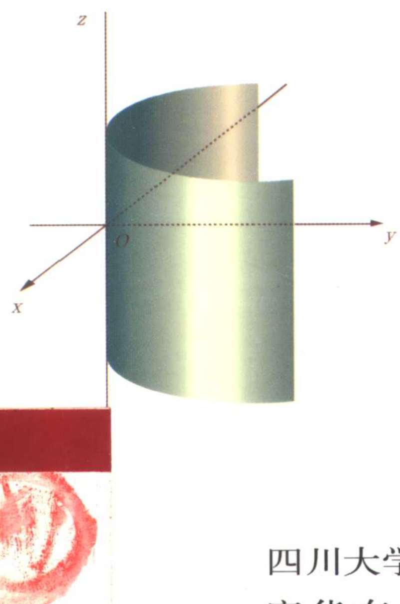
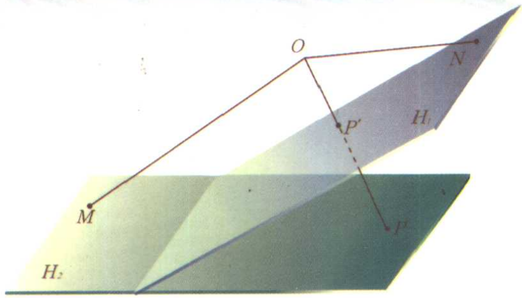
高等院校选用教材系列（理科类）

解析几何教程





四川大学数学学院　组编

廖华奎　王宝富　编著

科学出版社

Science Press

高等院校选用教材系列

解析几何教程

四川大学数学学院 组编

廖华奎 王宝富 编著

科学出版社

2000

内 容 简 介

本教材作为面向21世纪教学改革项目之一,是在四川大学数学学院各专业多次讲授解析几何课程的基础上形成的.主要内容包括向量代数,空间直线和平面,常见曲面,二次曲面和二次曲线,正交变换和仿射变换,射影平面等.本教材力求为学生提供一个整体的数学框架,注重培养学生掌握数学思想方法,努力调动学生主动思考、解决问题的积极性,在内容编排上由浅入深,从点到线、到面,循序渐进.

本教材可供综合性大学和师范院校数学系的教师和学生使用,也可作为科技工作者学习解析几何课程的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

解析几何教程/廖华奎,王宝富编著.-北京:科学出版社,2000.8

(高等院校选用教材系列)

ISBN 7-03-008547-7

Ⅰ.解… Ⅱ.①廖… ②王… Ⅲ.解析几何-高等学校-教材 Ⅳ.0182

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第60685号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

丽源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2000年8月第 一 版 开本:850×1168 1/32

2000年8月第一次印刷 印张:6

印数:1—3 000 字数:155 000

定价:10.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换(北燕))

前　言

解析几何是高等院校各专业的重要基础课程,不仅数学、物理学等的许多后继课程要以此为基础,更为重要的是,它的思想方法和几何直观性可为许多抽象的、高维的数学物理问题提供模型和背景.

在面向21世纪教学内容和课程体系改革中,关于解析几何课程的改革已产生许多好的设想和教材.在我校,解析几何也被作为省级重点课程建设项目进行教改尝试.本教材的编写旨在对这几年的改革实践作一总结.

在该课程的教学过程中,常常能够感受到,现代的学生虽然有良好的素质,但受应试教育的影响,对数学的学习显得较为机械,对教师的依赖性较强,除了模仿例题做习题外,在怎样读书,特别是主动提出问题,思考问题,理解和掌握数学的思想方法,动手实践方面较为欠缺.为此,我们在教学过程中作了一些有益的尝试,并试图通过教材的改革来弥补这一点.

首先,我们期盼通过教材改革来引导学生学会看书,我们在全书的每一个章节中穿插了许多的思考题,这些思考题直接与内容相关,但又是学生易忽视的问题,有些是开放性的,想以此来培养学生良好的读书习惯,学会主动思考,动手实践.

第二,按照人们的思维习惯,我们对教学内容进行调整,按照从点到线,到面,再讨论其关系的思路,从简单到复杂,循序渐进,使学生的思维有一个自然的升华过程,以培养学生探索未知的数学素养.

第三,我们试图突出各章节的主要数学思想,立足为学生建立一个整体框架,并努力阐述几何与代数的关系,用代数的手段解决几何的问题,而省略去许多繁琐的运算,其中部分留给学生动手解

决.

第四,我们更多地注重与后继课程密切相关的二次曲面阐述,而对二次曲线的讨论则因为思想方法相同而简略.

实事求是地讲,新生刚进校后,有很多地方并不能适应本书思路的讲法,但我们还是坚持这样,只希望通过我们的努力,让学生在后继的课程学习中学得主动、愉快.

解析几何课程是省重点课程建设项目,得到学校及数学学院的大力支持.李安民教授对几何学的许多深刻见解促进了本教材编写思想的形成,与彭联刚教授的多次讨论使编者获益匪浅.赵国松教授仔细审阅了本教材,并提出了许多宝贵意见,在此一并表示感谢.由于编者水平有限,仍会有许多不足之处,另外,本书的编写思想也只是一家之观念,难免有不当之处,还请读者多提宝贵意见.

编者

2000年3月于四川大学

目　　录

第一章　向量代数

解析几何是利用代数方法来研究几何图形性质的一门学科，它包括平面解析几何和空间解析几何两部分.通过在几何空间中建立坐标系，就可将空间中的点用坐标表出，从而图形的几何性质可以表为图形上点的坐标之间的关系，特别是代数关系.17 世纪初，法国数学家笛卡儿 (Descartes，R) 和费马(Fermat， P. de)利用这种关系研究几何图形，创立了解析几何.从此变数被引进了数学，成为数学发展中的转折点，为微积分的出现创造了条件.

§1　向量及其线性运算

1. 向量的概念

我们从力学中知道，力、速度这些量既有大小，又有方向，它们可以用有向线段来表示，力(速度)的合成可以通过有向线段来进行.这类既有大小，又有方向的量称为向量(或矢量).我们将代数运算引到向量中去，来研究图形性质.这种方法具有直观性，更容易理解图形性质的几何意义，并且它在物理学等学科中有重要的应用.此外向量的概念及其运算也为线性代数中深入理解向量空间提供了直观的几何背景.

既有大小，又有方向的量称为**向量**(或**矢量**).我们用符号 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，…表示.

一个向量 $\boldsymbol{a}$ 可以用一有向线段$\overrightarrow{AB}$来表示，有向线段的长度$|\overrightarrow{AB}|$表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小，从始点 A 到终点 B 的指向表示 $\boldsymbol{a}$ 的方向(如图 1.1).

向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小称为向量的**长度**(或**模**)，记为$|\boldsymbol{a}|$.

长度为零的向量称为**零向量**，记为 0.

长度为 1 的向量称为**单位向量**.

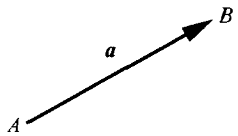


图 1.1

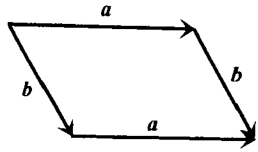


图 1.2

如果一个向量能够由另一个向量经平行移动得到，则称这两个向量相等（图 1.2）.

两向量称为同向的（反向的），是指它们平行，并从同一始点引等于它们的向量时，其终点分布在这始点的同一侧（两侧）. 与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量记为 $e\boldsymbol{a}$.

与 $\boldsymbol{a}$ 长度相等但反向的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的**反向量**，记为 $-\boldsymbol{a}$.

思考题：平面中具有同一始点的所有单位向量的终点的几何轨迹是什么图形？

2. 向量的加法

回忆物理学中力、速度、位移的合成法.

定义 1.1 对于向量 a，b，作有向线段 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，把 $\overrightarrow{AC}$ 表示的向量 $\boldsymbol{c}$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **的和**，记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（图 1.3），即

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

由此公式表示的向量加法规则称为**三角形法则**.

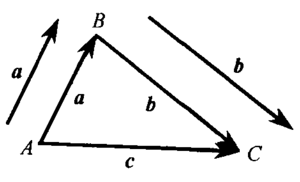


图 1.3

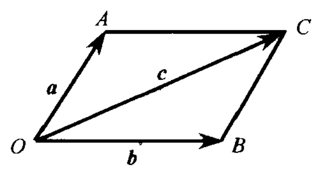


图 1.4

注：从同一始点 O 作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，再以 OA 和 OB 为边作平行四边形 $OACB$，则对角线 $\overrightarrow{OC}$ 也表示向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的和

(图 1.4),这称为向量的**平行四边形法则**.

向量的加法满足以下规律:

(1)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$(交换律);

(2)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$(结合律);

(3)$\boldsymbol{a}+0=\boldsymbol{a}$;

(4)$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=0$.

其中,$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为任意向量.这些规律可由加法运算的定义直接得出,请读者自己证明.

作为加法的逆运算,可定义减法如下:

定义 1.2 向量的减法 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

减法的几何意义如图 1.5,即$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$.

由向量加法的三角形法则容易得到三角不等式

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

其中,$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为任意向量.其几何意义是,三角形两边之和大于第三边.这个不等式可以推广到任意有限多个向量和的情形:

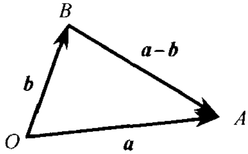


图 1.5

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\cdots+\boldsymbol{l}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+\cdots+|\boldsymbol{l}|.$$

思考题:1.三角不等式中等号成立的条件是什么?

2.$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$成立的条件是什么?

3.平面上封闭折线所表示的向量和$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$一定为 0 将此结论推广至空间.

3. 数量与向量的乘法

定义 1.3 实数 λ 与向量$\boldsymbol{a}$ 的乘积$\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量,它的长度为$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$,它的方向当 $\lambda>0$ 时与$\boldsymbol{a}$ 相同,当 $\lambda<0$ 时与$\boldsymbol{a}$ 相反.当 $\lambda=0$ 或$\boldsymbol{a}=0$ 时,则 $\lambda\boldsymbol{a}=0$.

设 $\boldsymbol{a}\neq0$,因为$|\boldsymbol{a}|^{-1}\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向,且

$$||\boldsymbol{a}|^{-1}\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}|^{-1}|\boldsymbol{a}|=1.$$

所以 $e_a=|\boldsymbol{a}|^{-1}\boldsymbol{a}$,这称为把 $\boldsymbol{a}$ **单位化**.

思考题:若 $a//b$,那么 a,b 之间的关系如何?

对于任意的向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和任意实数 λ,μ,数量与向量的乘法满足以下规律:

(1)$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(2)$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;

(3)$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

(1)可以用定义 1.3 直接验证.

(2)的证明:若 $\boldsymbol{a}=0$ 或 λ,μ 中有一个为零时,则(2)显然成立.下面设 $\lambda\mu\neq0,\boldsymbol{a}\neq0$.

情形 1 若 $\lambda\mu>0$,则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\mu\boldsymbol{a}$ 同向,且 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ 同向,因此有

$$|\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{a}|+|\mu\boldsymbol{a}|=(|\lambda|+|\mu|)|\boldsymbol{a}|,$$

又有

$$|(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda+\mu||\boldsymbol{a}|=(|\lambda|+|\mu|)|\boldsymbol{a}|,$$

因此

$$|(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}|,$$

故

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}.$$

情形 2 若 $\lambda\mu<0$,不妨设 $\lambda>0,\mu<0$.

1° 若 $\lambda+\mu=0$,则 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=0$,而

$$\begin{aligned}\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}&=\lambda\boldsymbol{a}+(-\lambda)\boldsymbol{a}=(\lambda\boldsymbol{a})+(-1)(\lambda\boldsymbol{a})\\&=(\lambda\boldsymbol{a})-(\lambda\boldsymbol{a})=0.\end{aligned}$$

故(2)成立.

2° 若 $\lambda+\mu>0$,则由情形 1 知

$$[(\lambda+\mu)+(-\mu)]\boldsymbol{a}=(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}+(-\mu)\boldsymbol{a},$$

即得

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}+(-\mu\boldsymbol{a})=(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{a},$$

从而有

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}.$$

3° 若 $\lambda+\mu<0$,则由情形 1 知

$$[(\lambda+\mu)+(-\lambda)]\boldsymbol{a}=(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}+(-\lambda)\boldsymbol{a}$$
$$=(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}+(-\lambda\boldsymbol{a}),$$

类似于 2°可得(2)式.

(3)的证明　若 $\lambda=0$ 或者 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中有一个为 0,则(3)显然成立.下面设 $\lambda\neq0,\boldsymbol{a}\neq0,\boldsymbol{b}\neq0$.

情形 1　若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行,则由定义 1.3 后面的思考题结论知存在实数 μ 使 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$,于是

$$\begin{aligned}\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})&=\lambda(\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a})=\lambda[(1+\mu)\boldsymbol{a}]\\&=[\lambda(1+\mu)]\boldsymbol{a}=[\lambda+\lambda\mu]\boldsymbol{a}\\&=\lambda\boldsymbol{a}+(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

情形 2　若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行,那么当 $\lambda>0$ 时,如图 1.6 作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$,于是 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,作 $\overrightarrow{OC}=\lambda\boldsymbol{a},\overrightarrow{CD}=\lambda\boldsymbol{b}$,则 $\triangle OAB\backsim\triangle OCD$,从而 D 必在直线 OB 上,于是 $\overrightarrow{OD}=\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,又 $\overrightarrow{OD}=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.故有

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$

当 $\lambda<0$ 时,可作类似的讨论.

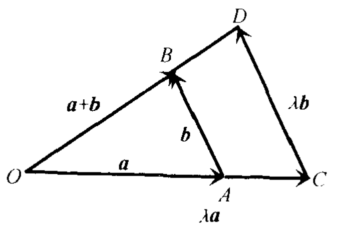


图 1.6

4. 共线、共面的向量组

向量的加法和数量与向量乘法统称为向量的**线性运算**.

设 $\boldsymbol{a}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是一组向量,$k_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是一组实数,则 $\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\boldsymbol{a}_i$ 是一个向量,称它为向量组 $\boldsymbol{a}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的一个**线性组合**.

定义 1.4　平行于同一直线(平面)的向量组称为**共线**的(**共面的**)向量组.

零向量与任意向量共线;共线的向量组一定共面;若 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线.

思考题:两个向量是否一定共面?

定义 1.5　若对于向量组 $\boldsymbol{a}_i(i=1,2,\cdots,n)$,存在不全为 0 的

实数 $k_i(i=1,2,\cdots,n)$,使

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \boldsymbol{a}_i = 0,$$

则称向量组 $\boldsymbol{a}_i(i=1,2,\cdots,n)$**线性相关**,否则称向量组**线性无关**.

思考题:对照此定义,采用陈述的方式,写出向量组线性无关的定义.

命题 1.1 两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 线性相关.

证明 必要性 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中有一个为零向量,不妨设 $\boldsymbol{a}=0$,则对实数 $k_1=1,k_2=0$,有

$$k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}=1\cdot 0+0\cdot\boldsymbol{b}=0,$$

因而 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 线性相关.

若 a,b 都不为 0,且同向,则 $e_a=e_b$,从而有

$$\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{e}_b=|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{e}_a=|\boldsymbol{b}|(|\boldsymbol{a}|^{-1}\boldsymbol{a})=|\boldsymbol{b}|(|\boldsymbol{a}|^{-1})\boldsymbol{a}.$$

令 $k_1=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|^{-1},k_2=-1$.则有

$$k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}=0.$$

故 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 线性相关.若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 反向,可作类似的讨论.

充分性 设存在不全为 0 的实数 k_1,k_2 使 $k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{a}=0$.不妨设 $k_1\neq 0$,则有 $\boldsymbol{a}=(-k_1^{-1}k_2)\boldsymbol{b}$,故 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线.

思考题:请考虑两向量线性无关的充要条件及其几何特征.

推论 1.1 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线且 $\boldsymbol{a}\neq 0$,则存在唯一的实数 λ 使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

命题 1.2 三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面(不共面)的充要条件是 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 线性相关(线性无关).

此命题的证明留作习题.

思考题:在平面和空间中各画出一线性相关和线性无关的向量组.

定理 1.1 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线,则 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面的充要条件是存在唯一的一对实数 λ,μ 使得

$$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}.$$

证明 必要性 由 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面及命题 1.2 知,存在不全为

0 的实数 k_1,k_2,k_3 使

$$k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}+k_3\boldsymbol{c}=0.$$

我们断定 $k_3\neq0$. 否则有不全为 0 的实数 k_1,k_2,使得

$$k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}=0.$$

这与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线矛盾. 因而我们得到

$$\boldsymbol{c}=(-k_3^{-1}k_1)\boldsymbol{a}+(-k_3^{-1}k_2)\boldsymbol{b},$$

令 $\lambda=-k_3^{-1}k_1,\mu=-k_3^{-1}k_2$,那么

$$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}.$$

假如另有 λ',μ' 使 $\boldsymbol{c}=\lambda'\boldsymbol{a}+\mu'\boldsymbol{b}$,则

$$\begin{aligned}0&=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{c}=(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})-(\lambda'\boldsymbol{a}+\mu'\boldsymbol{b})\\&=(\lambda-\lambda')\boldsymbol{a}+(\mu-\mu')\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线,所以必有

$$\lambda-\lambda'=0,\mu-\mu'=0,$$

于是 $\lambda=\lambda',\mu=\mu'$. 唯一性得证.

充分性是显然的.

定理 1.2 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面,则对空间中任一向量 $\boldsymbol{d}$ 均存在唯一的数组(λ,μ,γ),使得

$$\boldsymbol{d}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}.$$

证明 如图 1.7,取一点 O,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c},\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{d}$. 过 D 作一直线与 OC 平行,且与 OA 和 OB 决定的平面交于 M. 过 M 作一直线与 OB 平行,且与 OA 交于 N. 因为

$$\overrightarrow{ON}\parallel\boldsymbol{a},\overrightarrow{NM}\parallel\boldsymbol{b},\overrightarrow{MD}\parallel\boldsymbol{c},$$

所以分别存在实数 λ,μ,γ 使得

$$\overrightarrow{ON}=\lambda\boldsymbol{a},\overrightarrow{NM}=\mu\boldsymbol{b},\overrightarrow{MD}=\gamma\boldsymbol{c}.$$

从而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{d}=\overrightarrow{OD}&=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{MD}\\&=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

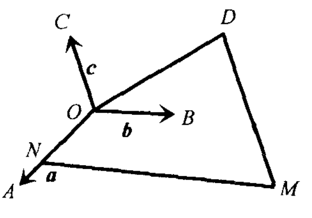


图 1.7

唯一性 若

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD}&=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}\\&=\lambda_1\boldsymbol{a}+\mu_1\boldsymbol{b}+\gamma_1\boldsymbol{c},\end{aligned}$$

则得

$$(\lambda-\lambda_1)\boldsymbol{a}+(\mu-\mu_1)\boldsymbol{b}+(\gamma-\gamma_1)\boldsymbol{c}=0.$$

因为$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$不共面,所以

$$\lambda=\lambda_1,\mu=\mu_1,\gamma=\gamma_1.$$

思考题:平面上的任意三个向量是否线性相关? 空间中的任意四个向量是否线性相关?

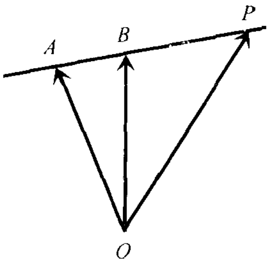


图 1.8

例 1.1 设 A,B 是不同的两点,则点 P 在直线 AB 上的充要条件是存在唯一的一对实数λ,μ,使得

$$\begin{cases}\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB},\\ \lambda+\mu=1,\end{cases}\qquad(*)$$

其中,O 是任意取定的一点.而 P 在线段 AB 上的充要条件是$\lambda\geqslant0,\mu\geqslant0$ 且$(*)$成立.

证明 必要性 设 P 在直线 AB 上,则$\overrightarrow{AP}$与$\overrightarrow{AB}$共线,显然$\overrightarrow{AB}\neq0$.由推论 1.1 得存在唯一的 k 使

$$\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}.$$

任取一点 O(如图 1.8),由上式得

$$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}),$$

即有

$$\overrightarrow{OP}=(1-k)\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}.$$

令 $\lambda=1-k,\mu=k$,因而 $\lambda+\mu=1$,且

$$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}.$$

由 k 的唯一性知λ,μ 是唯一的.

充分性 若对某一点 O,$(*)$式成立,则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}&=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}-(\lambda+\mu)\overrightarrow{OA}\\&=\mu\overrightarrow{OB}-\mu\overrightarrow{OA}=\mu(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\mu\overrightarrow{AB},\end{aligned}$$

因而$\overrightarrow{AP}$与$\overrightarrow{AB}$共线,所以 P 在直线 AB 上.

对于后半部分,由于 P 在线段 AB 上,所以$\overrightarrow{AP}$与$\overrightarrow{AB}$同向,故$(*)$成立且有 $0\leqslant|\overrightarrow{AP}|\leqslant|\overrightarrow{AB}|$,即 $0\leqslant k\leqslant1$,从而$(*)$中的

$\lambda = 1 - k \geqslant 0, \mu = k \geqslant 0$. 反之若 $\lambda \geqslant 0, \mu \geqslant 0$，由 $\lambda + \mu = 1$，知 $0 \leqslant \mu \leqslant 1$，因而 $0 \leqslant |\overrightarrow{AP}| \leqslant |\overrightarrow{AB}|$，即 P 在线段 AB 上.

例 1.2 如图 1.9，已知 $\triangle ABC$ 及一点 O，试证 O 是 $\triangle ABC$ 的重心的充要条件是 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 0$.

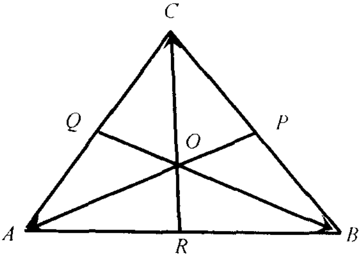


图 1.9

证明 必要性 设 O 是 $\triangle ABC$ 的重心，P, Q, R 分别是三边 BC, CA, AB 的中点，则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{PA} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BA}) \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}\right) \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BA},\end{aligned}$$

同理得到

$$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB},$$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

于是

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}) + \frac{2}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CC} = 0.\end{aligned}$$

充分性 设 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 0$，而 $\triangle ABC$ 的重心为 O^*. 则由必要性知 $\overrightarrow{O^*A} + \overrightarrow{O^*B} + \overrightarrow{O^*C} = 0$. 但是

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OO^*}+\overrightarrow{O^*A},\ \overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OO^*}+\overrightarrow{O^*B},$$
$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OO^*}+\overrightarrow{O^*C}.$$
$$0=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OO^*}+\overrightarrow{O^*A}+\overrightarrow{O^*B}+\overrightarrow{O^*C}$$
$$=3\overrightarrow{OO^*}.$$
故$\overrightarrow{OO^*}=0$,即 $O^*=O$.

习题 1.1

1.试证向量加法的结合律,即对任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$,成立

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

2.设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 两两不共线,试证顺次将它们的终点与始点相连而成一个三角形的充要条件是 $a+b+c=0$.

3.试证三角形的三中线可以构成一个三角形.

4.用向量法证明梯形两腰中点连线平行于上、下底且等于它们长度和的一半.

5.试证命题 1.2.

6.设 A,B,C 是不共线的三点,它们决定一平面 Π,则点 P 在Π 上的充要条件是存在唯一的数组(λ,μ,γ)使得

$$\begin{cases}\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC},\\ \lambda+\mu+\gamma=1,\end{cases}\tag{$*$}$$

其中,O 是任意一点.P 在$\triangle ABC$ 内的充要条件是($*$)与 $\lambda\geqslant0,\mu\geqslant0,\gamma\geqslant0$ 同时成立.

7.在$\triangle ABC$ 中,点 D,E 分别在边 BC 与 CA 上,且 $BD=\frac{1}{3}BC,CE=\frac{1}{3}CA$,$AD$ 与 BE 交于 R,试证

$$RD=\frac{1}{7}AD,\ RE=\frac{4}{7}BE.$$

8.用向量法证明$\triangle ABC$ 的三条中线交于一点 P,并且对任意一点 O 有

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$

9.用向量法证明四面体 $ABCD$ 的对棱中点连线交于一点 P,且对任意一点 O 有

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}).$$