

非线性科学丛书

符号动力系统

周作领 著

张景中 谢惠民 审阅

上海科技教育出版社

Advanced Series In Nonlinear Science

Symbolic Dynamics

Zhou Zuoling

Department of Mathematics, Lingnan College, Zhongshan University,
Guangzhou Guangdong, 510275, China

Shanghai Scientific and Technological Education
Publishing House, SHANGHAI, 1997

内 容 提 要

本书是非线性科学丛书中的一种,包括符号动力系统的一个严格数学描述和它在一般动力系统理论研究中的应用,特别地,包含有限型子转移的非游荡集结构,拓扑熵估计和混沌存在条件以及它们之间的关系的完整理论。全书共分六章,其中前两章属预备性质,提供较为完整的拓扑动力系统基础。从第3章起讨论符号动力系统,包括全转移的动力性状和应用,有限型子转移的动力性状和少许一般子转移的内容。本书可供数学系高年级学生,研究生和青年教师阅读,也可供研究混沌物理及其他科技工作者参考之用。

本书由张景中和谢惠民审阅。

非线性科学丛书

符号动力系统

周作领 著

张景中 谢惠民 审阅

上海科技教育出版社出版发行

(上海市冠生园路 393 号)

各地新华书店经销 商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 6 字数 155,000

1997 年 12 月第 1 版 1997 年 12 月第 1 次印刷

印数: 1—3200 本

ISBN 7-5428-1416-8/O·131 定价:(精装本)12.90 元

Abstract

Symbolic dynamics has a lot of theoretical and practical applications and the purpose of this book is to provide a rigorous and systematical mathematical description of it. The first two chapters of this book are used to introduce the basic notions of the topological dynamics, especially, including topological entropy and chaos. From the third chapter, around the three most important concepts, namely the nonwandering set, topological entropy and chaos, the shifts, especially subshifts of finite type are discussed. In the sixth chapter, we use two examples to discuss the general subshifts, whose general research has been not enough yet and also introduce a few substitution dynamical systems. This book contains some original contributions of the author. In order to read this book, the basic knowledge of the general topology is necessary.

非线性科学丛书编辑委员会

主 编：郝柏林

副主编：郑伟谋 吴智仁

编 委：（按姓氏笔画为序）

丁鄂江	文志英	朱照宣
刘式达	刘寄星	孙义燧
杨清建	李邦河	张洪钧
张景中	陈式刚	周作领
赵凯华	胡 岗	顾 雁
倪皖荪	徐京华	郭柏灵
陶瑞宝	谢惠民	蒲富恪
霍裕平	魏荣爵	

出版说明

现代自然科学和技术的发展，正在改变着传统的学科划分和科学研究的方法。“数、理、化、天、地、生”这些曾经以纵向发展为主的基础学科，与日新月异的新技术相结合，使用数值、解析和图形并举的计算机方法，推出了横跨多种学科门类的新兴领域。这种发展的一个重要特征，可以概括为“非”字当头，即出现了以“非”字起首而命名的一系列新方向和新领域。其中，非线性科学占有极其重要的位置。这决非人们“想入非非”，而是反映了人类对自然界认识过程的螺旋式上升。

曾几何时，非线性还被人们当作个性极强，无从逾越的难题。每一个具体问题似乎都要求发明特殊的算法，运用新颖的技巧。诚然，力学和数学早就知道一批可以精确求解的非线性方程，物理学也曾经严格地解决过少数非平庸的模型。不过，这些都曾是稀如凤毛麟角的“手工艺”珍品，人们还没有悟出它们的普遍启示，也没有看到它们之间的内在联系。

20世纪60年代中期，事情从非线性现象的两个极端同时发生变化。一方面，描述浅水波运动的一个偏微分方程的数值计算，揭示了方程的解具有出奇的稳定和保守性质。这启发人们找到了求解一大类非线性偏微分方程的普遍途径，即所谓“反散射”方法。反散射方法大为扩展了哈密顿力学中原有的可积性概念，反映了这类方程内秉的对称和保守性质。到了80年代，反散射方法推广到量子问题，发现了可积问题与统计物理中严格可解模型的联系。

60年代初期还证明了关于弱不可积保守系统普遍性质的KAM定理。于是,非线性问题的可积的极端便清楚勾划出来,成为一个广泛的研究领域。虽然这里的大多数进展还只限于时空维数较低的系统,但它对非线性科学发展的促进作用是不可估量的。

另一方面,在“不可积”的极端,对KAM定理条件的“反面文章”,揭示了保守力学系统中随机性运动的普遍性,而在耗散系统中则发现了一批奇怪吸引子和混沌运动的实例。这些研究迅速地融成一片,一些早年被认为是病态的特例也在新的观点下重新认识。原来不含有任何外来随机因素的完全确定论的数学模型或物理系统,其长时间行为可能对初值的细微变化十分敏感,同投掷骰子一样地随机和不可预测。然而,混沌不是无序,它可能包含着丰富的内部结构。

同时,由于计算科学特别是图形技术的长足进步,人们得以理解和模拟出许多过去无从下手研究的复杂现象。从随机与结构共存的湍流图象,到自然界中各种图样花纹的选择与生长,以及生物形态的发生过程,都开始展现出其内在的规律。如果说,混沌现象主要是非线性系统的时间演化行为,则这些复杂系统要研究的是非线性地耦合到一起的大量单元或子系统的空间组织或时空过程。标度变换下的不变性、分形几何学和重正化群技术在这里起着重要作用。

在由上述种种方面汇成的非线性科学洪流中,许多非线性数学中早已成熟的概念和方法开始向其他学科扩散,同时也提出了新的深刻的数学问题。物理学中关于对称和守恒,对称破缺,相变和重正化群的思想,也在日益增多的新领域中找到应用。“非线性”一词曾经是数学中用以区别于“线性”问题的术语,非线性科学正在成为跨学科的研究前沿。各门传统学科中都有自己的非线性篇章,非线性科学却不是这些篇章的总和。非线性科学揭示各种非线性现象的共性,发展处理它们的普遍方法。

这样迅猛发展的跨学科领域,很难设想用少数专著加以概括,

何况学科发展的不少方面还未成熟到足以总结成书的地步。于是,有了动员在前沿工作的教学和研究人員,以集体力量撰写一套“非线性科学丛书”的想法。在上海科技教育出版社的大力支持下,这一计划得以付诸实现。

这套“非线性科学丛书”不是高级科普,也不是大块专著。它将致力于反映非线性科学各个方面的基本内容和最新进展,帮助大学高年级学生、研究生、博士后人員和青年教师迅速进入这一跨学科的新领域,同时为传统自然科学和工程技术领域中的研究和教学人員更新知识提供自学教材。非线性科学的全貌将由整套丛书刻划,每册努力讲清一个主题,一个侧面,而不求面面俱到,以免失之过泛。在写作风格上,作者们将努力深入浅出,图文并茂,文献丰富;力求有实质内容,无空洞议论,以真刀真枪脚踏实地武装读者。从读者方面,自然要求具备理工科大学本科的数学基础,和读书时自己主动思索与推导的习惯。

“非线性科学丛书”的成功,取决于读者和作者的支持。我们衷心欢迎批评和建议。

郝柏林

1992年4月30日于北京中关村

前 言

动力系统是非线性科学的一个重要组成部分.在本书中,一个动力系统即是指由拓扑空间上的连续自映射所生成的迭代系统.给定一个拓扑空间和其上的一个连续自映射,就生成一个动力系统.符号动力系统是由有限符号空间上转移自映射所生成的迭代系统,是非常特殊的一类动力系统.既是如此,我们何以要如此重视它们,而专门著书论述它们呢?这是因为符号动力系统具有广泛的应用,包括在混沌物理学、计算复杂性、计算机科学乃至编码学等学科和分支中的应用,也包括在一般动力系统理论研究中的应用.在动力系统研究中,符号动力系统既是一个重要研究对象,也同时是一个强有力的研究工具.

首先,符号动力系统具有典型复杂的动力性状.当我们在某种意义下需要判断一个动力系统是复杂的抑是简单的,我们往往拿它与符号动力系统相比较.斯梅尔(S. Smale)马蹄已是复杂系统的代名词,究其本质是它蕴涵符号动力系统.在拓扑熵和混沌(紊动)这两个重要概念相继出现并成为重要研究对象之后,通过拓扑共轭或半共轭,符号动力系统已经成为研究它们的最重要的工具.

在拓扑动力系统的研究中,我们的最终目标是一般性的结论,即除了底空间的紧致可度量性和其上作用的连续性外,不附加任何其他假设条件.这样的系统有时太广泛,往往使人无从下手.一个普遍被遵循的路线是由特殊到一般.线段动力系统和圆周动力系统受底空间拓扑结构的制约,其结论一般不具有普遍性.一个从特殊到一般的极好过渡是符号动力系统.当我们形成某种猜测时,可以先对符号动力系统加以验证,成功之后再考虑向一般情形推广.符号动力系统是介于特殊系统和一般系统之间的一个窗口

和试验区。

在数学研究中,构造反例往往和证明命题同样重要。在动力系统研究中也不例外。构造反例,其方法当然越简单越初等越好。符号动力系统以其特有的表达方式,为动力系统研究提供了一个绝好的几乎无可替代的构造反例的工具。

作者所体会到的符号动力系统的重要性大体就是如此了。一个重要事实是,翻开任何一本动力系统的书,包括微分动力系统甚至关于流的书,几乎没有不涉及符号动力系统的。可以说,符号动力系统是动力系统的基本功。符号动力系统在遍历理论和分形理论中同样是重要研究内容和研究工具,但这些已超出了本书范围,我们将不涉及。

在本丛中,关于符号动力系统或较多涉及符号动力系统的,至少有[7]和[11]。前者是符号动力系统在混沌物理学中的典型应用,后者则广泛涉及算法复杂性、自动机理论以及一般形式语言等研究内容。本书的目的是希望为符号动力系统本身提供一个由浅入深但严格的数学叙述。本书共分六章,前两章属预备知识,在给出动力系统的定义之后,在一般形式下给出从回复性到拓扑熵和混沌这样一些基本概念的定义和有关基本命题,一方面为读者提供动力系统的基础,也为我们以后讨论符号动力系统提供方便。我们的论述将是严格的,并给出几乎全部命题的证明。从第3章起,讨论符号动力系统,包括全转移的动力性状和应用,有限型子转移的动力性状(由 $0,1$ 方阵描述)和少许一般子转移的内容。需要声明的是,本书对符号动力系统的阐述远非全面,而仅仅是作者过去涉猎过和感兴趣的部分,其中包括了作者在符号动力系统方面几乎全部工作(涉及遍历理论部分除外,这已超出本书范围),可以说是作者这方面工作的一个总结。

本书写作时间不长,但涉及作者的研究工作却历时至少10年。在这期间,作者先后获得过中山大学基金、中山大学高等学术研究中心基金、广东省基金、国家教委博士点基金、国家自然科学基金

基金和国家科委攀登项目基金的资助。如果没有这些资助，则无本书。

本书初稿完成于作者作为“访问学人”于1994年至1995年访问香港中文大学联合书院(数学系)期间。作者衷心感谢李卓汝院长和已故黄友川教授当年的盛情邀请，衷心感谢吴恭孚教授和岑嘉评教授的热情接待，衷心感谢香港中文大学图书馆为作者提供的方便。

周 作 领

1995年10月31日于中山大学

目 录

非线性科学丛书出版说明

前言

第 1 章 拓扑动力系统基础	1
§ 1 动力系统和子系统	1
§ 1.1 动力系统和子系统	1
§ 1.2 映射空间	5
§ 2 回复性	5
§ 2.1 回复性	5
§ 2.2 ω -极限集	8
§ 3 拓扑传递性和拓扑混合性	12
§ 3.1 拓扑传递性	12
§ 3.2 拓扑混合性	14
§ 4 极小集和几乎周期点	15
§ 4.1 极小集和极小映射	15
§ 4.2 几乎周期点	16
§ 5 拓扑共轭与半共轭	18
§ 5.1 紧致系统的等价分类——拓扑共轭	18
§ 5.2 拓扑半共轭与极小覆盖	20
第 2 章 拓扑熵与混沌	24
§ 6 拓扑熵	25
§ 6.1 拓扑熵的开覆盖定义	25
§ 6.2 拓扑熵的 Bowen 定义	27
§ 6.3 拓扑熵的基本性质	28
§ 6.4 拓扑熵的估计与计算	36

§ 7 混沌	41
§ 7.1 两个重要定理	41
§ 7.2 李-约克混沌	49
§ 7.3 其他混沌	52
第 3 章 符号动力系统	56
§ 8 符号空间与转移自映射	56
§ 8.1 符号空间与转移自映射	56
§ 8.2 符号动力系统的动力性状	59
§ 8.3 转移自映射的混沌性状	62
§ 9 子转移	68
§ 9.1 子转移和排除系统	68
§ 9.2 有限型子转移和阶数	71
§ 10 符号动力系统的应用	74
§ 10.1 斯梅尔马蹄	74
§ 10.2 转移不变集	78
§ 10.3 拓扑熵映射的连续性	86
第 4 章 有限型子转移与非负方阵	95
§ 11 非负方阵	95
§ 11.1 不可约性和非周期性	95
§ 11.2 非负方阵的有向图	100
§ 12 有限型子转移的转移方阵	103
§ 12.1 转移方阵	103
§ 12.2 转移方阵的限制	105
第 5 章 有限型子转移的动力性状	112
§ 13 有限型子转移的非游荡集与传递性	112
§ 13.1 有限型子转移的非游荡集	112
§ 13.2 回复性及其他	119
§ 14 有限型子转移的拓扑熵与混沌	126
§ 14.1 子转移的拓扑熵计算	126

§ 14.2 有限型子转移的混沌性状	132
§ 15 有限型子转移的混合性	137
§ 15.1 辅助命题	138
§ 15.2 若干等价条件	143
第 6 章 一般子转移	151
§ 16 两个例子	152
§ 16.1 例子 1	152
§ 16.2 例子 2	159
§ 17 代换动力系统简介	165
参考文献	171

Contents

Preface

Chapter 1 The foundation of topological dynamics	1
§ 1 Topological dynamics	1
§ 1.1 Dynamical Systems and Subsystems	1
§ 1.2 Mapping Spaces with the C^0 -topology	5
§ 2 Recurrence	5
§ 2.1 Recurrence	5
§ 2.2 ω -limit sets	8
§ 3 Topological Transitivity and Mixing	12
§ 3.1 Topological Transitivity	12
§ 3.2 Topological Mixing	14
§ 4 Minimal Sets and Almost Periodic Points	15
§ 4.1 Minimal Sets and minimal Mappings	15
§ 4.2 Almost Periodic Points	16
§ 5 Topological conjugacy and Semi-Conjugacy	18
§ 5.1 Equivalent Classification of Systems —Topological Conjugacy	18
§ 5.2 Topological Semi-Conjugacy and Minimal Coverings	20
Chapter 2 Topological Entropy and Chaos	24
§ 6 Topological Entropy	25
§ 6.1 Definition Using Open Coverings	25
§ 6.2 Bowen's Definition	27

§ 6.3	Basic Properties of Topological Entropy	28
§ 6.4	Estimation and Calculation of Topological Entropy.....	36
§ 7	Chaos.....	41
§ 7.1	Two Important Theorems.....	41
§ 7.2	Chaos in the Li-Yorke's Sense	49
§ 7.3	Other Chaos	52
Chapter 3	Symbolic Dynamics	56
§ 8	Symbolic Spaces and Shifts	56
§ 8.1	Symbolic Spaces and Shifts	56
§ 8.2	Dynamical Behavior of Shifts.....	59
§ 8.3	Chaotic Behavior of Shifts	62
§ 9	Subshifts	68
§ 9.1	Subshifts and Excluded Block Systems.....	68
§ 9.2	Subshifts of Finite Type and Order	71
§ 10	Some Applications of Symbolic Dynamics.....	74
§ 10.1	Smale Horseshoe	74
§ 10.2	Shift Invariant Sets.....	78
§ 10.3	The Continuity of Mappings of Topolo- gical Entropy	86
Chapter 4	Subshifts of Finite Type.....	95
§ 11	Non-negative Matrices	95
§ 11.1	Irreducibility and Aperiodicity.....	95
§ 11.2	Directed Gragh of Non-negative Matrix.....	100
§ 12	Shift Matrices of Subshifts of Finite Type	103
§ 12.1	Shift Matrices	103
§ 12.2	Some Restrictions on Shift Matrices	105
Chapter 5	Dynamical Behavior of Subshifts of	

Finite Type	112
§ 13 Nonwandering Sets and Transitivity.....	112
§ 13.1 Nonwandering Sets	112
§ 13.2 Recurrence and All That	119
§ 14 Topological Entropy and Chaos of Subshifts of Finite Type	126
§ 14.1 Calculation of Topological Entropy of Subshifts.....	126
§ 14.2 Chaotic Behavior of Subshifts of Finite Type.....	132
§ 15 Mixing of Shifts of Finite Type.....	137
§ 15.1 Auxiliary Propositions.....	138
§ 15.2 Some Equivalent Conditions.. ...	143
Chapter 6 General Subshifts	151
§ 16 Two examples	152
§ 16.1 Example 1	152
§ 16.2 Example 2	159
§ 17 A few substitution Dynamical Systems	165
References	171