

(力学参考资料十四)

有限元素法

译文集

115

4

科学技术文献出版社重庆分社

微型计算机——Z-80重订启事

此书从79年12月份出版发行后，深受读者的欢迎，但由于当时对印数估计不足，书早已售缺，为了满足读者要求，决定重印，估计十月底出书，定价1.20元，外加每本邮费0.05元，需要者，请直接来款至重庆市2104信箱发行组，并在附言内注明用途、经办人。开户银行：重庆市中区七星岗分理处；帐号：894547。

内容简介如下：Z-80微型计算机是美国 Zilog 公司生产的第一种八位微型机，也是目前所有八位微型机中功能最强的一种。其特点是指令执行时间短，接口简单，用廉价的动态存储器和有丰富的指令系统，因而在国际市场上较受人注目。本文集着重介绍 Z-80的硬件，包括中央处理器(CPU)，并行输入/输出控制(PIO)，计数定时器(CTC)，串行输入/输出控制器(SIO)，直接存储存取控制器(DMAC)，中断结构和动态存储器的接口技术。读者阅后，可对 Z-80 微型计算机的硬件有全面的认识。

读者对象：从事微型计算机设计、生产、科研和应用的人员，高等院校有关专业师生。

有限元素法译文集(力学参考资料十四)

中国科学技术情报研究所重庆分所	编	辑
科学技术文献出版社重庆分社	出	版
重庆市市中区胜利路91号		
四川省新华书店重庆发行所	发	行
重 庆 印 制 第 一 厂	印	刷

开本：787×1092毫米1/16 印张：10 $\frac{1}{2}$ 字数：28万

1980年8月第一版 1980年8月第一次印刷

科技新书目：167—225 印数：1—3,600

书号：13176·71

定价：1.10元

目 录

固体力学中的有限元素法	(1)
有限元法的最新发展、动向及应用	(14)
非线性弹性力学中边值问题的有限元逼近	
理论的最近进展	(24)
平衡法、混合法和杂交法的最近发展概况	(35)
杂交有限元法	(48)
有限元模型变分基础的一些考察	(62)
边界单元法与有限元	(66)
非椭圆型问题的有限元分析	(72)
有限元法的数值特性	(80)
由拉格朗日乘子生成的鞍点问题的存在性、唯一性和逼近	(90)
解板弯曲问题的某些非协调有限元	(102)
非协调方法的收敛性	(124)
非规则有限元问题的自动嵌套分割(多层子结构)算法	(137)
在平均意义下有限元法的局部高阶精度	(148)
有限元法中的稀疏矩阵问题	(161)

固体力学中的有限元素法

C. A. Felippa R. W. Clough

1. 引言

有限元素法是一个数值离散化方法, 它把原来用于一般框架系统结构分析的方法推广用以分析复杂边值问题。这个方法已广泛用于结构力学的范畴, 特别是在飞机工业中, 近来在广大非结构问题中也得到应用。

有限元素法在结构力学方面的最初发展可以追溯到1950年初, 关于飞机机翼应力分析推导了一个令人满意的数值方法[1]。这个方法的名称是在[2]中提出来的, 这是一篇关于更为一般的土木工程应用的文献。这种方法能得到普遍的承认是由于如下两个并行的原因:

(a) 结构矩阵交换理论的公式化[3,4], 它为简化表示和组织计算提供了一个很有效的好方法。

(b) 高速数字计算机的引入。

本文的目的在于描述有限元素法的数学基础, 提出实际应用这一方法的简单梗概。此外介绍几种专门有限元素法分析的结果, 以说明方法的适应性和精确度, 并列举和讨论了有限元素法计算程序中的基本步骤。为使已经发表的有关这个比较新的分析方法的广泛而多种多样的文献得以利用, 文末附有比较广泛的参考文献。

2. 基本概念

有限元素法可以从下面两节所述的物理和数学两种不同观点推导和解释。

2.1 物理解释 物理的方法和这个方

法在结构分析中的最初公式化以及广泛应用密切相关(因此常用结构术语)。基本的思想是每一结构可以看作是由单独的结构元件或“有限元”进行物理装配而构成(或近似)。各元素在有限个交点或“节点”处连接。选择一个场函数 u (数量、向量或张量)作为未知量或“原变量”。在一种能量意义上和 u 共轭的函数 f 称为“力函数”。在每一分离元素的节点上定义两组有限节点值:

(a) 原节点值或“自由度”, 它规定这个元素内原变量假定的变化。

(b) 在一种能量意义上和(a)共轭的互补的一组, 它可以由作用于该元素的力函数场计算。

或者利用直接物理推理, 或者根据能量的考虑, 在这两组值之间建立一个交换矩阵关系(其表值即所谓影响系数)。根据一般的结构分析方法将原节点值在一个共同的座标系内匹配起来, 从而将所有有限元素进行物理装配。对 u 加上本质边界条件以后就得到关于未知原节点值的一组代数方程。

2.2 数学解释 在[5,6]中建立了有限元素法物理描述与著名的用以构造控制变分原理近似解的Ritz法之间的联系。在这种解释中只认为连续介质划分为有限元素格网, 而不是物理上分割。由单位节点值确定的原变量的假定状态表示试探函数或座标函数的一个基, 节点值对于这种基的广义座标。在有一定的支持条件的这种函数类上使控制能量泛函极小化的Ritz法完全等价于有限元素法, 而且得到的矩阵方程是连续欧拉场方程的有限近似[7]。

在数值分析范畴内, 根据有关的变分原

理对自伴边值问题的离散近似可以用两种不同的方法构成:

(1) 以格网函数值的有限差分代替导数,然后在单个格网区域上用数值积分公式逼近积分,建立有限差分格式。

(2) 用满足所需连续性条件的适当插值公式,就格网插值定义一组规定“修补”函数来近似被积函数。这正好是有限元素离散法。

第一个方法是构造差分方程的一个变分方法[8,9],因此具有经典有限差分逼近微分方程的有限元素法的某些优点。然而这不是Ritz法的一种形式,因而不产生极小化序列。

第二个方法是Courant[10]和Synge[11]提出来的,对于二维Dirichlet问题的Ritz分析,他们采用了一般三角形剖分上的分片线性函数。在[12—16], [74—78]中还可以找到其它应用。近来[17]介绍了对于大量一维问题收敛性的详细研究。由于目前运用的大多数分片多项式展开都可以按具有最大亏格(即最小连续性要求)的多项式样条归类,所以样条理论的迅速发展[18]提供了另一个研究有限元素法收敛性的有力的数学工具。

2.3 两种方法的比较 物理解释的优点是。

(a) 对实际工程师和程序使用者解释有限元素法具有很大的价值;此外对于由不同类型构件如梁、杆和板型元素组装而成的复杂结构系统,可以避免在分析的公式化表达中产生的困难。

(b) 物理分割和无约束有限元的概念允许简单地检查元素形成的计算机程序,这种程序可以组织并保存于程序库中,还允许发展有效的组装技术。

(c) 某些有限元公式(其中物理直观起极重要作用)和经典的Ritz法并不完全拟合。例如,假定的展开式可能并不满足全部的元素间连续性*(如在某些平板和壳元

素中),或者对于结构系统的元件可以采用不同离散格式等。

另一方面,数学推导允许对收敛性、误差界或误差估计和元素展开式要求等问题有一个一般的方法,以及考虑较广泛的一类应用。

3. 正线性算子的Ritz法

在这一节中我们不加证明地叙述某些对建立有限元素法收敛性必要条件有用的基本概念和性质。详细的数学讨论请参阅米赫林[19,20],现说明如下。

3.1 简要的理论 设 L 是复Hilbert空间 H 中的稠密集 M 上定义的一个线性算子。若 $u, v \in H$,数量积或内积是 (u, v) ,范数 $\|u\|^2 = (u, u)$ 。若对任意非零 $u \in M$, (Lu, u) 是实数且 >0 ,则 L 是正的。任何正算子都对称。若对任意 $u \in M$, 强不等式 $(Lu, u) > c\|u\|^2$ 成立,式中 $c > 0$,则 L 是正定的**。若 L 是正的,则方程

$$Lu = f, f \in H \quad (3.1)$$

在 M 中最多只有一个解,式中 u 满足齐次边界条件。如果这个解 $u \in M$ 存在,则它使如下二次泛函取极小

$$F(u) = (Lu, u) - (u, f) - (f, u) \\ = (Lu, u) - 2\operatorname{Re}(u, f) \quad (3.2)$$

对于非齐次边界条件, $F(u)$ 须适当扩充[20]。基本变分问题(3.2)在 M 中一般没有解。然而如果 L 是正定的,可以定义一个新的内积和范数。

$$(u, v)_L = (Lu, v), \|u\|_L^2 = (Lu, u), \\ u, v \in M \quad (3.3)$$

于是 M 变成一个新的Hilbert空间 H_L ,它可以用 H 的元素完备化。范数 $\|u\|_L$ 通常称为“能量范数”,因为在许多物理问题中 $(Lu, u)^{1/2}$ 表示内能。按 H_L 度量的收敛性经常称为按“能量范数的收敛性”或简称为“按能量收

* 有限元素法的这一推广在§8.2节讨论。

** (19)中用术语“正定”和“正有下界”分别代替上述定义“正”和“正定”。

敛”。现在可以用如下定义将泛函(3.2)推广到整个 H_L 上。

$$F(u) = (u, u)_L - 2\operatorname{Re}(u, u^*)_L \quad (3.4)$$

式中 $u^* \in H_L$, 使对任意 $f \in H$ 有 $(u, f) = (u^*, f)_L$ 。 u^* 的存在性由Riesz定理[21]保证, 因为 (u, f) 在 H_L 中是有界泛函。然后由 $u = u^*$ 使 $F(u)$ 极小化, 得 $\min F(u) = -\|u^*\|_L^2$ 。如果记 $u^* = Gf$, $f \in H$, 那么可以证明逆 G^{-1} 存在且是 L 在 H_L 中的自伴延拓。

如果 H 可分, H_L 也可分。设 $\{\varphi_n\}$ 是 H_L 中的完备序列(因为 M 在 H 中稠密, 故也在 H_L 中稠密, 因而此序列可以从 M 中选取。这种情况下 $\{\varphi_n\}$ 在 H 中完备这一点是充分的)。Ritz法就在于要在由座标 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 生成的 n 维子空间中寻找 $F(u)$ 的极小值。如果设

$$u \approx u_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i \quad (3.5)$$

则 $F(u_n)$ 关于广义座标 α_k 的极小化就建立了 $n \times n$ 线性方程组

$$\sum_{k=1}^n (\varphi_k, \varphi_i)_L \alpha_k = (f, \varphi_i), \quad i=1, 2, \dots, n \quad (3.6)$$

如果序列 $\{\varphi_n\}$ 是线性独立的, (3.6)可以对 α_k 求解, 再代入(3.5)中就可以定出Ritz近似解 u_n 。[20]中证明了如下性质:

(a) 序列 $\{u_n\} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ 是 $F(u)$ 的一个极小化序列, 即当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\lim F(u_n) = \inf F(u)$ 。

(b) 如果 L 是正定的, 则极小化序列 $\{u_n\}$ 按 H 的度量(按平均值收敛)和 H_L 的度量(按能量收敛)都收敛于精确解 u^* 。如果 L 是无界的, 如在微分算子的情况下, 一般来说 $f_n = Lu_n$ 并不趋向于 f , 即当 $n \rightarrow \infty$ 时“剩余”范数 $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ 。然而, $(f_n - f, g) \rightarrow 0$, 其中 g 是 H_L 中任意固定元素; 若 $\|f_n\|$ 有界, 则 g 可以是 H 的任意元素, 而 f_n 在 H 中弱收敛于 f 。

(c) 如果 L 只是正的, 且有一解存在,

那么我们仅可以断言 u_n 按能量收敛于 u^* 。

下面的§3.2节和§3.3节介绍Ritz法物理应用中更加专门化的重要问题。

3.2 数学物理线性微分算子 作为第一个例子, 设 R 是二维域, S 是它的充分光滑的边界, 法向为 $n(n_1, n_2)$, 切向为 s [图1(a)]。让我们引入 R 中在 S 上为零的实函数 $\epsilon \in C^{2p}$ 的集合 M_p 。在此集合上定义 $2p$ 阶自伴椭圆型算子

$$D_p u = (-1)^p \sum_{i,j=0}^p \frac{\partial^p}{\partial x^i \partial y^j} G_{i,j}^{k,l} \frac{\partial^p u}{\partial x^k \partial y^l} \quad (3.7)$$

为了利用矩阵形式来表示(3.7), 设*

$$(\partial^p)^T = \left\langle \frac{\partial^p}{\partial x^p} \frac{\partial^p}{\partial x^{p-1} \partial y} \dots \frac{\partial^p}{\partial y^p} \right\rangle \quad (3.8)$$

$$G_p = \begin{bmatrix} G_{p,0}^{p,0} & G_{p,0}^{p-1,1} & \dots & G_{p,0}^{0,p} \\ \vdots & G_{p-1,1}^{p-1,1} & \ddots & \vdots \\ G_{0,p}^{p,0} & \dots & G_{0,p}^{0,p} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

则 $D_p u = (-1)^p (\partial^p)^T G_p \partial^p u$ 。假设 $G_{i,j}^{k,l}(x, y)$ 是有界的, 且 $\epsilon \in C^n(R)$, 设 G_p 对称正定, 即

$$X^T G_p X \geq c \|X\|^2, \quad c > 0 \quad (3.10)$$

现在来考虑微分方程 $D_p u = f$, 式中 u 在 S 上满足 $u = \partial u / \partial x = \partial u / \partial y = \dots = \partial^{p-1} u / \partial y^{p-1} = 0$ 。相联系的变分问题是 $F(u) = (D_p u, u) - 2(f, u) = \min$ 。对 $(D_p u, u)$ 分部积分并利用齐次边界条件后, 这个问题变为

$$F(u) = \int_R [(\partial^p u)^T G_p \partial^p u - 2fu] dR = \min \quad (3.11)$$

现在引入空间, H_{Dp} , 内积为

$$(u, v)_{Dp} = \int_R (\partial^p u)^T G_p \partial^p v dR, \quad u, v \in M_p \quad (3.12)$$

“能量范数”, 为 $\|u\|_{Dp}^2 = (u, u)_{Dp}$ 。这个

*黑体字表示矩阵或向量。

空间可以在 $H=L_2(R)^*$ 中完备化。既然 D_p 是正定的, (3.11) 在 H_{Dp} 中就有一个解。可以证明, H_{Dp} 的元素属于 $L_2^{(p)}(R)$, 即 $L_2(R)$ 的具有 1, 2, ..., p 阶广义导数的函数的子空间。若 $p \geq 2$, 则 u 及其直到 $p-2$ 阶导数在 R 中连续。注意, 在 (3.11) 式中系数函数 G 可以假设是简单有界及可测的。

问题 (3.11) 可以用几种方法加以推广:

(1) 一个更为一般的变分公式是

$$F(u) = (D_p u, u) - 2(f, u) = \int_R [(\partial^p u)^T G_p \partial^p u + (\partial^{p-1} u)^T G_{p-1} \partial^{p-1} u + \dots + G_0 u^2 - 2fu] dR = \min \quad (3.13)$$

(2) 在 S 上可以给定更为一般的形如 $p_j(u) = g_j(s)$ ($j=1, 2, \dots, k$) 的几何边界条件, 式中 p_j 是阶 $< p$ 的线性算子 (关于 D_p 自伴)。在这种情况下我们假设可以分解 $u = v + w$, 式中 $w \in L_2^{(p)}$ 在 R 中, 且在 S 上满足 $p_j(w) = g_j(s)$ 。代入 (3.11) 或 (3.13) 中就得到 v 的一个类似的方程, 满足齐次边界条件, 而 w 对力函数 f 有贡献。

(3) 自然边界条件 (包含 p 到 $2p-1$ 阶导数) 在对 $(D_p u, u)$ 分部积分的过程中可以作为 S 上的线积分而合并入 $F(u)$ 。

最后, 方程 (3.11) 或 (3.13) 显然可以推广到 q 个空间变量。用 Ritz 法构成的一个极小化序列 $\{u_n\}$ 按能量范数收敛于精确解, 即 $\|u_n - u^*\|_{Dp} \rightarrow 0$ 。用不等式 (3.10) 和 Sobolev 嵌入定理 [20] 可以证明

(a) 序列 $\{u_n\}$ 及其直到 p 阶的所有导数平均收敛 (即按 $H=L_2(R)$ 的度量收敛);

(b) 若 $p > q/2$, 则 $\{u_n\}$ 及其直到 k 阶导数 ($k < p - q/2$) 还在 R 中一致收敛。

然而我们不能断言 $f_n = D_p u_n$ 的收敛性或趋于自然边界条件的收敛, 除非假设一些附加条件。

3.3 弹性论的位移表述 作为第二个例子, 我们考虑三维线性弹性问题的位移表述。为简化表述, 本节将采用张量记号和求

和的约定。逗号表示对其后之变量求偏导数。

设 u_i ($i=1, 2, 3$) 是位移向量 u 在直角坐标系 (x_1, x_2, x_3) 中的分量, $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$ 是无穷小应变张量, τ_{ij} 是应力张量, f_i 是体积力。弹性介质体积为 V , 表面为 $S = S_t + S_u$, 单位法向量为 $n(n_1, n_2, n_3)$ 。在 S_t 上给定表面拉力 t_i , 在 S_u 上规定连续位移 $\bar{u}_i^{**}$ 。如 § 3.2 节指出的, 可以假设 $\bar{u}_i = 0$ 而不失一般性。材料定律是

$$\tau_{ij} = E_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^0) E_{ijkl} \tilde{\varepsilon}_{kl}$$

式中 E_{ijkl} 是满足 $\varepsilon_{ij} E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \geq c \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}$ ($c > 0$) 的弹性模量, ε_{kl}^0 是无应力状态下的应变。内部平衡方程和应力边界条件是

$$\tau_{ij,j} + f_i = 0 \quad \text{在 } V \text{ 中} \quad (3.15)$$

$$t_i = \tau_{ij} n_j \quad \text{在 } S_t \text{ 上} \quad (3.16)$$

用位移写的弹性方程为 $-E_{ijkl} \varepsilon_{kl,j} = f_i$, 或用矩阵形式写成 $E u = f$ 。可以证明, 如果抑制刚体位移, 则 E 在初始定义域 M 中是正定自伴的 ($u_i \in C^2(V)$, 在 S_u 上 $u_i = 0$)。相关的变分问题是

$$\Pi(u) = U(u) - P(u) = \min \quad (3.17)$$

式中

$$U = \frac{1}{2} \int_V \tau_{ij} \tilde{\varepsilon}_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_V \tilde{\varepsilon}_{ij} E_{ijkl} \tilde{\varepsilon}_{kl} dV \quad (3.18)$$

$$P = P_t + P_f = \int_{S_t} (t_i u_i) dS + \int_V f_i u_i dV \quad (3.19)$$

分别是应变能和载荷位能; Π 是总位能。在能量范数 $\|u\|_E^2 = U$ 下定义的空间 H_E 包含了所有在 V 中具有有限能量并满足 S_u 上位移边界条件的位移函数。方程 (3.17) 在 H_E 中有在广义意义下满足 (3.15) 和 (3.16) 的唯一解 u^* 。一般来说 $u^* \in L_2^{(1)}(V)$, 但如果介质均匀, 则 $u^* \in L_2^{(2)}(V)$ 且 (根据 Sobolev 定理) u^* 在 V 中连续并几乎处处满足 (3.15) 和

* $L_2(R)$ 表示所有在 R 上平方可积实函数的空间。

** 在接触问题中可能出现更一般的边界条件, 其中在第三部分表面 S_c 上规定法向位移分量 $u(n) = u, n$ 和切平面上剪应力 $\tau_{(k)} (k=1, 2)$ 。

(3.16)[20] (该结果可推广到分段连续的材料常数)。Ritz极小化序列 $\{u_n\}$ 将按能量收敛于 u^* , 这意味着序列本身及其一阶导数平均收敛。然而 $f_n = Eu_n$ 在 V 中收敛于 f (3.15)和在 S_t 上收敛于应力边界条件(3.16)则需要附加光滑性假设。

4. 有限元素法的系统陈述

为简化说明, 引入下列术语: 以 S 为边界的域 R 上定义的二次泛函 $F(u)$ 如果包含直到 $(r+1)$ 阶的导数, 则说是“属于 C^r 类”(且确定“一个 C^r 问题”)。以 Z^r 表示所有函数 $u \in C^r(R+S)$ 且其 $(r+1)$ 阶导数属于 $L_2(R)$ 的集合。显然, Z^r 在 $H = L_2(R)$ 中稠密, 因而如果该泛函正定, 在能量空间 H_L 中也稠密(在某些情况下 Z^r 可以和 H_L 一致)。

4.1 有限元展开要求 对于一个 C^r 变分问题, 我们试图根据 Z^r 中能量完全并满足几何边界条件的序列 $\{\varphi_n\}$ 选择 Ritz 座标函数。有限元素离散化提供了一个对于任意几何形状、物理性质和边界条件构造此种函数的一般方法, 而且很适合自动计算。如 § 2.1 节指出的, 原始域 R 以格网 Δ_M 近似, Δ_M 是由 M 个简单域或元素 R^m ($m=1, 2, \dots, M$) 组合构成。这种理想化结构具有在 N 个互连和内部节点上定义的 N_f 个自由度。因此有限元展开就是在每一元素上分片定义的并在互连节点上使节点值相等“修补”起来的规定插值函数的集合。在有限元素法的一般应用中通常期望初始格网 Δ_M 在如下意义下“重复剖分”, 以至 $M \rightarrow \infty$ 的过程是收敛的: (a) 连续介质的每一点都可以含于任意小的元素中; (b) 除必须拟合曲线边界处以外, 原先所有网格都包含于新网格之中; (c) 在元素的细剖分过程中不改变最初选择的对于一个元素的插值公式。

以 u^m 表示第 m 个元素上 u 的展开。为产生极小化序列, C^r 问题中 u^m 须满足下列要求:

(1) 连续性: $u^m \in Z^r(R^m)$ 且通过任一

元素分界面的 C^r 连续性必须由在此分界面相匹配的节点值来保证。

(2) 完全性: u 及其在泛函 $F(u)$ 中出现的直到 $r+1$ 阶偏导数的所有均匀状态应该包含于 u^m 中*。如果所有组合出现, 这就等价于要求空间变量 $(x_1, x_2, \dots, x_q)$ 的 $(r+1)$ 阶完全多项式作为极小元素展开。如果此条件满足, 则由上面描述的格网加密过程产生的座标序列 $\{\varphi_{N_f}\} \in Z^r$ 显然是按能量完全的。

此外, 假设展开式一定要满足几何或实在边界条件(包括 u 及其直到 r 阶的导数)。在数学表述中为要将 H_L 定义为 Hilbert 空间, 必须把非齐次几何边界条件化为齐次。用有限元法近似解则无此区别之必要。如 § 4.3 节所述, 几何边界条件不论齐次与否都可以直接加到离散 Ritz 方程上去**。

4.2 有限元素离散化的例 考虑二维 C^0 变分问题[见图1(a)]。

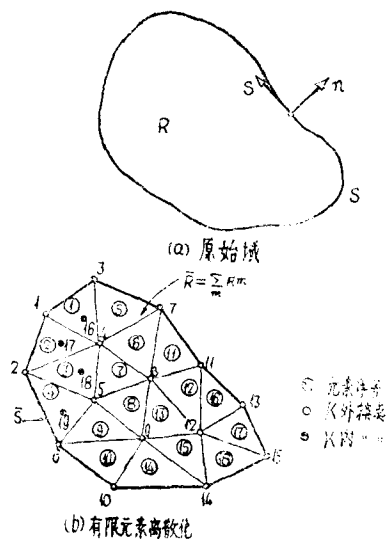


图1 描述有限元素的例

$$F(u) = \int_R (G_{11}u_x^2 + 2G_{12}u_xu_y + G_{22}u_y^2 + G_0u^2 - 2fu) dR = \min \quad (4.1)$$

* 或者至少在 $M \rightarrow \infty$ 的极限中达到。

**只要基函数能够精确表示给定的边界条件。否则考虑到局部边界条件的扰动, 就要在变分公式中引入适当的拉格朗日乘子项。

$$u = \bar{u} \quad \text{在 } S \text{ 上} \quad (4.2)$$

式中 G_{11} , G_{12} , G_{22} 和 G_0 是 x , y 的函数, 在 R 中满足 $G_{11} G_{22} - G_{12}^2 > 0$ 和 $G_0 > 0$ 。用矩阵形式

$$F(u) = \int_R (u_1^T G_1 u_1 + G_0 u^2 - 2fu) dR \quad (4.3)$$

式中

$$G_1 = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{12} & G_{22} \end{bmatrix}, \quad u_1 = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

选择图 1 (b) 所示一般三角形有限元网格, 具有 M 个元素, N 个节点。由于每一节点只要确定一个值, 故自由度 (加边界条件前) 是 $N_f = N$ 。选节点值 $u_k (k=1, 2, \dots, N)$ 为广义坐标, 即

$$u = \sum_{k=1}^{N_f=N} u_k \varphi_k \quad (4.5)$$

u 在第 m 个元素上规定的近似 u^m 由元素节点值 u_k^m 插值确定, 插值公式为

$$u^m = \sum_{k=1}^{N_f^m=N^m} u_k^m \varphi_k^m \quad (4.6)$$

式中 N^m 是元素 m 的节点 (内和外) 总数。此展开式必须满足 C^0 连续性并包含 $u=1$, x , y 三种状态 (§ 4.1 节)。函数 φ_k^m 常称为“假定元素型态”或简称为原变量 u 的“型态”。若节点 k 不属于第 m 个元素则 $\varphi_k^m = 0$ 。定义

$$u^T = \langle u_1, u_2, \dots, u_N \rangle \quad (4.7)$$

$$\Phi^T = \langle \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N \rangle \quad (4.8)$$

$$\Phi_1^T = \begin{bmatrix} \varphi_{1x}, \dots, \varphi_{Nx} \\ \varphi_{1y}, \dots, \varphi_{Ny} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

则

$$u = u^T \Phi, \quad u_1 = u^T \Phi_1 \quad (4.10)$$

代入 (4.3) 并对节点值 u_k 取极小则得线性方程组

$$Au = b \quad (4.11)$$

式中

$$A = \int_R (\Phi_1^T G_1 \Phi_1^T + G_0 \Phi \Phi^T) dR, \quad b = \int_R f \Phi dR \quad (4.12)$$

$N \times N$ 离散矩阵 A 的元素记为 a_{ij} , 它具有下列性质: (a) 对称性; (b) 非负定; (c) 稀疏性, 因为节点 i 和 j 不相关时, 即不属于同一元素时 $a_{ij} = 0$; (d) 带状, 因为 $i > j + d_{\max}$ 或 $i < j - d_{\max}$ 时 $a_{ij} = 0$, 其中 $d_{\max}$ 是相邻两节点序号的最大差。

几何边界条件 (4.2) 可以通过将 (4.11) 分块如下加以计算

$$\begin{bmatrix} A_{ff} & A_{fs} \\ A_{fs}^T & A_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_f \\ u_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_f \\ b_s \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

式中 u_s 包含在边界 S 上给定的节点值, u_f 由无约束或自由节点值组成。则 (4.13) 化为

$$A_{ff} u_f = b_f - A_{fs} u_s \quad (4.14)$$

若边界条件适当, A_{ff} 是正定的, 可以解出 u_f (如果需要的話然后可以计算 $b_s = A_{fs}^T u_f + A_{ss} u_s$)。齐次边界条件的情况下, (在 S 上 $u = 0$), $u_s = 0$, 于是 b_f 就不要修正了。

4.3 自动装配 有限元程序中方程组 (4.11) 实际是作为元素贡献的和构成, 这与有限元素法的物理概念 (§ 2.1 节) 一致。设 u^m 表示第 m 个元素的 N^m 个节点值构成的向量, 如图 1 (b) 中

$$(u^2)^T = \langle u_1 \ u_2 \ u_4 \ u_{17} \rangle \quad (4.15)$$

方程 (4.7)——(4.10) 中 ($N^m \times 1$) 向量 Φ^m 和 ($N^m \times 2$) 矩阵 Φ_1^m 也类似定义。则元素关系是

$$A^m u^m = b^m \quad (4.16)$$

式中

$$A^m = \int_{R^m} [\Phi_1^m G_1^m (\Phi_1^m)^T + G_0^m \Phi^m (\Phi^m)^T] dR \quad (4.17)$$

$$b^m = \int_{R^m} f^m \Phi^m dR$$

按照 $m=1, 2, \dots, M$ 的路线顺序产生矩阵 A^m 和向量 b^m , 并将 A^m 和 b^m 的各项直接加到 A 和 b 适当的地方, 从而构成完全的无约束方程组 (4.11)。为减小存储需要, 可利用 A 的稀疏性和 (或) 带状结构 (依赖于解法)。引入几何边界条件时无需减少方程, 只要修改 (4.13) 如下:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{ff} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_f \\ \mathbf{n}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{b}_f - \mathbf{A}_{fs} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{u}_s \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

不必重新排列方程就可以完成这一修改过程。在每一有约束节点值（例如 u_k ）上执行一循环，先修改所有与 k 相关节点的 b_i 分量（齐次边界条件时不需要修改），然后置 $a_{ki} = a_{ik} = 0$, $i = 1, 2, \dots, N$, $i \neq k$ 及 $a_{kk} = 1$, $b_k = u_k$ 。这一方法大大简化了程序编码，特别是当原始矩阵 $\mathbf{A}$ 分块形成然后传送到外围存贮设备上时。第7节将给出装配和求解过程的比较实用的详细叙述，并描述位移结构分析程序的基本步骤。

4.4 消去内部自由度 如果 u_k^m 在元素边界上给定（相邻元素间因此得到匹配），则与 u_k 相关的规定元素插值函数 φ_k 称为“外部型态”。如果 φ_k 不影响元素间的连续性，即对 $m' \neq m$ 有 $\varphi_k^{m'} = 0$ ，则称 φ_k 为“内部型态”。内部型态通常在内节点上规定，如图1(b)中的16, ..., 19。这些节点可以利用凝聚过程在元素一级上消去。为此假设元素关系(4.16)可以分块成

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^m & \mathbf{A}_{12}^m \\ \mathbf{A}_{21}^m & \mathbf{A}_{22}^m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1^m \\ \mathbf{u}_2^m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{b}_1^m \\ \mathbf{b}_2^m \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

式中 $\mathbf{u}_2^m$ 包含内节点值。既然 $\mathbf{A}_{12}^m$, $\mathbf{A}_{21}^m$ 和 $\mathbf{b}_2^m$ 不受其它元素的影响，就可以解出 $\mathbf{u}_2^m$

$$\mathbf{u}_2^m = (\mathbf{A}_{22}^m)^{-1} (\mathbf{b}_2^m - \mathbf{A}_{21}^m \mathbf{u}_1^m)$$

代入(4.19)中得到

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}_{11}^m - \mathbf{A}_{12}^m (\mathbf{A}_{22}^m)^{-1} \mathbf{A}_{21}^m] \mathbf{u}_1^m &= \mathbf{b}_1^m \\ &- \mathbf{A}_{12}^m (\mathbf{A}_{22}^m)^{-1} \mathbf{b}_2^m \end{aligned} \quad (4.20)$$

或

$$\tilde{\mathbf{A}}^m \tilde{\mathbf{u}}_1^m = \tilde{\mathbf{b}}^m \quad (4.21)$$

式中 $\tilde{\mathbf{A}}^m$ 和 $\tilde{\mathbf{b}}^m$ 分别是与外节点值 $\mathbf{u}_1^m$ 相关的凝聚离散矩阵和强迫向量。这个过程实际是在(4.19)中执行对称向后高斯消去来完成。完整的方程组(4.11)用 $\tilde{\mathbf{A}}^m$ 和 $\tilde{\mathbf{b}}^m$ 组装而成，只含外节点值作为未知量，所以方程数目和 $\mathbf{A}$ 的带宽大大减小。这种方法在结构分析中称为“静力凝聚”，也是复杂“树型”系统子结构分析的基础。[22]。

5. 有限元展开

本节仅详细讨论二维元素，可以直接推广到三维。一维情况是不足道的。

5.1 对于 C^0 问题的三角形元素 平面三角形或二维单纯形广泛用作基本有限元，因为此类元素的装配不仅可以逼近任意平面域，而且可以逼近任意形式曲面。最简单的展开式是完全的 n 阶多项式

$$u = P_n(x, y) = \sum_{k=1}^{T_n} a_k x^i y^j (i+j \leq n) \quad (5.1)$$

式中 $T_n = (n+1)(n+2)/2$ 是独立项总数。对于 C^0 问题若 $n \geq 1$ 且仅要求 u 在元素间的连续性，则完全性 (§4.1) 是满足的。沿任一边的变化是 n 阶的，可以用 $n+1$ 个条件确定。如果选择角点为节点，为确定元素间的连续性，只需要 $E_n = 3n$ 个外节点值。由于 $n \geq 1$ 时 $T_n \geq E_n$ 故所有要求都满足。仅当 $n \geq 3$ 时，内部型态的数目 $I_n = T_n - E_n = (n-1)(n-2)/2 > 0$ 。利用选择的节点值可以把展开式(5.1)表为如下插值公式：

$$u = \langle u_1 \ u_2 \cdots u_{T_n} \rangle \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_{T_n} \end{Bmatrix} = \mathbf{u}_{(n)}^T \boldsymbol{\Phi}_{(n)} \quad (5.2)$$

为简化插值函数或假设型态 φ_k 的表达式，采用自然坐标系是合适的（此坐标系中元素的边界是零座标线）。对于三角形可根据假定的几何形状由下式定义“齐次三角座标” ξ_1 , ξ_2 , ξ_3

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}_{(r)}^T \boldsymbol{\Phi}_{(r)}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{Y}_{(r)}^T \boldsymbol{\Phi}_{(r)}, \quad \sum_{k=1}^{T_r} \varphi_k = 1 \quad (5.3)$$

式中

$$\mathbf{X}_{(r)}^T = \langle x_1 \ x_2 \cdots x_{T_r} \rangle, \quad \mathbf{Y}_{(r)}^T = \langle y_1 \ y_2 \cdots y_{T_r} \rangle \quad (5.4)$$

是含有 T_r 个结点座标的向量， r 阶插值函数 φ_k 用 ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 表示。(5.3)在 $(1, x, y)$

和 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) 之间提供了三个方程。图2—4中分别给出了 $n=r=1, 2, 3$ 时的展开式。若 $r=1$ 则三角形的边为直线, $(1, x, y)$ 和 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) 间的关系是线性的(图2)。 $r=2, 3$ 时三角形的边分别为抛物线和三次曲线, 直角座标和三角座标间的关系是不容易转换的。此时三角座标在几何定义和假设的原变量展开之间起无因次参数的作用。高于三阶的多项式在 C^0 问题中很少用。

显然如果 $r=n$ 则 u 展开正好包含 $u=1, x, y$ 三种状态(见图2—4)。因为对于 $r < n$ 的几何展开包含于对 $r=n$ 的几何展开中, 所以这个结果对于 $r < n$ 也成立。其它实际观察结果是:

(a) 对于二次插值(图3), 不用 u_4, u_5, u_6 而用偏离线性中点 $\tilde{u}_4 = u_4 - (u_1 + u_2)/2$ 等常更为有利, 于是前三个插值函数和线性展开一样直接变为 $\varphi_i = \xi_i (i=1, 2, 3)$, 而 $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ 不变。类似的说明应用于几何定义和图4中10点三次插值。

(b) u 的三次展开式可以改用三个角点的 u, u_x, u_y 加上一个内点值 u_0 来表示, 如图4下面所示。这种形式在许多应用中更加适用。

(c) 利用约束可以消去某些内外自由度, 因而多项式展开就不完全了。例如图3(b)中的中点可以假设 u, x, y 沿相应边线性变化而被移去(为保持 $u=1, x, y$ 状态几何定义必须用与 u 同样的方法约束)。类似地, 可以假设9个外节点值一个约束关系而消去图4(b)中的内点0。这个方法不应和§4.4节中描述的凝聚法搞混。

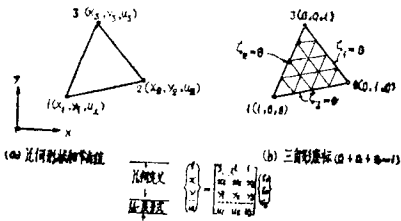


图2 三角形上线性插值

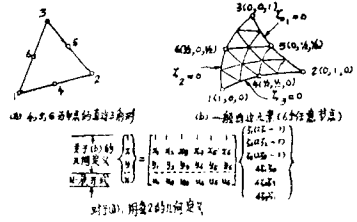


图3 三角形上二次插值

5.2 对于 C^0 问题的四边形元素 任意四边形一般来讲是比三角形好的网格单元,

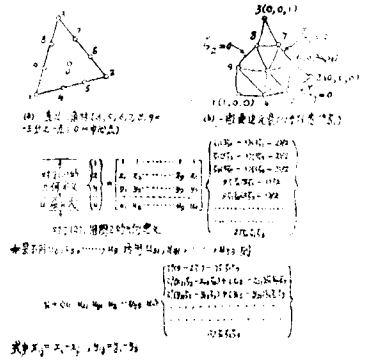


图4 三角形上三次插值

因为这种格网的剖分便于描述或自动生成。它们可以用二个或四个三角形元素组装(图5)及凝聚内点的方法构成, 也可以直接假设光滑插值展开来构成。后一种方法很容易用于矩形元素, 对这种元素自然地运用“双完全多项式” $p_{mn}(x, y)$, 其定义为

$$u = p_{mn}(x, y) = \sum_{k=1}^{T_{mn}} a_k x^i y^j, \quad i \leq m, j \leq n \quad (5.5)$$

式中 $T_{mn} = (m+1)(n+1)$ 。由于 x, y 轴取作沿元素边的方向, 所以 C^0 连续性所需要的外节点值的数目就是 $E_{mn} = 2(m+n)$, 对于 $m \geq 1$ 和 $n \geq 1$ 此数不超过 T_{mn} 。为把此展开式推广到任意四边形, 仍然用自然座标系。此时引进4个“齐次四边形座标” $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ (由 $\xi_1 + \xi_3 = \xi_2 + \xi_4 = 1$ 约束), 由双完全多项式 P_r 中 x 和 y 的假设几何

展开确定 (为保持 $u=x, y$ 状态, $r \leq m, s \leq n$)。Taig 和 Kerr [23] 首先把这种座标用于此种目的, Irons [24] 和 Zienkiewicz [25] 推广于曲边元素。图 6 和图 7 指出 $m=n=r=s=1, 2$ 两种情况 (分别为双线性 和 双二次插值)。§ 5.1 节中对三角形元素所列全部实用考虑也可以用于四边形。



图 5 用三角形元素组装的四边形

5.3 对于 C^1 问题的二维元素 构造 C^1 问题 (如薄板或壳的位移弯曲分析) 任意平面

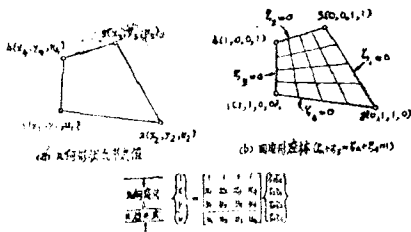


图 6 四边形上双线性插值

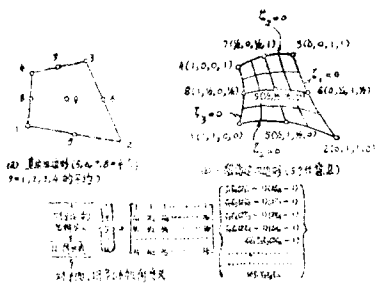


图 7 四边形上双二次插值

元素是比 C^0 问题困难得多的课题。 C^1 连续性要求 u 及其法向导数 $u_n = \partial u / \partial n$ 沿元素任一边都由该边上所选择的节点值唯一确定, 而为满足完全性, 要在 u 展开式中包含所有状态 $u=1, x, y, x^2, xy$ 和 y^2 。困难是由下述限制原则 [26] 产生的:

(a) 元素每一角点至少必须规定三个节点值 (u, u_x, u_y), 因此展开式必须包含三次项。

(b) 如果元素的几何位置 (x, y) 用 (5.3) 那样的 r 阶多项式插值公式确定, 则为了保留 $u=x^2, xy, y^2$ 各状态就必须要使 u 展开式包含 $2r$ 阶矩阵 $\Phi_{(r)} \Phi_{(r)}^T$ 的所有项。

具体地说, 如果 u 沿一边的变化是三次的, 则该边一定是直线; 这一事实严格限制了板弯曲曲边元素的构成。

(c) 如果假设展开式在非矩形元素角点具有二阶连续导数 (即 $u \in C^2$), 则为满足元素间连续性和完全性, 角点上必须至少规定 6 个自由度 ($u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}$ 和 u_{yy})。对于矩形只需要 4 个角点值 (u, u_x, u_y, u_{xy})。如果在角点只规定三个基本自由度 (u, u_x, u_y) (大多数应用中都很希望如此), 那么角点二阶导数必不连续。

图 8 为一些满足所有要求的一般 C^1 元素。省略了实际插值公式, 因为即使在自然座标中这些公式也很复杂。图 8 (a) 所示 LCCT-12* 三角元素是由子三角形 1-2-0, 2-3-0 和 3-1-0 上假设的三个完全三次多项式 (每个 10 项) C^1 匹配构成, 其中 0 是任一内点 (通常取质心)。所得集合体有 12 个自由度: 每一角点的 u, u_x 和 u_y (足够用来确定沿每一边 u 的三次变化), 加三个中点的法向导数 u_{n4}, u_{n5}, u_{n6} (可以完全确定 $\partial u / \partial n$ 的抛物线变化)。强制 $\partial u / \partial n$ 沿 1-2 线性变化, 则中点 4 可以消去。具有这样约束的 4 个 LCCT-11 元素可以放在一起, 形成图 8 (b) 所示任意四边形 (称为 Q-19), 它没有外中点, 是求解平面弯曲问题 [26] 很合适的网格单位。[27] 中介绍了去掉三个中点的简单三角形 (LCCT-9)。De Veubeke [28] 利用 4 个完全三次多项式的类似 C^1 匹配提出图 8 (c) 所示的任意四边形元素, 但这时节点 0 一定要是对角线的交点。前述所有元素

* 此名称意为“有 12 个自由度的线性曲率协调三角形”, 与 u 为横向挠度之平板弯曲问题的应用有关。

在内边1-0, 2-0等上二阶导数都不连续, 这和前面提到的限制(c)是一致的。如果角点规定6个自由度, 那么图8(d)中称为CCT-21的三角形元素就可以由简单的5阶多项式构成[26], 然而到目前为止并未考虑这种发展。对于矩形元素, 光滑插值公式可以很容易地用 Hermitian 多项式之积产生[29, 75]。

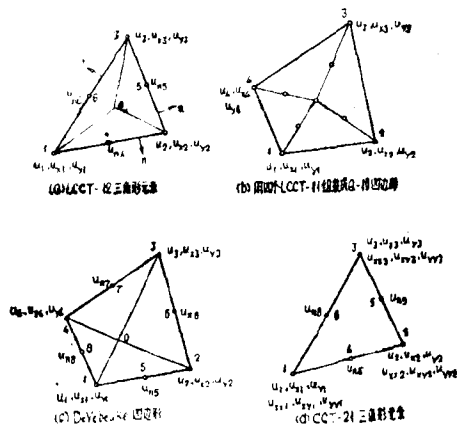


图8 二维 C^1 元素

5.4 三维元素 三角形和四边形扩展到三维分别为四面体和六面体(后者也称为立方体, 平行六面体或“积木”)。一旦确定了拟合元素几何形状的适当自然坐标系, 二维 C^0 展开直接可以推广到三维。然而在二维和三维元素公式间的一个重要实际差别是直接光滑插值公式构成的六面体元素似乎具有比相应的四面体装配(在具有同样数目外自由度的意义下)更为精确的结果, 而在二维中直接形成的四边形和用三角形装配成的四边形的性质是很类似的。

6. 有限元素法的应用(略)

7. 位移求解过程(略)

8. 结 论

8.1 有限元素法的优点 有限元素法和其它空间离散化方法, 例如经典的有限差分公式相比, 主要的优点是:

(1) 对复杂几何形状、任意边界条件和变物理性质等的处理在有限元素法中不再产生任何特殊的问题, 因为可以容易地一劳永逸地产生出能够解决这些一般问题的任意形状元素(如果必要的话可以用数值积分)并保存在程序库中。

(2) 有限元素离散化格式物理解释为分离开的无约束元素的组装, 离散化矩阵的元素物理解释为影响系数, 这些解释具有§2.3节中所列全部优点。这个方法对于复杂的, 任意互连结构系统借助于通用结构程序的分析尤其重要。另一方面, 有限差分“分子”则没有什么物理意义。

(3) 对于 C^r 变分问题, 假设的有限元素展开只需要满足 C^r 连续性要求。这个事实应该和 Euler 微分方程经典有限差分近似对比一下, 那里光滑性要求要强得多(因为对于 C^r 二次泛函它们的阶是 $2r+2$)。 $r+1$ 到 $2r+2$ 阶导数的不连续性(例如由于物理分界面, 力的不连续性等引起的)需要在有限差分过程中特别“分片”处理, 往往损失了精确度。另一方面, 如果这些不连续性位于元素分界面, 由于它们自然地包含于有限元素展开式内, 故有限元素法的收敛速度并不会受损害(例如参阅[17])。

(4) 在有限元分析中几何边界条件可以通过在元素一级或装配一级上对离散方程进行简单的修改而很容易地给定, 自然边界条件则无需考虑。在有限差分方法中不仅每一边界条件情况必须分别处理, 经常要用一些“虚”点, 而且在曲线边界附近要构造精确的差分算子是非常困难的[8]。

(5) 不管边界条件如何, 有限元素法离散矩阵总是对称的。

(6) 用直交或余变分原理(如果可以利用的话)以及超圆不等式[11]构造精确影响系数的上下界是可能的。在弹性理论中用位能和余能原理就是一例。

(7) 由于在有限元素法中得到连续的近似, 所以任一点场变量及其导数的计算是

很简单的。有限差分法中仅给出格网点上的解。

(8) 在正定 C^r 变分问题中, Ritz 极小化序列及其直到 $r+1$ 阶导数按平均收敛于精确解。这类收敛性在应用中通常比按点收敛要重要得多, 因为所有物理测量实际上代表的是区域平均值, 而不是数学点上的值。此外, 如果精确解足够光滑, 则在许多情况下能够证明 Ritz 序列及其直到某一阶 ($< r$) 导数的一致收敛性。

这些优点中的某些为建立有限差分近似的变分法所共有 (§ 2.2 节)。这个方法常用于构造包含原变量本身或低阶导数 ($\leq r$) 的控制泛函的某些分量的“聚缩”表达式, 因为这些分量对离散化格式不如包含高阶导数的泛函分量那么敏感。例如, 在动力学问题中动能和消耗能[58, 59], 以及热传输问题中热容量[67]可以聚缩在节点而于精确度无重大损失。

8.2 未来的研究 这篇论文特别强调了有限元素法作为 Ritz 法一种形式的解释。为此, 假设的展开式必须满足完全性和 C^r 连续性要求 (§ 4.1 节), 这就保证了极小化序列单调收敛。然而 C^r 连续性并不总是收敛性的必要条件。如果在元素分界面上违背了某些或全部连续性要求, 则有限元称为“不一致的”或“不相容的”。经验证明, 在某些情况下用不相容的元素进行有限元分析可以得到好的结果。

用不一致元素作有限元分析并不是 Ritz 法的一种形式, 因为元素分界面上的能量密度是无限的。因此假设的函数类并不属于能量空间 H_L , § 3 和 § 4 节的结论不能应用。通常不管分界面的贡献, 而计算必要的积分

(只对各元素求和) 来完成这种分析。一般来说, 离散化方程 (3.6) 或 (4.11) 并不确定一个极小化条件, 而是逗留条件, 因此细分格网产生的有限元解并不构成泛函 $F(u)$ 的极小化序列。

在有限元发展的最初阶段, 某些不一致

(但是完全的) 元素成功地用于平板弯曲位移分析[25, 26], 但在用不完全但是相容的展开式试验时未能观察到收敛性[26, 27]。这些结果导致这样一个猜想: 完全性比连续性要重要得多[25]。最近的一篇论文[73]有效地证明了当相容解的一个集 Z^r (在 H_L 中稠密) 作为一种特殊情况包含在不相容展开式中时, 完全性本身就是收敛 (虽然不一定是单调的) 到泛函 $F(u)$ 正确值的一个充分条件。然而关于收敛到解本身及其导数, 还没有清楚的资料可以利用, 还需要进一步的研究来澄清这个问题。

关于有限元素法未来的发展其它可能的重要方面可以有:

(1) 对于一般二维和三维格网详细的收敛性研究, 包括: 基于假设展开式和精确解光滑特性的误差估计, 计算的解的误差界, 不同有限元素展开式和有限差分格式收敛速度的比较等。

(2) 诸如弹性理论中 Hellinger-Reissner 原理这样的不定变分表述中有限元法的收敛特性。

(3) 时间域内初值问题的变分表述及得到的解法与相应微分和积分方程解法比较。

(4) 非线性问题的表述、解法和收敛性研究。

(5) 用有限元离散化概念构成一般方法 (如最小二乘法, Galerkin 或范数极小化法) 座标函数的基, 它们已不限于变分原理控制的问题。

沿这些路线确定的研究计划中, 应用数学家, 数值分析专家和实践工程师之间的密切联系将是特别有帮助的。

参 考 文 献

1. M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin and L. J. Topp, *Stiffness and deflection analysis of complex structures*, J. Aero. Sci. **23** (1956), 805—823.

2. R. W. Clough, *The finite element in plane stress analysis*, Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic computation, Pittsburgh, Pa., 1960.
3. B. Langfers, *Analysis of elastic structures by matrix transformation, with special regard to semi-monocoque structures*, J. Aero. Sci. 19(1952), 451—458.
4. J. H. Argyris, *Energy theorems and structural analysis*, Butterworths Scientific Publications, London, 1960(reprinted from Aircraft Engineering, 1954—1955).
5. B. Fraeijs de Veubeke, *Upper and lower bounds in matrix structural analysis*, AGARD-ograph 72, edited by B. F. de Veubeke, Pergamon Press, 1964.
6. R. J. Melosh, *Basis for the derivation of matrices for the direct stiffness method*, AIAA Journal 1 (1963), 1631.
7. J. F. Besseling, *The complete analogy between the matrix equations and the continuous field equations of structural analysis*, Internat. Sympos. on Analogue and Digital Techniques applied to Aeronautics, Liege, 1963.
8. G. E. Forsythe and W. R. Wasow, *Finite difference methods for partial differential equations*, Wiley, New York, 1960.
9. E. Stiefel, "The self-adjoint boundary value problem", in *Refined iterative methods for computation of the solution and the eigenvalues of self-adjoint boundary value problems*, by Engeli, Ginsburg, Rutishauser and Stiefel, Mitt. aus dem Institut für angewandte Mathematik, Technische Hochschule, Zurich, No. 8, Birkhäuser Verlag, Basel, Stuttgart, 1959.
10. R. Courant, *Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations*, Bull. Amer. Math. Soc. 49 (1943), 1—23.
11. J. L. Synge, *The hypocircle in mathematical physics*, Cambridge University Press, New York, 1957.
12. K. O. Friedrichs, *A finite difference scheme for the Neumann and the Dirichlet problems*, AEC Research and Development Report NYO 9760, New York University, 1962.
13. C. C. Farrington, R. T. Gregory and A. H. Taub, *On the numerical solution of Sturm-Liouville differential equations*, M. T. A. C. 11 (1957), 131—150.
14. M. E. Rose, *Finite difference schemes for differential equations*, Math. Comp. 18 (1964), 179—195.
15. K. O. Friedrichs and H. B. Keller, "A finite differential scheme for generalized Neumann problems", in *Numerical solutions of partial differential equations*, edited by J. H. Bramble, Academic Press, New York, 1967, pp. 1—19.
16. R. S. Varga, *Hermite interpolation-type Ritz methods for two-point boundary value problems*, pp. 365—373 of the book cited in 15.
17. P. G. Ciarlet, M. H. Schultz and R. S. Varga, *Numerical methods of high-order accuracy for nonlinear boundary value problems*, Numer. Math. 9 (1967), 394—430.
18. J. H. Ahlberg, E. N. Nilson and J. L. Walsh, *The theory of splines and their applications*, Academic Press, New York, 1967.
19. S. G. Mikhlin, *Variational methods in mathematical physics*, Macmillan, New York, 1964 (translation of the 1957 Russian edition).
20. —, *The problem of the minimum of a quadratic functional*, Holden-Day, San Francisco, California, 1965 (translation of the 1952 Russian edition).
21. R. Courant and D. Hilbert, *Methods of variational physics*, Vol. 1, Interscience, New York, 1952.
22. J. S. Przemieniecki, *Theory of matrix structural analysis*, McGraw-Hill, New York, 1967.
23. I. C. Taig and R. I. Kerr, *Some problems in the discrete element representation of aircraft structures*, included in AGARD-ograph 72 (见5).
24. B. M. Irons, *Numerical integration applied to finite element methods*, International Symposium on the Use of Electronic Digital Computers in structural Engineering at University of Newcastle upon Tyne, 1967.
25. O. C. Zienkiewicz, *The finite element in structural and continuum mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1967.
26. C. A. Felippa, *Analysis of plate bending problems by the finite element method*, SESM Report, Dept. of Civil Engineering, University of California,

- Berkeley (待发表).
27. R. W. Clough and J. L. Tocher, *Finite element stiffness matrices for the analysis of plate bending*, Proc. Conf. on Matrix Methods in structural Mechanics, AFIT, Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.
 28. B. Fraeijs de Veubeke, *Bending and stretching of plates-special models for upper and lower bounds*, Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, AFIT, Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.
 29. F. K. Bogner, R. L. Fox and L. A. Schmit, *The generation of interelement-compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formulas*, Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, AFIT, Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.
 - 30—57, 60—66, 68—72略
 58. E. L. Wilson and R. W. Clough, *Dynamic response by a step-by-step analysis*, Proc. Sympos. on the Use of Computers in Civil Engineering, Lisbon, 1962.
 59. R. W. Clough and A. K. Chopra, *Earthquake stress analysis in dams*, Proc. ASCE 92, EM-2(1966).
 67. E. L. Wilson and R. E. Nickell, *Application of the finite element method to heat conduction analysis*, Nucl. Engrg. and Design, North-Holland, Amsterdam, 1966.
 73. E. R. de Arantes e Oliveira, *Mathematical foundations of the finite element method*, Lab. Nacional de Engenharia Civil, Lisbon, 1967.
 74. G. Birkhoff and C. de Boor, "Piecewise polynomial interpolation and approximation", in *Approximation of functions*, edited by H. L. Garabedian, Elsevier, New York, 1965.
 75. G. Birkhoff, M. H. Schultz and R. S. Varga, *Piecewise Hermite interpolation in one and two variables with applications to partial differential equations*, Numer. Math. 11(1968), 232—256.
 76. P. G. Ciarlet, M. H. Schultz and R. S. Varga, *Numerical methods of high order accuracy for nonlinear boundary value problems. I: Eigenvalue problems*, Numer. Math. 12(1968), 120—133.
 77. G. Birkhoff, C. de Boor, B. Swartz and B. Wendroff, *Rayleigh-Ritz approximation by piecewise cubic polynomials*, SIAM J. Numer. Anal. 3 (1966), 188—203.
 78. H. S. Price and R. S. Varga, *Numerical analysis of simplified mathematical models of fluid flow in porous media*, these proceedings, pp. 74—94.

(译自《Numerical Solution of Field Problems in Continuum Physics》, SIAM-AMS Proceedings, vol. I, 1970, 朱培焯译, 周天孝校)

有限元法的最新发展、动向及应用

O. C. Zienkiewicz

1. 引言

自从创造出‘有限单元’一词，并用计算机作了第一次计算以来，已过去近二十年了，然而，不论是方法本身还是其应用范围，都在不断地发展着。当由于报酬递减规律的作用，使得在某些研究领域的成果增长率减少的同时，在其它领域却出乎意外地打开了研究局面，并且对研究工作者和实际工作者的研究工作给予刺激并提供了新的研究途径。

在有限单元法自身领域内，对此方法的更深入的认识，以及由我们的同行数学家们的一些平行的工作，对方法作了刷新，并正在涌现一些新的实用表述方法。

有限单元法的应用范围已逐渐地从结构力学扩大到流体力学，电-磁物理学以及核工程诸领域。每一领域内都已提出种种新问题，其中许多新问题反过来充实了基本知识，同时又对老问题赋予新的前景。

在本文中，我们将谈到有限单元法发展的几个方面，我们感到这几方面的发展特别重要，并且它们是与Swansea研究小组有着密切连系的。因而本文所描述的内容将有选择的集中于显得纷纭的理论和应用的某些方面，然而读者可以追查到本文所根据的有关线索。

我们考虑的几个特殊课题为：

一般有限单元的表述

- (a) 非协调单元的重新流行。
- (b) 单元矩阵非精确（简化的）数值

积分所显示的优点和新途径。

- (c) 处理对流（非自伴）问题（例如出现在确定速度场中的热对流或污染对流问题便是这类问题）所需的特殊方法。这时，建立一个新的‘迎风’单元将是主要的。
- (d) 把边界积分法纳入有限单元法——处理无限场（基础等）和奇异性问题的新的可能性。

(e) 时间域内的有限单元法。

虽然上述每一个方法已通过各种应用领域而出现——它们的适用性正在突破各种界限并且呈现出前景广阔，然而至今在许多领域中仍未得到仔细研究。

应用

在应用方面，我们选择了两个领域。其一是老领域

- (a) 地球力学中的应用：在此方面已取得了显著的进展，这不仅是由于新技术的发展（例如粘塑性模型方法），而且也是由于对材料性能认识的提高。

其二是新领域，它受流体力学在应用方面的发展所推动，这一领域涉及到

- (b) 金属成型过程：此时忽略小的弹性变形，将可流动金属当作粘性非牛顿流体看待，对于通过轧制成型为金属薄片的问题，可以得到极好的解答。

显然，在广阔的自然界里，所有的学科多少地都会被涉及到。因此，我们希望，在今后的研究中不断增进基本概念的交流，并