计算数学丛书

# 非线性方程组迭代解法

冯果忱 编著

上海科学技术出版社

计 算 数 学 丛 书

# 非线性方程组迭代解法

冯果忱 编著

上 海 科 学 技 术 出 版 社

责任编辑　唐仲华


计算数学丛书

非线性方程组迭代解法

冯果忱　编著

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行　上海东方印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 9.25　字数 202,000

1989 年 4 月第 1 版　1989 年 4 月第 1 次印刷

印数：1— 5,000

ISBN 7-5323-0384-5/O·28

定价：4.85 元

# 出版说明

《计算数学丛书》是为了适应计算数学和计算机科学的发展，配合高等院校的计算数学教学的需要而组织的一套参考读物．读者对象主要是高等院校数学系和计算机科学系的学生、研究生，亦可供高等院校数学系和计算机科学系的教师以及工矿企业、科研单位从事计算工作的技术人员参考．

本丛书向读者介绍近代计算方法的一些主要进展及其适用范围和实用效果．每种书集中介绍一个专题，针对本专题的近代发展作综合性的介绍，内容简明扼要，重点突出，有分析，有评价，力图使读者对该专题的动向和发展趋势得到一个完整的了解．

本丛书已拟定的选题计有：《线性代数与多项式的快速算法》、《数论变换》、《数值有理逼近》、《矩阵特征值问题》、《索伯列夫空间引论》、《计算组合数学》、《样条与插值》、《不动点算法》、《广义逆矩阵的基本理论和计算方法》、《非线性方程的区间算法》、《奇异摄动中的边界层校正法》、《沃尔什函数理论与应用》、《多项式最佳逼近的实现》、《曲线曲面的数值表示和逼近》、《舍入误差分析引论》、《解边值问题的迦辽金法》、《非线性方程组迭代解法》、《外推法及其应用》、《蒙特卡罗方法》、《发展方程的有限元方法》、《数值解高维偏微分方程的分裂法》等二十余种，于一九八〇年初起陆续出版．

# 前　言

非线性问题是现代数学的主要研究课题之一，这不仅是由于科学技术发展的需要，而且也是由于计算技术的高速发展提供了解决这类问题的可能. 利用计算机解决非线性问题时，最终总是将其化成为有限维非线性问题，或称为非线性代数问题，因此，非线性代数问题的解法就成为现代计算数学的重要研究课题，而非线性方程组解法则是其最基本的问题.

非线性问题的数值解法是吉林大学计算数学专业的主要研究方向之一，不少同志长期从事这方面的研究工作，一九八〇年以来，还为计算数学专业研究生开设了“非线性方程组解法”课，本书是为这门课程编写的基本教材. 我们试图用不太大的篇幅较系统地介绍解非线性方程组迭代法的基本理论及基本算法. 我们在理论分析方面力求完整，而算法则只选择其中典型的、基本的方法，以及那些已经从理论上或者已在计算实践中证明有效的通用算法，并且特别注意分析这些方法的构造思想. 此外，我们还着重介绍了迭代法方面的最新成果，如拟牛顿法及其理论等. 撰写本书时曾参考了奥特加与莱因博尔特所著《多元非线性方程组迭代解法》(主要在第3、4章中)，该书较全面地总结了直到七十年代末西方的主要研究成果，同时我们也充分地利用了苏联的文献.

上海科技大学王德人教授仔细地审阅了原稿，并曾提出宝贵的意见和建议，在此表示衷心的感谢. 由于著者水平所

限，本书定有不妥之处，诚望读者指正。

冯果忱

1986 年 9 月于吉林大学

# 目　录

第 1 章

# 引 论

## ——非线性方程式迭代法概述

大多数解非线性方程组的迭代法，其构造思想或者来源于解方程式的迭代法，或者来源于解线性方程组的迭代法，而且，在非线性方程组迭代法的研究中，常常是把方程式作为模型的，因为方程式情形得到的结论，往往可以推广到方程组情形，或者，至少可以从中得到启发．鉴于这种原因，我们在讨论解方程组的迭代法之前，扼要讨论解方程式的迭代法．由于我们是把方程式作为方程组的模型讨论的，因此，在本章中我们只讨论与方程组迭代法研究有关的方法以及相应的理论问题．我们将以方程式为模型介绍迭代法的典型构造方法，引进迭代法的基本概念，提出迭代法研究中的基本理论问题．

## §1 简单迭代法

考虑方程式

$$f(x)=0, \tag{1.1}$$

其中 $f(x)$ 为实变量 $x$ 的实值函数．求方程式(1.1)的解 $x^*$ 的最简单迭代法如下：选定 $x^*$ 的初始近似 $x^{0)}$，利用 $f(x)$ 构造函数 $\psi(x)$，使 $x^*$ 为方程式

$$x=\psi(x) \tag{1.2}$$

的解，或称 $\psi(x)$ 的不动点：$x^*=\psi(x^*)$，然后，按递推关系式

$$x^{(k+1)}=\psi(x^{(k)}), \quad k=0, 1, \cdots \tag{1.3}$$

构造序列 $\{x^{(k)}\}$，并且，如果对正整数 $k$，使 $x^{(k)}-x^{(k-1)}$ 的绝对值不超过事先指定的精确度，则以 $x^{(k)}$ 作为解 $x^*$ 的近似值。

上述算法通常称之为**解方程式(1.2)的简单迭代法**，亦称 **Picard 逐步逼近法**。若当 $k\to\infty$ 时，$x^{(k)}$ 收敛于 $x^*$，则称**简单迭代法收敛**。显然，只有收敛的迭代法才有实际意义。此外，如果 $\psi(x)$ 连续，只要 $x^{(k)}$ 有极限存在，其极限即为方程式(1.2)的解。

将方程式(1.1)化成与之等价形式(1.2)是十分容易的，例如，令 $\psi(x)=x-f(x)$ 即可，然而，这样处理并不总能保证迭代法收敛。如何构造 $\psi(x)$，保证迭代序列(1.3)收敛是迭代法研究中的中心课题。这样的 $\psi$ 常称为**迭代函数**。

## 1-1 收敛性定理

分析一下迭代程序(1.3)的几何意义，对研究它的收敛性会很有益处。

方程式(1.2)的解 $x^*$ 是曲线 $y=\psi(x)$ 与直线 $y=x$ 的交点的横坐标(图 1)。取定初始近似 $x^{(0)}$，$x^{(1)}$ 是过点 $(x^{(0)}, \psi(x^{(0)}))$ 且平行于 $x$ 轴的直线与直线 $y=x$ 的交点 $A_1$ 的横坐标；$x^{(2)}$ 是过点 $(x^{(1)}, \psi(x^{(1)}))$ 且平行于 $x$ 轴的直线与 $y=x$ 的交点 $A_2$ 的横坐标，等等。图 1 中的 $(a)$、$(b)$ 是迭代法收敛的情形，$(c)$、$(d)$ 是迭代法发散的情形。

从图 1 看出，收敛情形满足条件 $|\psi'(x^*)|<1$；发散情形满足 $|\psi'(x^*)|>1$。实际上，我们有更一般的收敛性定理。

**定理 1.1** 设 $\psi(x)$ 定义于区间 $(a, b)$ 上，$x^*\in(a, b)$ 为方程式(1.2)的解，且于 $x^*$ 处 $\psi'(x^*)$ 存在，则当 $|\psi'(x^*)|<1$

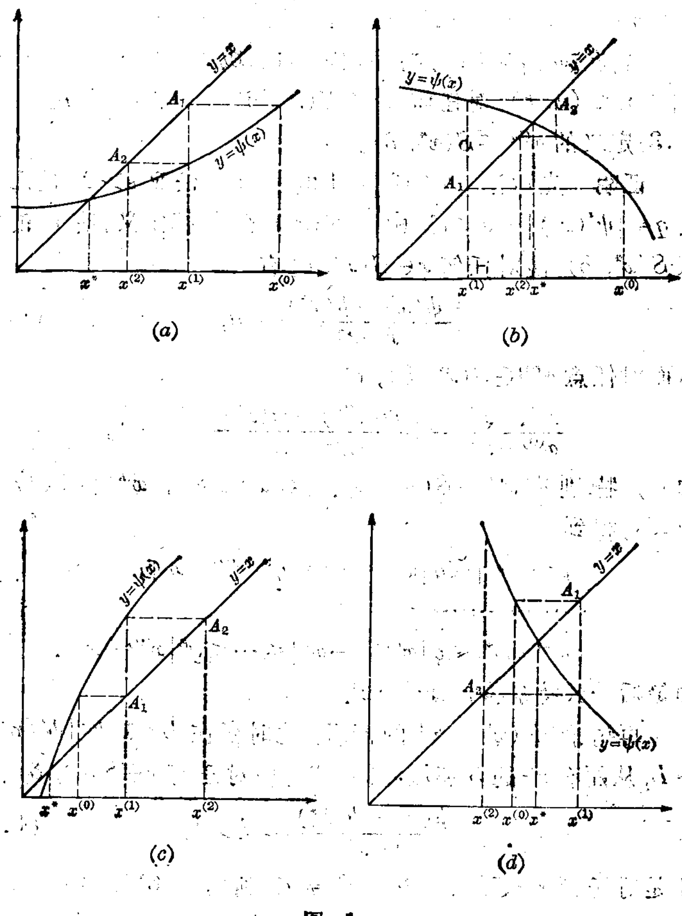


图 1

时，存在 $x^*$ 的邻域 $S(x^*,\ \delta)=\{x\,|\,|x-x^*|\leqslant\delta\}\subset(a,\ b)$，使对任何 $x^{(0)}\in S(x^*,\ \delta)$，迭代程序(1.3)收敛，并且有估计式

$$|x^{(k)}-x^*|\leqslant q^k|x^{(0)}-x^*|,\quad k=0,\ 1,\ \cdots,\tag{1.4}$$

其中 $q=|\psi(x^*)|+\varepsilon<1$，$\varepsilon$ 为任意给定的正数.

当 $|\psi'(x^*)|>1$ 时，则存在 $x^*$ 的邻域 $S(x^*,\ \delta)=\{x\,|\,|x-x^*|\leqslant\delta\}\subset(a,\ b)$，对任何 $x^{(0)}\in S(x^*,\ \delta)$，$x^{(0)}\neq x^*$，有 $k_0$，使由(1.3)定义的 $x^{(k_0)}\overline{\in}S(x^*,\ \delta)$.

**证明** 先讨论 $|\psi'(x^*)|<1$ 的情形. 任取 $\varepsilon>0$，使之满足 $q=|\psi'(x^*)|+\varepsilon<1$. 由于 $\psi'(x^*)$ 存在，据定义，有 $x^*$ 的邻域 $S(x^*,\ \delta)$，使对任何 $x\in S(x^*,\ \delta)$ 有

$$\left|\frac{\psi(x)-\psi(x^*)}{x-x^*}\right|\leqslant q,\tag{1.5}$$

从而对任意 $x^{(0)}\in S(x^*,\ \delta)$，有

$$\left|\frac{x^{(1)}-x^*}{x^{(0)}-x^*}\right|=\left|\frac{\psi(x^{(0)})-\psi(x^*)}{x^{(0)}-x^*}\right|\leqslant q<1,$$

由此，特别有 $x^{(1)}\in S(x^*,\ \delta)$. 对 $x^{(1)},\ \cdots,\ x^{(k)}$ 依次应用(1.5)，得到

$$|x^{(2)}-x^*|\leqslant q|x^{(1)}-x^*|\leqslant q^2|x^{(0)}-x^*|,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|x^{(k)}-x^*|\leqslant q|x^{(k-1)}-x^*|\leqslant\cdots\leqslant q^k|x^{(0)}-x^*|,$$

由最后一式特别推出 $x^{(k)}\to x^*$.

再讨论 $|\psi'(x^*)|>1$ 的情形. 此时存在 $L>1$，使 $|\psi'(x^*)|>L$，从而有 $x^*$ 的 $\delta$ 邻域 $S(x^*,\ \delta)$，使对任何 $x\in S(x^*,\ \delta)$ 有

$$\left|\frac{\psi(x)-\psi(x^*)}{x-x^*}\right|\geqslant L>1.\tag{1.6}$$

于是对任意 $x^{(0)}\in S(x^*,\ \delta)$，$x^{(0)}\neq x^*$，利用(1.6)导出

$$|x^{(1)}-x^*|\geqslant L|x^{(0)}-x^*|.$$

若 $L|x^{(0)}-x^*|>\delta$，定理就证明了；否则，对 $x^{(1)}$ 利用(1.6)得

到

$$|x^{(2)}-x^*|\geqslant L|x^{(1)}-x^*|\geqslant L^2|x^{(0)}-x^*|,$$

重复上面讨论，由于 $L>1$，故有 $k_0$ 存在，使 $L^{k_0}|x^{(0)}-x^*|>\delta$，从而 $x^{(k_0)}\overline{\in}S(x^*,\delta)$. 证毕.

**推论** 在定理 1.1 的条件下，对任何 $x^{(0)}\in S(x^*,\delta)$，迭代序列(1.3)满足关系式

$$\frac{x^{(k+1)}-x^*}{x^{(k)}-x^*}\to\psi'(x^*). \tag{1.7}$$

事实上，由于

$$\frac{x^{(k+1)}-x^*}{x^{(k)}-x^*}=\frac{\psi(x^{(k)})-\psi(x^*)}{x^{(k)}-x^*},$$

注意 $x^{(k)}\to x^*$，立即推出(1.7)式.

定理 1.1 表明，迭代程序(1.3)的收敛速度由 $|\psi'(x^*)|$ 的值决定，$|\psi'(x^*)|$ 愈小收敛愈快.

考虑一种特殊情形．设 $\psi(x)$ 于 $x^*$ 的邻域 $S(x^*,\delta)$ 内 $p>1$ 次连续可微，且

$$\psi'(x^*)=\psi''(x^*)=\cdots=\psi^{(p-1)}(x^*)=0,\quad \psi^{(p)}(x^*)\neq0. \tag{1.8}$$

利用 Taylor 公式有

$$\begin{aligned}\psi(x)-x^*&=\psi(x)-\psi(x^*)\\&=\psi'(x^*)(x-x^*)+\frac{\psi''(x^*)}{2!}(x-x^*)^2+\cdots\\&\quad+\frac{\psi^{(p-1)}(x^*)}{(p-1)!}(x-x^*)^{p-1}\\&\quad+\frac{\psi^{(p)}(\xi)}{p!}(x-x^*)^p,\end{aligned} \tag{1.9}$$

式中 $\xi$ 为 $x$ 与 $x^*$ 所确定的区间中一点．由此，若令

$$\max_{x\in S(x^*,\delta)}|\psi^{(p)}(x)|=M_p, \tag{1.10}$$

则由(1.9)式并注意条件(1.8)得到

$$\left|\frac{\psi(x)-x^*}{(x-x^*)^p}\right| \leqslant \frac{1}{p!} M_p, \tag{1.11}$$

且当 $x \to x^*$ 时

$$\frac{\psi(x)-x^*}{(x-x^*)^p} \to \frac{1}{p!} \psi^{(p)}(x^*). \tag{1.12}$$

今选 $\delta$, 使

$$\frac{1}{p!} M_p \delta^{p-1} < 1, \tag{1.13}$$

由(1.11), 对任何 $x \in S(x^*, \delta)$ 有

$$|\psi(x)-x^*| \leqslant \delta,$$

从而对任何 $x^{(0)} \in S(x^*, \delta)$, 由迭代法 (1.3) 所确定的 $x^{(k)} \in S(x^*, \delta)$. 此外, 对 $x^{(k)}$ 利用(1.11)导出

$$\left|\frac{x^{(k+1)}-x^*}{(x^{(k)}-x^*)^p}\right| = \left|\frac{\psi(x^{(k)})-x^*}{(x^{(k)}-x^*)^p}\right| \leqslant \frac{1}{p!} M_p,$$

$$k=0, 1, 2, \cdots,$$

由此,

$$\begin{aligned} |x^{(k)}-x^*| &\leqslant \frac{M_p}{p!} |x^{(k-1)}-x^*|^p \\ &\leqslant \left(\frac{M_p}{p!}\right)^{1+p} |x^{(k-2)}-x^*|^{p^2} \leqslant \cdots \\ &\leqslant \left(\frac{M_p}{p!}\right)^{1+p+\cdots+p^{k-1}} |x^{(0)}-x^*|^{p^k} \\ &= \left(\frac{M_p}{p!}\right)^{\frac{p^k-1}{p-1}} |x^{(0)}-x^*|^{p^k}, \end{aligned}$$

即

$$|x^{(k)}-x^*| \leqslant \left(\frac{M_p}{p!}\right)^{\frac{1}{1-p}} q^{p^k}, \tag{1.14}$$

式中

$$q=\left(\frac{M_p}{p!}\right)^{\frac{1}{p-1}}|x^{(0)}-x^*|<1. \tag{1.15}$$

综合上述讨论得到

**定理 1.2** 设$\psi(x)$定义于区间$(a, b)$上，且方程式(1.2)于$(a, b)$有解$x^*$存在，$\psi(x)$于$x^*$近傍$p>1$次连续可微，并满足条件(1.8)，则存在$x^*$的$\delta$邻域$S(x^*, \delta)=\{x \mid |x-x^*|\leqslant\delta\}$，使对任何$x^{(0)}\in S(x^*, \delta)$，迭代程序(1.3)收敛，并有敛速估计式(1.14)成立. 此外，还有

$$\frac{x^{(k+1)}-x^*}{(x^{(k)}-x^*)^p}\to\frac{1}{p!}\psi^{(p)}(x^*). \tag{1.16}$$

## 1-2 收敛速度及收敛阶

估计式(1.4)及(1.14)刻划了迭代法的收敛速度. 在前述两个定理的条件下，建立估计式(1.4)及(1.14)的同时，还得到了关系式(1.7)及(1.16)，它们可以写成统一的形式：

$$\lim\frac{|x^{(k+1)}-x^*|}{|x^{(k)}-x^*|^p}=c_p\neq 0. \tag{1.17}$$

反之，如果$x^{(k)}\to x^*$，且对某一正数$p\geqslant 1$（$p$不一定是整数！），满足关系式(1.17)，且当$p=1$时，$c_p<1$，则存在由$c_p$确定的常数$q<1$，以及正整数$k_0$，使当$k\geqslant k_0$时有

$$|x^{(k)}-x^*|\leqslant\begin{cases}\gamma q^k, & \text{当 } p=1 \text{ 时},\\ \gamma q^{p^k}, & \text{当 } p>1 \text{ 时}.\end{cases} \tag{1.18}$$

其中，$\gamma$为确定的常数. 实际上，如果(1.17)式成立，则对任何$\varepsilon>0$，存在$k_0>0$，使当$k\geqslant k_0$时有

$$|x^{(k+1)}-x^*|\leqslant(c_p+\varepsilon)|x^{(k)}-x^*|^p. \tag{1.19}$$

若$p=1$，此时只要取$\varepsilon>0$，使$q=c_p+\varepsilon<1$，由(1.19)立即得到(1.18)，其中$k_0=1$；若$p>1$，由$x^{(k)}\to x^*$，则有$k_0$，使

$$q=(c_p+\varepsilon)^{\frac{1}{p-1}}|x^{(k_0)}-x^*|<1,$$

于是，仿定理 1.2 的证明，由(1.19)即导出(1.18)。

综合上述讨论看出，迭代法的收敛速度可以用正常数 $p$ 与 $c_p$ 刻划，$p$ 越大收敛越快，而当 $p$ 相同时，$c_p$ 越小收敛越快。注意到形如(1.17)的极限未必总存在，因此，一般按下述方式定义之：

**定义 1.1** 设序列 $\{x^{(k)}\}$ 的极限为 $x^*$，对任何 $p\in[1,\infty)$，定义

$$Q_p\{x^{(k)}\}=\begin{cases}0, & \text{如果 } x^{(k)}=x^*\text{，当 } k\geqslant k_0 \text{ 时；}\\ \limsup\limits_{k\to\infty}\dfrac{|x^{(k+1)}-x^*|}{|x^{(k)}-x^*|^p}, & \text{如果 } x^{(k)}\neq x^*\text{，当 } k\geqslant k_0 \text{ 时；}\\ +\infty, & \text{其它情形。}\end{cases} \tag{1.20}$$

数 $Q_p\{x^{(k)}\}$ 称为序列 $\{x^{(k)}\}$ 收敛的渐近商因子，或简称 Q-因子。由迭代函数 $\psi$ 生成的所有收敛于 $x^*$ 的序列 $\{x^{(k)}\}$ 的 Q-因子的上确界记为 $Q_p(\psi, x^*)$，称为迭代法 $\psi$ 关于 $x^*$ 的 Q-因子。

容易验证，如果对某一 $p\in[1,\infty)$ 有 $Q_p=Q_p\{x^{(k)}\}<+\infty$，则对任何 $\varepsilon>0$，存在正整数 $k_0$，使当 $k\geqslant k_0$ 时有

$$|x^{(k+1)}-x^*|\leqslant(Q_p+\varepsilon)|x^{(k)}-x^*|^p. \tag{1.21}$$

比较(1.19)看出，$Q_p$ 与 $c_p$ 在刻划迭代法收敛性时，具有同样的功能。

**引理 1.1** 设 $Q_p(\psi, x^*)$ 是迭代法 $\psi$ 关于 $x^*$ 的 Q-因子，$p\in[1,\infty)$，则下列结论之一成立：

1) $Q_p(\psi, x^*)=0,\quad \forall p\in[1,\infty)$；

2) $Q_p(\psi, x^*)=+\infty,\quad \forall p\in[1,\infty)$；

3) 存在 $p_0\in[1,\infty)$，使 $Q_p(\psi, x^*)=0$，$\forall p\in[1,p_0)$，而且 $Q_p(\psi, x^*)=+\infty$，$\forall p\in(p_0,\infty)$。