MENGTEKALUO
FANGFA YINLUN

蒙特卡罗方法引论

朱本仁 编

山东大学出版社

蒙特卡罗方法引论

朱 本 仁 编

山 东 大 学 出 版 社

蒙特卡罗方法引论

朱 本 仁 编

山东大学出版社出版
山东省新华书店发行
山东大学印刷厂印刷
787×1092毫米 5.75 印张 129 千字
1987年8月第1版　　1987年8月第1次印刷
印数 1,500册
ISBN 7-5607-0024-1/N·2
书号：13338·22 定价 0.98元

序　言

蒙特卡罗（*Monte Carlo*）方法又名随机模拟法或统计试验法。它是在第二次世界大战期间兴起和发展起来的。它的奠基人是冯·诺伊曼（*J. Von Neümann*）。其主要思想是在计算机上模拟实际概率过程，然后加以统计处理。这种方法和传统数学方法相比，具有思想新颖，直观性强、简便易行的优点，它能处理一些其他方法所不能的复杂问题，并且容易在计算机上实现。从目前有关文献看，蒙特卡罗方法已经在应用物理，原子能，固体物理，化学，生物，生态学，社会学以及经济行为等领域中得到广泛的应用。特别是在计算机上用蒙特卡罗方法解很多理论和应用科学问题，在很大程度上可以代替许多大型的、难以实现的复杂实验或社会行为过程。所以，可以毫不夸张地说，由于有了蒙特卡罗方法，计算机已经不仅仅是数学家和理论科学家的重要工具，也已经成为许多实验物理家、应用科学家、社会学家的第二实验场所。

本书的对象主要是物理、化学和其他有关应用科学专业的研究生或高年级学生、专业科学工作者。他们希望通过短期的学习，能学会使用此方法来解决本专业中提出的许多实际问题。因此，本书内容的编排是根据在一学期时间内（大约50学时左右），使学生基本掌握蒙特卡罗方法的基本概念和方法这一指导思想进行的。这样的教材在国内外尚难找到，所以根据我们手头的资料决定主要取材于参考书目〔2〕

中第一至五章，以及〔4〕、〔3〕中的若干内容，还有编者个人的若干想法及推算。考虑到本书的读者一般不具备概率论的完备知识，本书根据内容的需要在第一章编写了有关概率、统计方面的最低限度的基本知识。这样使本书自成体系，读者不需要在学习中查阅其他书目和文献，就能学懂所有内容。从第二章开始，在每章末按排了少量能在小型计算机上完成的实验题。这些题目的选择既利于巩固已学的知识，也为后续章节作了准备。通过实验还能提高读者的学习兴趣。因而自然要求读者能会运用一、两种算法语言（例如 *Basic*，*Fortran*语言）和具备使用计算机的能力。为了顺利阅读本书，要求读者具备理科高等数学知识。

本书内容曾给山东大学物理系84—85学年，85—86学年的研究生以及部分教师讲授过，现经修改作为正式教材出版。在讲课和本书编写过程中承蒙物理系梅良模教授以及其他有关教师热情鼓励和大力支持，在此仅表真挚的谢意。

由于编者水平有限，错误在所难免，恳切希望读者批评指正。

朱本仁　　于山东大学

1986年1月7日

目　　录

第一章　概率论基本知识

§1　事件和概率

在我们观察客观现象时，可能有三种情况发生：

（1）　在一定条件下必然会发生的某种“事件”（现象），称为必然事件。如在标准大气压下，水加热到 100 ℃时必然会沸腾，在地球表面附近重物必然会下落；太阳必然从东边升起；……

（2）　在一定条件下必然不会发生的“事件”，称为不可能事件。如在标准大气压下，低于 100℃ 的水不会沸腾；在地球表面附近重物无外因不会自己上升；太阳从西边升起；………

（3）　在一定条件下可能发生也可能不发生的事件，称为随机事件。如打靶中环数；中彩票的事件；赌博的输赢；还有下列实例：

例 1　“在一分钟内，一个电话交换台至少接到15次呼唤”或“少于15次呼唤”这类事件。

例 2　“在抽查某工厂生产的10件产品时，发现有一件次品”、“发现有两件次品”、“至少发现一件次品”和“不发现次品”的事件。

例 3　“从一个袋中摸黑、白球的试验中，摸出黑球”、“连续两次摸出黑球”的事件。

为了详细说明问题，我们举一个产品检查的具体实例来讨论。

例 4　在一大批产品中分别抽 5 件、10件、60件 、150件、600件、900件、1200件、1800件产品来检查，结果记录如下：

表1—1

抽取件数	5	10	60	150	600	900	1200	1800
合格品数	5	7	53	131	548	820	1091	1631
合格品频率	1	0.7	0.883	0.873	0.913	0.911	0.909	0.906

$$合格品频率=\frac{合\ 格\ 数}{抽取件数}$$

虽然抽出的产品中，次品数目是随机的，然而随着抽查件数的增加，合格品频率愈来愈趋于一个稳定值0.9。

现在引进概率的定义。设U为必然事件，V为不可能事件，A为一般的随机事件，它们的概率是一非负实数，分别记之为$P(U)$，$P(V)$和$P(A)$，且满足：

$$P(U)=1，P(V)=0，通常P(A)满足$$

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1$$

$P(A)$表示出现事件A的可能性的大小，将其称为事件 A 的**概率**。

事件A的概率$P(A)$可理解为事件 A 的函数。今后，我们用大写字母A，B，C，…表示事件，而用$P(A)$，$P(B)$，$P(C)$，…表示相应事件的概率。事件间主要有下列几种关系：

（1）　如果事件A发生，必然导致事件B发生，则称

事件A是事件B的**特款**，记作$A\subset B$或$B\supset A$。

若$B\supset A$且$A\supset B$，则称A与B**等价**，记作$A=B$.

（2） 事件A或B发生所构成的事件，称为事件A与B的**和**。记作$A\cup B$。其推广为事件A_1或A_2或……或A_N发生所构成的事件，称为事件A_1，A_2，……A_N的和，记作$\bigcup\limits_{n=1}^{N}A_n$。

（3） 事件A或B同时发生所构成的事件，称为事件A与B的**交**，记作$A\cap B$（简记为AB）。其推广为事件A_1，A_2，……，A_N同时发生所构成的事件，记为$\bigcap\limits_{n=1}^{N}A_n$。

（4） 若事件A发生，必然导致B不发生（反之亦然），则称A与B是**互不相容**的事件。即有$AB=V$。

若记$\bar{A}$表示事件A不发生的事件，称A与$\bar{A}$为**互逆**事件。于是，显然有

$$A\cup\bar{A}=U,\qquad A\cap\bar{A}=V.$$

事件A的概率$P(A)$的基本性质（见图1—1,a、b、c、d）：

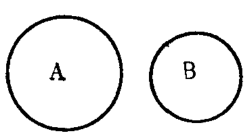


图1—1，a

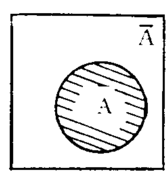


图1—1，b

（1） 若$A\cap B=V$，则$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

（2） 若$\bar{A}$为A的逆事件，则

$$P(\bar{A})=1-P(A)$$

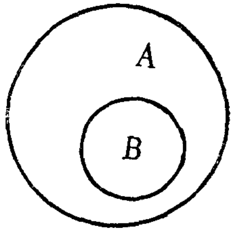


图1—1，c

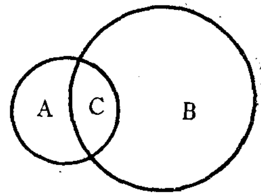


图1—1，d

（3） 若$A \supset B$，则$P(A) \geqslant P(B)$

（4） 若$A \cap B = C \neq V$，则

$$A = A \cap (B \cup \overline{B}) = \underline{A \cap B} \cup \underline{A \cap \overline{B}},$$

$$B = B \cap (A \cup \overline{A}) = \underline{B \cap A} \cup \underline{B \cap \overline{A}},$$

$$A \cup B = \underline{A \cap \overline{B}} \cup \underline{A \cap B} \cup \underline{B \cap \overline{A}},$$

$$P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)。$$

现在引进**条件概率**：$P(A|B)$表示在“事件B发生的条件下”事件A发生的概率。考虑事件集合B和A（见图1—1，e）

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

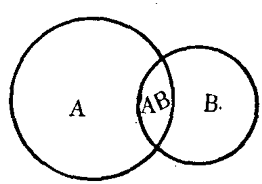


图1—1，e

由此可知**乘法定理**：

$$P(AB) = P(A|B)P(B)$$
$$= P(B|A)P(A).$$

例5 设96件产品中有5件次品，任意抽查两件，求两件都合格的概率

解：以A代表第一次抽得合格品的事件，以B代表第二次抽得合格品的事件。由乘法定理

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A)$$

而 $$P(A)=91/96,\ P(B|A)=90/95$$

所以 $$P(AB)=\frac{91\times 90}{96\times 95}$$

$P(AB)$就是所抽的两件都是合格品的概率。由于

$$B=B(A\cup\bar{A})=BA\cup B\bar{A}$$

$$P(B)=P(BA)+P(B\bar{A})$$

$$P(B\bar{A})=P(\bar{A})P(B|\bar{A})$$

$$P(\bar{A})=5/96,\qquad P(B|\bar{A})=91/95$$

所以

$$P(B)=\frac{90\times 91}{96\times 95}+\frac{5\times 91}{96\times 95}=\frac{91}{96}\neq P(B|A)$$

这说明了由于事件A的出现影响了事件B的概率，表明$P(B|A)$与A有关。但有时若事件A不影响事件B的概率，即

$$P(B|A)=P(B)\text{或}P(AB)=P(A)P(B)$$

则称事件A与B是**独立的**。

例 6　由两道工序加工圆柱体，直径不合格率为p，长度不合格率为q。A表示直径不合格的事件，B表示长度不合格的事件。若该两道加工工序完全无关，那末应有

$$P(A)=p,\ P(B)=q,\ P(AB)=P(A)P(B)=pq$$

这表明事件A和B是独立的。

§2 概 率 场

在考察任一随机现象时，每次的试验或观察总可得一结果，称此结果为**基本事件**，基本事件的全体为**基本空间**，记为U。若把基本空间视为一个集合，其元素为基本事件，

在问题的研究中还要涉及U中的某些子集合A，B，……这些子集合的全体记为$\mathscr{F}$，要求$\mathscr{F}$满足：

（1） $U \in \mathscr{F}$；

（2） 若$A_n \in \mathscr{F}$，$n=1, 2, \cdots$，则$\bigcup\limits_n A_n \in \mathscr{F}$；

（3） 若$A \in \mathscr{F}$，则$\bar{A} \in \mathscr{F}$。

由上面（1），（3）立即知$V \in \mathscr{F}$。

在$\mathscr{F}$上定义概率P：任取$A \in \mathscr{F}$，$P(A)$应满足：

（1） $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$，　$A \in \mathscr{F}$；

（2） $P(U)=1$；

（3） 若$A_m \in \mathscr{F}$，$A_i \cap A_j = V$，$i \neq j$，　则：

$P(\bigcup\limits_n A_n) = \sum\limits_n P(A_n)$，称为概率的完全可加性。

这样的U，$\mathscr{F}$，P称之为一个**概率场**，记作（U，$\mathscr{F}$，P），有时也称它为一个**概率空间**。

根据上述公理，我们立即可以推出一些重要的结论：

（1） 不可能事件的概率为零，即$P(V)=0$。

（2） 若$A_i \cap A_j = V (i \neq j)$，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

（见图1－2，a）

（3） 任取$A \in \mathscr{F}$，有$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

（4） 若$A \supset B$（见图1－2，b），则

$$P(A-B) = P(A) - P(B)$$

（5） 若$A \supset B$，则$P(A) \geqslant P(B)$.

（6） 一般情况（见图1－2，c）我们有

$$P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B),$$

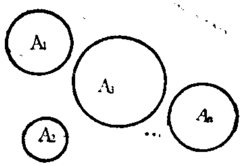
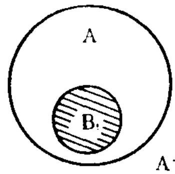
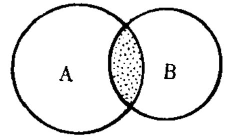


图1—2，a



$A-B=A\bar{B}$

图1—2，b



$A=A(B\cup\bar{B})=AB\cup A\bar{B}$

图1—2，c

$$P(\bigcup_i A_i)\leqslant\sum_i P(A_i).$$

在概率场$(U,\mathscr{F},P)$中定义条件概率$P(A|B)$如下：

$$P(A|B)=P(AB)/P(B)\qquad(P(B)\neq0).$$

若“已知事件B发生”的条件对事件A的概率不发生影响，即有$P(A|B)=P(A)$，此时有

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

称**事件A对于事件B独立**。

由条件概率及事件独立性的定义，可以推出下列结果。

（1） 若事件A对于事件B独立，$P(A)\neq0$，$P(B)\neq0$，则事件B对于事件A也独立，即两个事件的独立性是对称的。因为

$$\begin{aligned}P(AB)&=P(A|B)P(B)=P(B|A)P(A)\\&=P(A)P(B).\end{aligned}$$

我们称为$\{A,B\}$独立。

（2） 若$\{A,B\}$独立，则$\{\bar{A},B\}$，$\{A,\bar{B}\}$，$\{\bar{A},\bar{B}\}$亦都独立。因为

$$\bar{A}B=B-AB,$$

$$\begin{aligned}P(\bar{A}B)&=P(B)-P(AB)=P(B)-P(A)P(B)\\&=P(B)(1-P(A))=P(B)P(\bar{A}).\end{aligned}$$

独立性的概念可以推广至多个事件的情况：一组事件 A_1，A_2，…，A_s称为**相互独立的**，那么对任何$r(1\leqslant r\leqslant s)$及$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_r\leqslant s$有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_r})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_r}).$$

应当注意，两两独立的一组事件不一定是相互独立的。例如一个均匀的四面体，第一面染红色记为A，第二面是绿色记为B，第三面是蓝色记为C，第四面同时染有红、绿、蓝色记为(ABC)。投掷四面体时出现A,B，C的概率均为1/2(见图1—2，d)

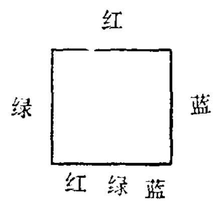


图1—2，d

$$P(A)=P(B)=P(C)=\tfrac{1}{2}，\text{而}$$

$$P(AB)=P(BC)=P(CA)=\tfrac{1}{4},$$

然而 $P(ABC)=\frac{1}{4}\neq P(A)P(B)P(C).$

（3） **全概率公式** 设事件B能而且只能与互不相容的事件$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$之一同时发生，即

$$B=\bigcup_{i=1}^{\infty}BA_i$$

这里当$i\neq j$时由于$A_iA_j=V$，因而$(BA_i)(BA_j)=V$，表明BA_i与BA_j是互不相容的，由概率的完全可加性有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{\infty}P(BA_i)$$

利用 $P(B|A_i)=P(BA_i)/P(A_i)$

就可推得 $P(B)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)P(B|A_i)$

这就是全概率公式。

全概率公式的几何意义见图1—2，e：B的面积为$P(B)$，A_i的面积为$P(A_i)$，B在A_i中所占有的面积与A_i的面积的比值为$P(B|A_i)$。

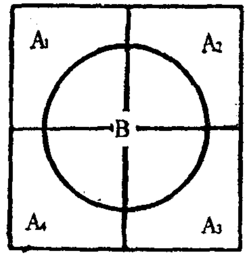


图1—2，e

（4） **贝叶斯(Bayes)公式** 设事件B能而且只能与互不相容的事件A_1，A_2，…，A_n，…之一同时发生，即

$$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} BA_i$$

于是从 $P(A_iB) = P(B)P(A_i|B) = P(A_i)P(B|A_i)$

得 $P(A_i|B) = P(A_i)P(B|A_i)/P(B)$

利用全概率公式

$$P(A_i|B) = P(A_i)P(B|A_i)/\sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)P(B/A_j)$$

这就是贝叶斯公式。

例1 在一段时间t内某电话站得到K次呼唤的事件A_t^K的概率为$P_K(t)$，假设在同一时间长度内得到K次呼唤的概率相同，且两段时间内各自得到呼唤的事件是相互独立的，求在$2t$时间内得到S次呼唤的概率。

解： $A_{2t}^s = A_t^0 A_t^s \cup A_t^1 A_t^{s-1} \cup \cdots \cup A_t^s A_t^0$

$$P(A_{2t}^s) = P_s(2t) = \sum_{i=0}^{s} P(A_t^i A_t^{s-i})$$

$$= \sum_{i=0}^{s} P(A_t^i)P(A_t^{s-i}) = \sum_{i=0}^{s} P_i(t)P_{s-i}(t)$$

已知 $P_K(t)=\dfrac{(at)^K}{K!}e^{-at}$， 这里 $a=const$.

于是

$$P(A_{2t}^s)=P_s(2t)=\sum_{i=0}^{s}\frac{(at)^s}{i!(s-i)!}e^{-2at}$$

$$=\frac{(at)^s}{s!}\cdot e^{-2at}\sum_{i=0}^{s}\frac{s!}{i!(s-i)!}$$

但 $$\sum_{i=0}^{s}\frac{s!}{i!(s-i)!}=(1+1)^s=2^s$$

所以 $$P_s(2t)=\frac{(2at)^s}{s!}e^{-2at}.$$

例 2 带有吸收壁的随机游动。一个质点从 x 轴的某一点 K 出发（$0<K<N$，且 K，N 均为整数），随机地在直线上游动。每次向右移动一个单位的概率为 p，向左移动一个单位的概率为 $q=1-p$．当质点游动到位置0和 N 时游动就停止，即质点被吸收。0和 N 称为吸收壁。

设 P_K^0 和 P_K^N 分别表示质点从 K 点出发而被吸收壁 0 和 N 吸收的概率。求 P_K^0 和 P_K^N

解：设 B 表示从 K 点出发被0吸收的事件，B_+ 表示从 $K+1$ 点出发被0吸收的事件，B_- 表示从 $K-1$ 点出发被0吸收的事件，则有

$$B=B\cap\{K\to K+1\}\cup B\cap\{K\to K-1\}$$
$$=B_+\cap\{K\to K+1\}\cup B_-\cap\{K\to K-1\}$$

其中 $\{K\to K+1\}$ 表示质点从 K 点游动到 $K+1$ 点的事件，

因而

$$P_K^0 = pP_{K+1}^0 + qP_{K-1}^0 \qquad K \neq 0,\ N$$

$$P_0^0 = 1\ ,\quad P_N^0 = 0,\ p = P(K+1|K),\ q = P(K-1|K)$$

上述方程的特征方程为

$$p\lambda^2 - \lambda + q = 0$$

有两根　$\lambda = 1,\ q/p$

其通解为　$P_K^0 = C_0 + C_1(q/p)^K$

选择C_0，C_1使之满足端点条件后解得

$$P_K^0 = \frac{q^N - q^K p^{N-K}}{q^N - p^N} \qquad K = 0, 1, 2, \cdots, N$$

而　　　$P_K^N = 1 - P_K^0$.

例 3　在炮战中，分别在距目标250米，200 米，150米处射击的概率为0.1，0.7，0.2，而在各处命中的概率分别为0.05，0.1，0.2。现在已知目标被击毁，求击毁目标的炮弹是由距目标200米射出的概率。

解：设A_1为距目标250米时射击的事件，

A_2为距目标200米时射击的事件，

A_3为距目标150米[redacted]

B为命中目标这[redacted]

因为　$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = U$，因[redacted]

$P(A_2|B) = P(A_2)P$[redacted]$P(B|A_i)$

$$= 0.7 \times 0.1/(0.05 \times 0.1 + 0.1 \times 0.7 + 0.2 \times 0.2) = 0.6087.$$