{i\theta}$, $e^{-i\theta}$, $0 < \theta < \pi$. 如果 $\theta \geqslant \frac{\pi}{2}$, 则 $w' = -\frac{1}{w}$, 把 $e^{i\theta}$, $e^{-i\theta}$ 变成 $e^{i(\pi-\theta)}$, $e^{-i(\pi-\theta)}$, 故 $0 < \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, 得

$$F(\xi, \eta) = \xi\eta(\xi^2 + 2\cos\theta\xi\eta + \eta^2).$$

或者写成

$$F(\xi, \eta) = \xi\eta(\xi^2 + 2\alpha\xi\eta + \eta^2), \quad 0 \leqslant \alpha < 1. \tag{3.4}$$

3) $F(\tau, 1) = 0$ 有四个不同实根. 设 $F(\tau, 1) = 0$ 的四个不同实根是 a_1, a_2, a_3, a_4, 且设 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. 作线性变换

$$z' = \frac{z - a_1}{z - a_4},$$

它把 a_1, a_2, a_3, a_4 变成 0, p, q, ∞, 而且 $0 < p < q < \infty$. 变换

$$w = -\frac{z}{\sqrt{pq}},$$

又把 0, p, q, ∞ 变成 0, $-k$, $-\frac{1}{k}$, $-\infty$, $0 < k < 1$. 故得

$$F(\xi, \eta) = \xi\eta(\xi^2 + 2\alpha\xi\eta + \eta^2). \tag{3.5}$$

这里, $\alpha = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right) > 1$, $0 < k < 1$.

同理, 当 $F(\tau, 1) = 0$ 有三个不同实根时, 得

$$F(\xi, \eta) = \xi\eta(\xi + \eta)^2, \tag{3.6}$$

即 (3.6) 是 (3.5) 当 $\alpha = 1$ 时的情形.

4) $F(\tau, 1) = 0$ 有一实重根与一对复根. 不妨假设 $F(\tau, 1) = 0$ 的根是 0, 0, τ, $\bar{\tau}$. 过 0, τ, $\bar{\tau}$ 作圆 c 与 x 轴正交 (图 1.3). 线性变换把圆 c 变成虚轴, 把点 0, τ, $\bar{\tau}$ 变成 0, i, $-i$. 得

$$F(\xi, \eta) = \xi^2(\xi^2 + \eta^2). \tag{3.7}$$

5) $F(\tau, 1) = 0$ 有两个不同实重根. 通过线性变换可以将这两个不同的实根变成 0, ∞. 得

$$F(\xi, \eta) = \xi^2\eta^2. \tag{3.8}$$

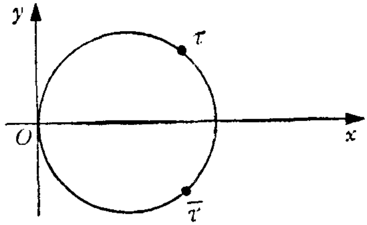

图 1.3

6) $F(\tau, 1) = 0$ 有一实三重根与一实单根时，得

$$F(\xi, \eta) = \xi^3 \eta. \tag{3.9}$$

7) $F(\tau, 1) = 0$ 有一实四重根时，得

$$F(\xi, \eta) = \xi^4. \tag{3.10}$$

综上所述．特征四次型可以依照其根的性质，通过变换 iii)化成下面两种标准型式之一：

$$F(\xi, \eta) = (\xi^2 + \varepsilon\eta^2)(\xi^2 + k^2\eta^2). \tag{III}$$

$\varepsilon = 1, \begin{cases} 0 < k < 1, & \text{当 } F(\xi, \eta) = 0 \text{ 有两对不同复根;} \\ k = 1, & \text{当 } F(\xi, \eta) = 0 \text{ 有一对复重根;} \\ k = 0, & \text{当 } F(\xi, \eta) = 0 \text{ 有一对复根、一个实重根.} \end{cases}$

$\varepsilon = 0$, $k = 0$, 当 $F(\xi, \eta) = 0$ 有一实四重根．

$$F(\xi, \eta) = \xi\eta(\delta\xi^2 + 2\alpha\xi\eta + \varepsilon\eta^2). \tag{IV}$$

$\delta = \varepsilon = 1, \begin{cases} 0 \leqslant \alpha < 1, & \text{当 } F(\xi, \eta) = 0 \text{ 有两不同实根、一对复根;} \\ \alpha = 1, & \text{当 } F(\xi, \eta) = 0 \text{ 有三不同实根;} \\ \alpha > 1, & \text{当 } F(\xi, \eta) = 0 \text{ 有四不同实根.} \end{cases}$

$\delta = 1$, $\varepsilon = 0$, $\alpha = 0$, 当 $F(\xi, \eta) = 0$ 有一实三重根，一实单根；

$\delta = \varepsilon = 0$, $\alpha = 1$, 当 $F(\xi, \eta) = 0$ 有两实重根．

§4 标准型(A)

考虑特征四次型

$$F(\xi, \eta) = (\xi^2 + \varepsilon\eta^2)(\xi^2 + k^2\eta^2), \tag{III}$$