数学译丛

拟綫性方程組理論的某些問題

复旦大学数学系

金福临 编

李大潜 俞文魮 郭柏灵 譯

谷超豪 校

1

上海市科学技术編譯館

数　学　譯　丛

拟綫性方程組理論的某些問題

复旦大学数学系
金　福　临　編
李大潜　俞文魮　郭柏灵譯
谷　超　豪　校

*

上海市科学技术編譯館出版
（上海南昌路59号）
新华书店上海发行所发行　各地新华书店經售
商务印书館上海厂印刷

*

开本 787×1092 毫米 1/27　印張 6 4/27　字數 142,000
1962年1月第1版　1962年1月第1次印刷
印數 1—2,000

书　号：5002・20

定　价：1.50元

（內部发行）

目　录

1. И. М. 盖尔芳特:

拟綫性方程組理論的某些問題……………………………… 1

2. Б. Л. 罗日堅斯特文斯基:

双曲型拟綫性方程組的間断解…………………………… 89

拟綫性方程組理論的某些問題

盖尔芳特 (И. М. Гельфанд)

目　录

引言……………………………………………………………… 2
§1. 进化方程組……………………………………………… 3
§2. 一阶拟綫性方程組、間断解………………………… 4
§3. 热力学基本关系式………………………………………… 11
§4. 理想流体的流体动力学方程組………………………… 15
§5. 具有粘性时的运动方程組……………………………… 21
§6. 拉格朗日坐标系統……………………………………… 23
§7. 特征…………………………………………………………… 26
§8. 間断解的稳定性…………………………………………… 31
§9. 任意間断的分解…………………………………………… 35
§10. 关于存在性和唯一性定理……………………………… 40
§11. 二維进化方程組………………………………………… 42
§12. 带間断系数的綫性方程組……………………………… 45
§13. 电磁流体力学方程組…………………………………… 54
§14. 电磁流体力学方程組的特征錐………………………… 57
§15. 关于热自燃問題………………………………………… 61
§16. 关于建立化学过程的問題……………………………… 67
§17. 火焰的正規傳播………………………………………… 76
附录……………………………………………………………… 82
参考文献………………………………………………………… 87

引　言

本文的基础是作者1957—1958年在国立莫斯科大学讲課的讲义。課程記录由波罗西林斯基(К. В. Брушлинский)及賈强科(В. Ф. Дьяченко)加工整理，沒有他們的参加，本文不可能問世。

由于在目前还沒有拟綫性方程組的一般理論，作者不把在教程中充分严格的叙述已有的一些不多但相当基本的知識作为自己的目标。对于一个拟綫性方程的柯西問題已研究得很好，且基本上完全了。这方面的严格叙述已由奧列尼克(О. А. Олейник)在“数学科学的成就”(“Успехи Математических Наук”)杂志第7卷第3期上所发表的詳細論文所給出。我們的教程包含着一系列的内容，它們經常以“物理上”的严格性被証明，而实质上是对拟綫性方程組的理論提出了一些問題。由于这个理論还不够完全，且期待解决的有兴趣的問題很多，这些記录以如此簡要的形式发表是适宜的。如果它們能促成这里所提出的、那怕是其中的一部分問題得到解决，将是很高兴的。

作者因一系列問題的討論而感謝巴秉柯(К. И. Бабенко)，哥朵諾夫(С. К. Годунов)及賈强科。第15节由巴連波拉特(Г. И. Баренблатт)所写，他并对第16节及第17节提出了一系列的意見。作者同样引用了拉克斯(P. Lax)的很有兴趣的論文，它发表在杂志“純粹与应用数学通訊”的第10卷第4期上(Comm. of Pure and Appl. Math. 10, No. 4 (1957))。

本文有三个附录，其中之一包含在本文中，而另外两个由奧列尼克所写的附录附于本文之后[注]。

[譯者注]　为了节省篇幅，奧列尼克所写的两个附录不再譯出，讀者可以直接查閱下面两篇論文：

① О. А. 奧列尼克：关于用“粘性消失法”对一阶拟綫性方程的柯西問題广义解的构造，УМН. XIV, вып. 2(86) (1959), 160—164。

② О. А. 奧列尼克：关于拟綫性方程柯西問題广义解的唯一性和稳定性，УМН XIV, вып. 2 (86) (1959), 165—170。

§1. 进化方程組

当研究随时間而进行的过程时，我們得到包含时間 t 作为独立变量的微分方程組，对于它通常提出柯西問題。如果对它說来柯西問題的提法是正确的，即当 $t=0$ 时初始条件的微小变化引起方程組的解当 $t>0$（在 t 的有限变化范圍中）时的微小变化，则称此方程組为进化的。

在今后，下面两个带常系数的綫性方程組将起重要的作用，它們是

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}=\sum_{k=1}^{n} A_{ik}\frac{\partial u_k}{\partial x} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n), \tag{1.1}$$

及

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}=\sum_{k=1}^{n} A_{ik}\frac{\partial u_k}{\partial x}+\sum_{k=1}^{n} B_{ik}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)。 \tag{1.2}$$

或者，我們通常写成向量的形式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=A\,\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=A\,\frac{\partial u}{\partial x}+B\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}。 \tag{1.2}$$

我們用形如

$$u(x,\ t)=\xi e^{i(\lambda t+\mu x)} \tag{1.3}$$

的特解来檢驗方程組 (1.1) 的柯西問題的正确性。把这个表达式代入(1.1)，得到

$$\lambda\xi=\mu A\xi。$$

为使上式对 ξ 有非平凡解，必須 λ/μ 是矩陣 A 的特征值。由于我們在整个直綫 $-\infty<x<\infty$ 上研究柯西問題，μ 应当取为实数。設 $\lambda/\mu=a+ib$，那么

$$e^{i(\lambda t+\mu x)}=e^{i\mu(x+at)}\cdot e^{-\mu bt}。$$

由此看到，如果初始值取具有大 μ 值高频率振动波 $e^{i\mu x}$ 的形式，则无論开始时振幅多么小，到时間 $t=1$ 时其振幅增加 $e^{-\mu b}$ 倍，此倍数当 b 不为零时，只要选取充分大的 μ（μ 为正或負，視 b 的符号

而定），总能使其充分大。

这就是說，为使(1.1)为进化方程組，矩陣 A 的所有特征值必須皆为实数。

若假設矩陣的所有特征值互不相同，則对方程組的解采用富里埃变換，可以証明此条件是充分的。

現在回到方程組 (1.2)，仍考察形如(1.3) 的解。把 (1.3)代入(1.2)，得到

$$i\lambda\xi = i\mu A\xi - \mu^2 B\xi, \tag{1.4}$$

由此得到，$i\lambda$ 应为矩陣 $i\mu A-\mu^2 B$ (μ 为实数)的特征值。在此情况下，和对(1.1) 的研究一样，若当 $\mu\to\infty$ 或 $\mu\to-\infty$ 时，$I_m\lambda\to-\infty$，則柯西問題的提法就是不正确的。自然期望，当 $\mu\to\pm\infty$ 时，λ 的漸近性态将不是由整个矩陣 $i\mu A-\mu^2 B$，而仅由其主要項 $-\mu^2 B$ 所决定，即当 μ 很大时，可代替考察(1.4)而只来研究

$$i\lambda\xi = -\mu^2 B\xi。$$

由此看到，当 $\mu\to\pm\infty$ 时，$\dfrac{-i\lambda}{\mu^2}$ 应趋向于矩陣 B 的特征值，記其为 $a+ib$。若 $a=0$，則 $I_m\lambda$ 的主要項 $a\mu^2$ 为零，为确定 $I_m\lambda$ 的符号，要求更細致的分析，此时已不能略去矩陣 $i\mu A$。若 $a\neq 0$，則 $I_m\lambda\sim a\mu^2$，于是为使(1.2)为进化方程組必須矩陣 B 的特征值有正的实部[注]。和在方程組(1.1) 的情况一样，能証明此条件的充分性。

§2. 一阶拟綫性方程組、間断解

在本文中我們将注意拟綫性方程組区别于綫性方程組的本质特点。这些特点中最基本的是：甚至在充分光滑的初始条件下其解也会得具有間断①。这事实在流体动力学中是很淸楚的，是已

[譯者注] 从这里的分析还只能得到使(1.2) 为进化方程組的必要条件为矩陣 B 不能有实部为負的特征值。

① 例如，我們考察方程 $\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$ 及初始条件 $u(0,x)=\sin x$。此方程的通解有形式 $u=\varphi(x-ut)$；因而容易相信，在我們所考察的初始条件下，問題的解到某一时刻 t_0 就不能单值确定。如我們在今后将看到的，为保証对任何时刻 t 柯西問題有解，在此时要相应的选擇間断解来代替它。

經知道的。

綫性方程組不具有这样的特点。在对它們的研究中，常利用常系数的方程組来作为模型，因为(若系数是連續函数)在不大的邻域中可以忽略系数的改变。为了研究間断解，这样的模型是不适用的，因为在間断綫上解和方程組的系数同时間断。因此我們保留方程組系数和未知函数的依賴性，而考察形如

$$\frac{\partial u}{\partial t}+A(u)\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{2.1}$$

的拟綫性方程組。对矩陣 $A(u)$ 假設对任何固定的 u 能滿足进化方程組的要求。

我們把一个实质性的要求附加到这个方程組的間断解上。利用在方程組(2.1)上引入附加的形式上很小的"展平"項，能够摆脫間断解而"涂去"間断。自然要求間断解对于某一类的这种干扰是稳定的，即它可由干扰系統的連續解的极限而得到，此外，要求这些极限解不依賴于这类干扰的具体形式。

对于所考察的方程組，我們用在(2.1)的右端附加

$$\varepsilon B\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ (\varepsilon>0)$$

一項的方法来引入干扰，于此 B 为任意的元素为常数的矩陣，它不破坏方程組的进化性。和流体力学中相类似的，这个附加項称为粘性項。

这就是說，我們感兴趣的是在怎样的条件下方程組(2.1)的間断解能作为方程組

$$\frac{\partial u}{\partial t}+A(u)\frac{\partial u}{\partial x}=\varepsilon B\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.2}$$

的連續解当 $\varepsilon\to 0$ 时的极限而得到，且它不依賴于矩陣 B 的选擇。

考察位于間断綫上的点的小邻域。在此邻域中，作为第一次近似，可认为方程組(2.1)的解仅依賴于 $x-\omega t$，于此 $x-\omega t=\text{const}$ 为間断綫在此点的切綫。自然期望，迫近此間断解的方程組(2.2)的連續解将具有同样的类型。因为，显然一切将由解在間断綫的邻域中的性态所确定，所以只要考察形如 $u=u(\xi)$，$\xi=x-\omega t$

的解。把此表示式代入方程組(2.2)，得到

$$-\omega\frac{du}{d\xi}+A(u)\frac{du}{d\xi}=\varepsilon B\frac{d^2u}{d\xi^2}, \qquad (2.3)$$

即得到一个常微分方程組。

直接驗証容易看出，此方程組的解滿足等式

$$u(\xi,\ \varepsilon)=u\left(\frac{\xi}{\varepsilon},\ 1\right)。$$

这样，当 ε 改变时，解作为 u 空間的曲綫仍变为其自身，仅参数发生变化。

設此方程組有滿足边界条件[①]

$$\text{当 }\xi\to+\infty\text{ 时，}\quad u(\xi,\ \varepsilon)\to u^+,$$
$$\text{当 }\xi\to-\infty\text{ 时，}\quad u(\xi,\ \varepsilon)\to u^-$$

的解。于是显然，(当 $\varepsilon\to0$ 时)其极限解为間断且具有形式

$$\text{当 }\xi>0\text{ 时，}\quad u(\xi)=u^+,$$
$$\text{当 }\xi<0\text{ 时，}\quad u(\xi)=u^-。$$

剩下来要考察这个极限解与矩陣 B 的具体形式无关的条件。把方程組(2.3)对 ξ 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 进行积分，得到[②]

$$-\omega(u^+-u^-)+\int_{-\infty}^{+\infty}A(u)\frac{du}{d\xi}d\xi=0,$$

或

$$-\omega(u^+-u^-)+\int_{\Gamma}A(u)du=0, \qquad (2.4)$$

式中第二项为在 u 空間中的曲綫积分。Γ 为由参数方程 $u=u(\xi)$ 所給出的曲綫，而 $u(\xi)$ 为方程組(2.3)的解，因此与矩陣 B 有关。如所見，极限解由 u^- 及 u^+ 所組成，如果这些 u^-, u^+ 所应滿足的条件(2.4)与矩陣 B 无关，則极限解也将与矩陣 B 无关，而如果

$$A(u)du=df(u), \qquad (2.5)$$

即 $A(u)du$ 是某个向量函数 $f(u)$ 的全微分时，就出現这种情况。在此时(2.4)具有形式

① 闡明这种解的存在条件是常微分方程組理論中的有兴趣的問題。

② 自然，我們假設，当趋向于无穷远时，$u(\xi,\varepsilon)$ 趋向于 u^+ 或 u^-，$\frac{du}{d\xi}\to0$。

$$-\omega(u^+-u^-)+f(u^+)-f(u^-)=0, \tag{2.6}$$

它給出在間断两側数値的連結条件。方程組(2.1)此时可写为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}=0 \tag{2.7}$$

的形式，称它为**发散型**的方程組。

这就是說，若方程組为发散型(2.7)，則其間断解能作为方程組

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}=\varepsilon B\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.8}$$

的連續解(当 $\varepsilon\to 0$ 时)的极限而得到，且不依賴于矩陣 B 的形式。

这些解在其光滑区域中应满足方程組(2.7)，而在其間断綫上应满足条件(2.6)。但应該指出，并非任何满足(2.7)及(2.6)的函数都是方程組(2.8)的解的极限，关于这一点将在下文 §8 中談到。

我們对下面的事实感到兴趣。假定說同一个方程組能被写为好几种发散形式，从光滑解的观点来看，这些形式是互相等价的，但对于間断解則不然。

用下面的例子来說明这一点。取一个方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0, \tag{2.9}$$

把它写为两种发散形式：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial \frac{u^2}{2}}{\partial x}=0, \tag{2.9'}$$

$$\frac{\partial \frac{u^2}{2}}{\partial t}+\frac{\partial \frac{u^3}{3}}{\partial x}=0。 \tag{2.9''}$$

对这些方程中的每一个都写出条件(2.6)，容易証实它們的間断解的不等价性。这一点在今后我們要用到。

直到目前为止，我們仅研究了一类綫性的粘性項，即元素为常数的矩陣 B 的情况。我們指出，任意的扩大这一类是不可能的。为此我們采用已經考察过的方程(2.9)的例子。若选擇綫性粘性

项 $\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，則在間断綫上的条件(2.6)就具有形式

$$-\omega(u^+-u^-)+\frac{(u^+)^2-(u^-)^2}{2}=0\text{。}$$

若选擇形如 $\varepsilon\frac{1}{u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 的粘性項，則显然它对应于由 (2.9) 所改写的方程(2.9″)引入綫性粘性項，因此，在間断綫上的条件(2 6)就具有形式

$$-\omega\frac{(u^+)^2-(u^-)^2}{2}+\frac{(u^+)^3-(u^-)^3}{3}=0,$$

即此方程的极限間断解依賴于粘性的类型。

感兴趣的是指出一类比綫性粘性类为寬广的一类粘性項，在此粘性类中极限解不依賴于粘性項的具体形式。看来，发散型的粘性即形如 $\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}b\left(u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ 的粘性将是这样的一类，自然还应要求它不破坏方程組的进化性。

另一个有兴趣的問題是关于在引入这类或那类粘性項时所得到的"涂去"間断的特性的問題，即关于迫近于間断解的干扰方程組的連續解的特性問題。作为例子，考察一个方程的情况：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}=\varepsilon\frac{\partial b}{\partial x},\tag{2.10}$$

于此 b 具有形式

$$b=\begin{cases}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^\alpha,\ \alpha>0, & \text{若 } \frac{\partial u}{\partial x}>0,\\ 0, & \text{若 } \frac{\partial u}{\partial x}<0\text{。}\end{cases}$$

和前面一样，我們找形如 $u=u(\xi)$ 的解，而 $\xi=x-\omega t$。代入(2.10)得到方程

$$-\omega\frac{du}{d\xi}+\frac{df(u)}{d\xi}=\varepsilon\frac{\partial b}{\partial\xi},\tag{2.10'}$$

它具有积分

$$\varepsilon b\left(\frac{du}{d\xi}\right)+\omega u-f(u)=C\text{。}\tag{2.11}$$

若在 ξ 的某一变化区間上存在着异于常数的解，則在此区間上由于 $b\left(\frac{du}{d\xi}\right)$ 的定义从(2.11)可得

$$\frac{du}{d\xi}=\varepsilon^{-\frac{1}{\alpha}}\Phi(u)^{\frac{1}{\alpha}},$$

于此 $$\Phi(u)=C-\omega u+f(u)。$$

由此 $$d\xi=\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}\Phi^{-\frac{1}{\alpha}}(u)\,du。$$

从 u^- 到 u^+ 对最后一式进行积分，我們就得到：如果积分

$$\int_{u^-}^{u^+}\Phi^{-\frac{1}{\alpha}}(u)\,du$$

收斂(容易看出，当 $\alpha>1$ 时这事实成立)，则在 ξ 軸上使 u 的値发生变化的区間是有限的，且其长度等于

$$\Delta\xi=\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}\int_{u^-}^{u^+}\Phi^{-\frac{1}{\alpha}}(u)\,du,$$

此时解 $u(\xi)$ 如图 1 所示。如果此积分发散 $(0<\alpha\leqslant 1)$，则“涂去”的范圍将为无限的，即 $u(\xi)$ 的改变在整个 ξ 軸上发生，仅当 $\xi\to\infty$ 时它才趋向于值 u^- 及 u^+。

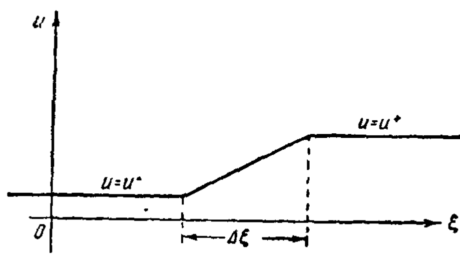

图 1.

但当 $\varepsilon\to 0$ 时，极限解无論在这种或那种情况都由两常数 u^- 及 u^+ 所組成，它們在間断綫上滿足条件(2.6)。

我們已从带粘性的方程組的連續解的极限得到所考察的方程組的間断解，且由此得到在間断綫上的条件。但是，这也能用另外的“內在”方法得到。为此我們給出解的另外更通用的定义。

設 $u(x,t)$ 为方程組

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}=0 \tag{2.7}$$

的光滑解，而 $\varphi(x,t)$ 为任何光滑的有界支集(即在某有界区域以外为零)的向量函数。由于 $u(x,t)$ 是解，则有

$$\iint \varphi\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}\right)dx\,dt=0;$$

进行部分积分,并利用 φ 的有界支集性质,得到

$$\iint\left(u\frac{\partial\varphi}{\partial t}+f(u)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dx\,dt=0。\qquad(2.12)$$

反之，从最后一等式对任何光滑的有界支集函数 φ 为满足可推出对光滑的 u 成立(2.7)式。但(2.12)在 u 为間断的情况下也能适用。因此很自然的把对任何光滑的有界支集函数 φ 都滿足(2.12)式的函数 u 称为方程組 (2.7) 的广义解。这个定义有时也采取另外的形式。即要求对任何閉环路 Γ 成立

$$\oint_\Gamma(-u\,dx+f(u)\,dt)=0\text{[注]}。\qquad(2.13)$$

这最后的等式可对由环路 Γ 所圍成区域上的二重积分

$$\iint\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}\right)dx\,dt$$

应用格林公式而得到。

不必利用在方程組(2.8)中的极限过程,从条件(2.13)可以直接得到在間断綫上的条件(2.6)。設解在 x, t 平面上的某曲綫 γ 上发生間断，选擇靠近这曲綫一小段的狭窄的曲边四边形作为环路 Γ(图 2)，設此四边形的寬度比其长度小到如此程度,使在环路 Γ 的横截于 γ 的綫段上的积分可以加以忽略,那么

$$\oint_\Gamma(u\,dx-f\,dt)=(u^+\omega-f^+)\,\Delta t-(u^-\omega-f^-)\,\Delta t+o(\Delta t),$$

于此 $\omega=\dfrac{dx}{dt}$ 为 γ 的切綫斜率，Δt 为环路在 t 軸上投影的长度,而 u^+ 及 u^- 为在 γ 上的右方及左方的极限值。当 $\Delta t\to 0$ 时,所写的近似等式就化为

$$\omega(u^+-u^-)=f(u^+)-f(u^-)。\qquad(2.6)$$

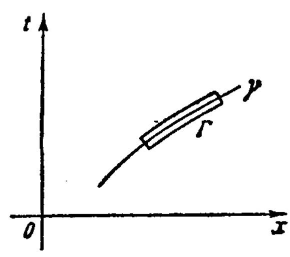

图 2.

在这节的最后，我們給出拟綫性

[譯者注] 原文此处誤印为 $\oint_\Gamma -u\,dt+f(u)dx=0$。

方程組的一个簡单例子——非綫性彈性理論的一維問題。設 $u(x,t)$ 为点 x 在时刻 t 的位移，$\varepsilon=\frac{\partial u}{\partial x}$ 为在此点的变形，σ 为此变形所引起的应力，$\sigma=\varphi(\varepsilon)$ 为已給的函数。运动方程可写为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial \sigma}{\partial x}。$$

若引入一对函数 ε 及 $v=\frac{\partial u}{\partial t}$，則就得到拟綫性方程組

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t}&=\frac{\partial \varphi(\varepsilon)}{\partial x},\\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}&=\frac{\partial v}{\partial x}。\end{aligned}\right\}$$

在綫性彈性理論中，ε 假設是不大的，那时 $\varphi(\varepsilon)$ 可认为是綫性函数。

此外，拟綫性方程組的很重要的例子——流体动力学中的方程組，将在下面几节中詳細加以叙述。

§3. 热力学基本关系式

为过渡到与流体力学有关的問題，我們需要(即使很短促的)談到最基本的热力学，即解釋一下与它有关的一些物理量及这些量所满足的关系式。为此我們必需应用勒让德(Lagendre)变换作为工具，下面我們来回忆一下它是如何构成的。

設 $\eta=f(\xi)$ 为联系 ξ 及 η 的函数。从 ξ,η 变为下面的一对量

$$\left.\begin{aligned}&p=f'(\xi),\\ &H(p)=-f(\xi)+p\xi\end{aligned}\right\}\qquad(3.1)$$

的变换就称为勒让德变换。函数 $H(p)$ 表示函数 $f(\xi)$ 的图形在 ξ 点的切綫和过坐标原点平行于此切綫的直綫 $\eta=p\xi$ 間的垂直距离(图 3)。

可看到逆变换是按同样的規則存在的。事实上

$$dH(p)=-f'(\xi)\,d\xi+p\,d\xi+\xi\,dp=\xi\,dp,$$

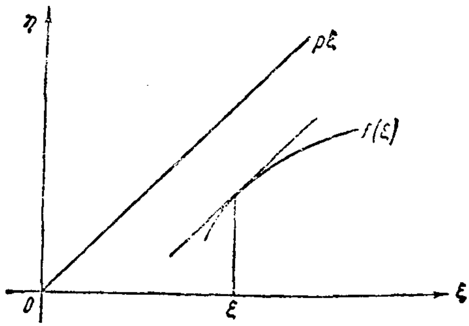

图 3.

即

$$\left.\begin{aligned}\xi &= H'(p),\\ f(\xi) &= -H(p)+\xi p。\end{aligned}\right\}\tag{3.2}$$

为保証勒让德变换的相互单值性，$f'(\xi)$应該单調，即 $f(\xi)$应該是凸的。若 $f(\xi)$为凸的，则 $H(p)$同样是凸的，因为

$$\frac{d^2H}{dp^2}=\frac{d\xi}{dp}=\frac{1}{\frac{dp}{d\xi}}=\frac{1}{\frac{d^2f}{d\xi^2}}。$$

还要指出，若 $f(\xi)$的图形具有角点（导数間断），则 $H(p)$ 的图形包含对应于它的直綫段，反之亦然。

两变量函数 $\eta=f(\xi_1, \xi_2)$ 的勒让德变换是把 ξ_1, ξ_2, η 变为 p_1, p_2, H 的变换：

$$\left.\begin{aligned}&p_1=\frac{\partial f}{\partial\xi_1},\quad p_2=\frac{\partial f}{\partial\xi_2},\\ &H(p_1, p_2)=-f(\xi_1, \xi_2)+\xi_1p_1+\xi_2p_2。\end{aligned}\right\}\tag{3.3}$$

在向量形式下，勒让德变换可写为和一个变量时同样的形式：

$$\begin{aligned}p&=f'(\xi),\\ H(p)&=-f(\xi)+\xi p。\end{aligned}$$

（其中 ξp 应理解为向量 ξ 及 p 的数量积，而 $f'(\xi)$ 为向量）。其逆变换具有同样的形式。

若

$$\frac{\partial(p_1, p_2)}{\partial(\xi_1, \xi_2)} = \begin{vmatrix} f''_{\xi_1\xi_1} & f''_{\xi_1\xi_2} \\ f''_{\xi_2\xi_1} & f''_{\xi_2\xi_2} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{3.4}$$

則勒让德变换就是相互单値的。

在今后我們将假定矩陣 $f''(\xi)$ 为正定(此时(3.4)显然满足)。从 $f''(\xi)$ 的正定性可推出 $H''(p)$ 为正定，或者，容易験証

$$f''(\xi)\cdot H''(p) = I,$$

于此 I 为单位陣。

現在轉入热力学。

处于統計平衡状态中的气体用下面的量来描述其特征：压力 p、密度 ρ 或比容 $V=\frac{1}{\rho}$、温度 T、內能 E。有时还要考察其他的量，它們是上述量的函数。但是所有这些量中只有两个量是独立的。在上述量中怎样的量取为独立变量通常是不重要的。在不同的問題中常按不同的方式来选取。

若单位质量的气体得到某些热量 δQ，則从热力学第一定律就得到由此而引起的 E 及 V 的改变要满足：

$$dE + p\,dV = \delta Q。$$

表示式 $dE+p\,dV$ 不一定是全微分，但从微分方程理論中熟知的定理可得出它通常具有积分因子。(我們注意到，如已指出的，E, p, V 中独立的量只有两个)。用 $\frac{1}{r}$ 記此积分因子。这样就有

$$dE + p\,dV = r\,dS = \delta Q。$$

在热力学中，利用由热力学第二定律所得的一些原理可以証明，在各种积分因子 $\frac{1}{r}$ 中有一个积分因子仅与温度 T 有关。通常就簡单的认为它就是 T。

在此时，我們就得到下面基本的热力学恒等式：

$$dE = T\,dS - p\,dV。 \tag{3.5}$$

状态函数 S 称为熵。我們选擇 V 及 S 作为独立变量。对每个气体都有各自的函数 $E(V,S)$ 来表示其特性，称它为状态方程。

我們在下面将看到，为了带热傳导性的流体动力学方程組的适定性，要求$E(V,S)$的二阶导数組成的矩陣$E''(V,S)$的正定性条件。

必需指出，对眞实气体及液体，此条件并不經常得到滿足。但是，甚至当状态方程存在V及S的一变化区域使其中$E''(V,S)$不是正定时，流体动力学方程組的解可能有如此之构造，使在解为光滑处的V及S的值不落在上面的区域中。越过这个区域，方程組的解通常要发生突变，卽发生間断。

为不使复杂化，我們姑且假定对我們所考察的所有的状态方程，矩陣$E''(V,S)$的正定性条件是满足的。此外，还应要求压力及温度卽$-E_V$[注]及E_S都是正的。在其他方面，函数$E(V,S)$可以是任意的。

从(3.5)立刻得到：

$$T=\frac{\partial E}{\partial S},\quad p=-\frac{\partial E}{\partial V}, \tag{3.6}$$

卽若以V及S为独立变量，我們能利用状态方程得到描述气体状态特征的所有其他量的表示式。还可以选擇另外一对独立变量。为此，可方便的利用勒让德变换。若对两变量V及S的函数$E(V,S)$作勒让德变换，則可得到独立变量T和p（参見(3.3)及(3.6)）及其函数①

$$\Phi=E-TS+pV, \tag{3.7}$$

Φ称为热力学势。这样，状态方程应給以Φ为T及p的函数。此时，S及V同样由其偏导数所决定：

$$\Phi=\Phi(T,p),\quad \frac{\partial\Phi}{\partial T}=-S,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial p}=V。 \tag{3.8}$$

若把函数$E(V,S)$仅对变量V进行勒让德变换，可化为独立变量p和S及其函数

$$W=E+pV。 \tag{3.9}$$

它称为热焓或热函数。此函数$W=W(S,p)$的导数有形式

[譯者注] 原文此处誤印为E_V。

① 勒让德变换的公式(3.3)給我們以$-\Phi$，$-W$，$-F$，但为了得到正的量，我們改变了其符号。