数学思想方法

主编　解恩泽　徐本顺

山东教育出版社
1989年·济南

前　言

随着数学理论的发展与数学教育的深入，人们越来越重视数学思想方法的研究，并取得了一系列重要成果。但是，从总体上看，数学思想方法研究仍是刚刚开始，尚未形成一个完整的理论体系。为了适应现代数学发展的新形势，加速数学教育的改革，提高数学队伍的素质，根据高等院校数学系教学，特别是中学数学教师培训的实际需要，我们编著了《数学思想方法》这本书。

数学思想方法研究的内容是十分丰富的，本书仅就其中的若干方面进行了初步讨论，大体可分为七个方面：（一）数学思想方法研究的对象、范围、历史与意义（第一章）；（二）数学思想方法的几次重大突破与数学中一些常用方法（第二、三、四、五、六、七章）；（三）数学潜形态（第八、九章）；（四）数学的客观基础与辩证性质（第十、十一章）；（五）数学发展的规律（第十二、十三章）；（六）数学思想方法与数学教育（第十四章）；（七）数学发展的特点与趋势（第十五、十六章）。

为了促进数学思想方法研究的深入开展，1987年7月，我们成立了15省市数学思想方法研究协作小组，1988年6月改名为数学思想方法研究协会。本书是在该协会的直接组织及全体会员的大力支持下进行编写的，因此本书的出版是本协会的一项初步研究成果。

在编写过程中，我们参考和引述了国内外许多关于数学思想方法方面的论著。特别是徐利治、胡世华、王梓坤等著名数学家的论著，对我们的写作给予了极大的启示。在本书的编写过程中，我们得到了曲阜师范大学、青岛化工学院、山东省教育委员会科研处等单位的领导和同志们的大力支持和热情指导，在此，对给予本书的编写以实际帮助的所有单位与同志，谨表示最诚挚的谢意。

编写这样的书，对我们来说是一个新的尝试。由于我们的水平有限，加之时间仓促，不妥之处在所难免，恳望广大读者批评指正。

编　者

1989年1月

主　编　解恩泽　徐本顺
副主编　郑隆炘　赵树智　李邦宁
撰稿人　钟宝东
解恩泽　徐本顺　郑隆炘　赵树智
李邦宁　秦敬民　钟宝东　郭明宗
殷启正　宋琨度　李玉琪　张道洪
蒋汉宝　李　培　毛鄂涴　姚俊梅
孙　玲　毕庶珞　方逸耀　杨先业
杨熙鹏　杜玉祥

目　录

第一章　数学思想方法的对象、范围、历史与意义

数学同其它各门学科一样，在其发展的过程中，形成了一系列适合于自身特点的思想方法。这些思想方法不断为人们所掌握和运用，并创造出一个又一个成果。过去对数学成果本身的收集、分析与说明较为重视，发表了许多论著，这是有益的。但是，由于种种原因，对数学思想方法的考察与研究却有所忽略。而正因为对数学思想方法缺乏应有的重视，所以，在一定程度上影响了数学成果的取得和数学人才的培养。因此，把数学思想方法作为一个独立领域加以研究，从方法论的高度，探讨其对象、内容、功能以及孕育、形成与发展的规律，无疑对数学的发展与哲学的研究，都是有重要意义的。

这里，仅就数学思想方法的研究对象、范围、历史与意义等，作以初步的分析。

§1　数学思想方法研究的对象与范围

何谓数学思想方法？它的研究对象是什么？这是一个理论问题，至今看法不一。归纳起来主要有两种理解：第一种是“狭义的理解”，认为数学思想方法就是指数学本身的论证、运算以及应用的思想、方法和手段；第二种是“广义的理解”，认为数学思想方法除上述作为研究的对象外，还应

把关于数学（其中包括概念、理论、方法与形态等）的对象、性质、特征、作用及其产生、发展规律的认识，也作为自己的研究对象。我们是主张广义理解的。

根据广义的理解，我们认为，数学思想方法的研究范围，大体有以下十个方面。

一、数学思想方法的历史演进

对数学思想方法作历史的考察，并分析其演变、发展的规律是数学思想方法研究的首要内容。其具体可分为两大类：第一，数学思想方法的系统进化，即从整体上进行研究。比如，从古至今，数学思想方法发生了多少次重大转折，每一次转折如从算术到代数、从综合几何到几何代数化、从常量数学到变量数学、从必然数学到或然数学、从明晰数学到模糊数学以及从手工证明到机器证明等，都是怎样孕育和产生的，其要点和作用是什么，均属于这一类。第二，数学思想方法的个体发育，主要是研究每一个数学思想产生、演变和发展的规律，以及本身的特征，在数学发展中的作用和方法论价值等。广义一点讲，从思想方法角度来研究概念、运算、公式、定理乃至学科产生发展的历史，也可看成是此类研究的范围。

二、数学的思维方式与数学研究的基本方法

数学的主要思维方式是什么？这是数学家们历来关注的一个重要问题。本世纪初以来，围绕什么是数学的基础问题的讨论，逐步形成了三个不同的学派，即逻辑派、直觉派与形式公理派。如果从思维方式上看数学基础问题的讨论，可

以说，在逻辑主义学派看来，数学的主要思维方式是逻辑思维；在直觉主义学派看来，数学的主要思维方式是直觉（或灵感）思维；在形式主义学派看来，数学的主要思维方式是以符号为特征的纯粹的抽象思维。到底什么是数学的主要思维方式？辩证思维在数学尤其是高等数学中占有怎样的地位？仍是一些尚待解决的问题。

数学中的一些常用方法，诸如公理法、模型法、构造法、解析法、递归法、极限法、逐次逼近法、统计法、对偶法、关系映射反演法、数学归纳法、反证法等，这是大家所熟悉的。那么，数学中到底有哪些基本方法？每个方法又是怎样产生和发展的，其特征和作用如何？这是一些具有重要方法论价值且至今没有很好解决的研究课题。

三、数学家的思想方法

数学家是在数学研究中做出贡献的人，而数学家之所以取得成果做出贡献，又往往与他在思想方法上实行某种变革有关，因此，考察与剖析数学家特别是著名数学家的思想方法，是把握数学思想方法的重要方面，也是探讨数学创造规律，加强数学人才培养不可缺少的研究内容。众所周知，古今中外有许多著名数学家，如欧几里得、刘徽、祖冲之、笛卡儿、牛顿、莱布尼茨、欧拉、高斯、罗巴切夫斯基、伽罗华、康托尔、希尔伯特、彭加勒、维纳、冯·诺伊曼、鲁滨逊、札德、托姆、华罗庚等，不仅在数学研究中取得重大成果，而且在思想方法上也都有独到之处，甚至是实行了革命性的变革。遗憾的是，以往对他们的成果记载比较详尽，而对他们的思想方法却考究很少，这不能不说是过去数学史研

究中的一大缺陷。通过对数学家思想方法的挖掘与评论，可以使人们树立起“作出成果是贡献，创造思想方法是更大贡献”的观念，并将其作为评价数学家的重要方面之一。

四、数学学派的思想方法

如果说某一数学家的思想方法较为隐蔽，难以考证，不易作出准确的分析，那么数学学派却不然，因为它本身往往就是通过某一特殊的思想方法把大家联系在一起的，或者说，是因为思想方法不同而划分成不同派的，因而，它的思想方法是较为明显，容易作出判断的。比如，前面提到的本世纪初以来形成的逻辑派、直觉派与形式公理派，其思想方法十分鲜明。本世纪30年代，在法国出现的布尔巴基学派，其思想方法也是非常明确的。他们认为，数学是以数学结构作为研究对象的科学，主张用数学结构（代数结构、序结构和拓扑结构）概括全部数学，所谓数学的理论发展，无非是各种结构的建成、改进与扩充而已。一句话，他们的数学思想方法就是数学结构主义。在数学结构主义指导下，经30多年的努力，到1973年共出版《数学原本》36卷，为数学发展作出了巨大贡献。不仅如此，他们治学的思想方法，也有许多独到之处，象学术讨论上的“无情批判”，组织成员上的“自由流动”，撰写论著上的“分工合作”等，都是很成功的，值得认真总结。当然，要完整、准确地概括某一学派的思想方法的实质、特点、历史与作用，也是相当困难的。

五、数学的潜形态及其向显形态转化的机制

所谓"数学潜形态"有两个含义：第一，从科学认识角度看，任何数学成果都有一个由孕育到成熟、由潜到显的过程，存在一个孕育阶段，我们就把孕育阶段的数学思想称之为"数学潜形态"，如数学问题、数学猜想、数学悖论等；第二，从数学发展的曲折性看，它指的是"处于待显阶段的数学成果"，因为一个数学成果取得后，并非都立即得到数学界的承认，而由于种种原因，往往被忽视、排斥、压制、埋没、抛弃、扼杀，有一个蒙难的历程，我们就把虽然在认识上已达到显阶段，但并没有被人们确认的，仍然处于"潜在阶段"的数学成果，也叫做"数学潜形态"。这里，主要是研究数学潜形态的产生、演变、特征、作用及其向数学显形态的转化机制等。

六、数学与其它学科相互渗透的思想方法基础

各门学科相互渗透、彼此结合，是当代科学发展的强大潮流。数学也不例外。现代自然科学各学科的数学化趋势，社会科学各部门的定量化要求，与数学相结合而形成的，生命力颇强的交叉科学如数学哲学、数学经济学、数学社会学、数学心理学、数学语言学、数学美学、数学生物学、数学地震学、计算物理学、计算化学等大量出现，都显示出数学与各学科相互渗透、汇流的这一当代数学发展特点。数学思想方法作为一个独立的研究领域，它必然要研究数学与各门学科相互渗透的思想方法基础。比如，上述交叉科学形成机制中所表现出来的纵向渗透、横向移植与立体交叉等，实

际上都是一些重要的现代科学思想方法，也是辩证法关于普遍联系思想在当代科学发展中的具体体现。此外，交叉科学的类型，体系结构、特征、功能以及发展趋势等，也是与数学思想方法有关的一些问题，同样应予以讨论。

七、数学学科的特点

数学具有高度的抽象性、严谨的逻辑性和广泛的适用性。这是关于数学学科特点的传统看法。近些年来，随着数学的发展与人们认识的深化，对数学学科特点又提出一些新的见解。比如，有人指出，数学的基本特点是确切性、抽象性、严格性、应用的广泛性、数学美，还特别强调，数学美是数学诸特点中不可忽视的基本特点之一，人类进入以物质装置代替原来由人从事的信息加工处理工作的信息时代（或称信息加工时代、计算机化时代）后，数学的上述诸特点进一步显示出来。也有人认为，从当前科学数学化的趋势看，高度的抽象性与广泛的适用性是数学最根本的两个特点。还有人主张，数学的主要特点是它的高度抽象性、严谨逻辑性与数学美，而应用的广泛性是高度抽象性和严谨逻辑性的具体表现。数学作为一门基础科学到底有哪些特点？结合现代科学发展的实际对这一问题加以深入探讨，显然对充分发挥数学的功能，促进数学的发展是有积极作用的。

八、数学内容的辩证性质

数学作为现实世界量侧面的反映，必然充满矛盾，充满辩证法。深入研究数学内容的辩证性质，对把握数学的本质，加速数学发展的进程，是大有益处的。马克思在他的

《数学手稿》中，恩格斯在《自然辩证法》〔数学〕札记中，从不同角度揭示了某些数学内容的辩证性质及其产生发展的历史过程。

从马克思、恩格斯的论述以及其他著作中，我们可以看到，数学辩证性质的研究，主要集中在两个方面：第一，关于数学中矛盾的研究。诸如，数学中有哪些重要矛盾？有的举出正与负、一与多、直与曲、已知与未知、常量与变量、特殊与一般、连续与离散、有限与无限、精确与近似、模糊与明晰等是数学中的重要矛盾，是否妥当？这些矛盾是怎样形成的？如何认识与运用？在数学研究中有什么作用？数学中的主要矛盾是什么？等等。第二，关于数学内容（概念、理论、方法等）的辩证分析。其中包括：（1）内容本身辩证实质的分析，如“一”中包含着多，数学证明中的“分析法”实质上是从未知出发来寻求已知与未知内在联系的方法等；（2）内容形成、演进过程的辩证分析，如“数”、“形”和“函数”等数学基本概念，都是怎样通过数学认识的矛盾运动，从最初的实际问题中逐步发展成为今天这样的科学概念？并从中探讨辩证思维与数学概念发展的关系；（3）内容之间的普遍联系，如许多几何形体概念通过从属关系联系起来，不少几何变换通过合成关系联系起来等。

九、数学理论产生发展的动力及其规律性

关于数学理论产生发展的源泉、动力和规律，一方面可以从数学与社会（社会体制、社会意识、社会文化等）、实践（生产实践、科学实验等）的关系上进行研究，就是说，可从数学的客观基础上来考察。另一方面，又可从数学内部

矛盾运动这个侧面，从思想方法作用这个角度去分析与探讨。象数学发展相对独立性的研究即属此类。我们知道，当数学发展到一定阶段，特别是已积累大量资料，并需概括出新理论时，就会产生一些理论上的矛盾，解决这些矛盾便形成新的数学理论，从而导致数学理论自身的相对独立的发展。比如，公元前三世纪，古希腊数学家欧几里得等人，系统地总结了人类长期以来积累的几何知识，写出了世界上第一部公理化的数学专著《几何原本》，从而创立了欧氏几何学体系。但是，自这部专著问世时起，人们就提出了作为推理前提的"'第五公设'可证"这样一个理论自身的问题，并从此开始了试证欧氏第五公设的漫长征程。直到19世纪20年代，才由德国的高斯、俄国的罗巴切夫斯基、匈牙利的亚·鲍耶从理论上证明了"欧氏第五公设不可证"，最后解决了人们为之奋斗两千年也没有解决的这一重大难题。正是在解决这一问题的过程中，创立了崭新的非欧几何学。还比如，19世纪30年代，由柯西与魏尔斯特拉斯建立了"标准分析"。但这一理论存在着过于抽象、缺乏直观、运算复杂等问题与矛盾，于是在本世纪60年代鲁滨逊打破了"点无结构"的传统观念，引进了非标准实数概念，建立了单子结构模型，将潜无穷小转化为实无穷小，将实数域发展为包含无穷小量的非实数域，将极限方法改变为无穷小量方法，将复杂运算替换为简单运算，并从而创立了非标准分析这一新分支。考察非欧几何学和非标准分析创生的历史过程，并探讨这些理论是怎样从数学理论自身矛盾运动中产生和发展起来的，无疑对全面认识数学发展规律是十分必要的。

数学理论的"储备性"，也是数学发展相对独立性的一种

体现。所谓“储备性”指的是，当某一理论依据逻辑自身的规律由量的关系相互导出后，一时甚至相当长的时间内得不到应用，被暂时“储备”起来。比如，公元前200年，希腊几何学家阿波罗尼乌斯创立的“圆锥曲线论”，直到17世纪，才在抛物线和天体运动理论的研究中得到应用，储备了1800年。还比如，1860年初创立的作为纯数学组成部分的矩阵理论，直到1925年才作为描述原子系统中矩阵力学的基本数学工具而得到应用，储备了65年。

此外，数学研究的自由创造性、数学理论体系结构的稳定性等，亦都是从数学理论自身的矛盾运动中反映出来的。

十、数学的功能

数学的功能是多方面的，但主要表现在三个方面：（1）科学功能，即数学在自然科学、社会科学和哲学等领域中所起的作用；（2）思维功能，即数学作为一种思维工具，它在日常思维活动中所起的作用，以及它对思维科学发展的意义等；（3）社会功能，即数学在社会生产、经济、文化、教育以及在精神文明建设中占有的地位与作用等。数学为什么会有上述功能？怎样才能更好地发挥它的功能？这些问题在科学技术高度发展的今天，显得特别重要。

§2 数学思想方法研究的历史与现状

数学思想方法的研究，自古有之，并取得了一系列进展。然而，长期以来，由于人们过于注重记述数学研究的事

实与最终成果本身，而忽视总结、交流和刊发取得成果的真实经过及其思想方法，因此数学思想方法的研究十分分散，缺乏系统性，发展缓慢，至今尚未形成一个独立的研究领域和完整的理论体系。

回顾数学思想方法研究的历史，考察其现状，对深入开展这方面的研究，是大有益处的。根据我们掌握的资料，数学思想方法的研究，大体可以分为三个阶段：

一、第一阶段（18世纪末以前）：提出了许多零散的、个别的、具体的方法，以解决数学中的实际问题

自古代到18世纪，数学研究基本上处于分散状态，各个分支、部门很少联系，因此数学思想方法的提出往往是零散的、个别的、具体的和解决实际问题的。下面的事例可以说明这一点。古希腊的亚里士多德与欧几里得提出了公理方法，以解决将大量的、零散的几何知识系统化问题，最后由欧几里得等人完成并发表了《几何原本》。中国古代数学家刘徽提出了“割圆术”，以解决长期存在的、圆周率计算不精确的问题，其中包含着极限思想方法的萌芽。英国数学家纳皮尔发明了对数方法，以解决天文观测及贸易中存在的繁重的数字计算问题。法国数学家巴斯卡确立了数学归纳法，以解决数学论证中存在的不严密的问题。法国数学家、哲学家笛卡儿提出了坐标法、用代数方法研究的几何问题，并从而开创了不同数学分支相结合的思想方法。英国的牛顿与德国的莱布尼茨创立了无穷小量方法，以解决微积分理论建设中存在的问题。瑞士数学家欧拉和法国数学家拉格朗日共同建