測定值計算基础

张啓人編著

科学出版社

內 容 簡 介

本书从最基本的測定值的源起开始，深入浅出地詳細地討論了对一般測定、理工測定和科学研究測定中測定值数学处理的各种方法。

全书总結了自高斯发表最小二乘法的基本原理以后一百多年来測定值計算方面的成就．从最基本的誤差理論、概率論一直引伸到經驗公式的探求．第八、九两章关于怎样根据实际測定值来求得各种經驗公式的方法是本书的重点．

本书也以相当的篇幅闡述了內插法和外推法应用于計算測定值．书中选入了107个例題．其中有許多是科学家們过去研究的实际成果．其次，在每一章之后均附有許多計算习題，而每一个习題差不多都附有答案，这样可以在沒有导师的情况下便于自学．

本书讀者須具有大学高等数学和普通物理的知識．

測定值計算基础

張啓人 編著

徐鍾济 安其春 校訂

*

科学出版社出版（北京朝阳門大街117号）

北京市书刊出版业营业許可証出字第061号

中国科学院印刷厂印刷　新华书店总經售

*

1959年11月第一版　　书号：1943　字数：354,000

1959年11月第一次印刷　　开本：850×1168 1/32

（京）0001—5,000　　印张：13 1/2

定价：2.00元

序

毛泽东同志在"矛盾論"中說："科学研究的区分，就是根据科学对象所具有的特殊的矛盾性. 因此，对于某一現象的領域所特有的某一种矛盾的研究，就构成某一門科学的对象."[1] 从这一辯証唯物主义的观点出发，那么，测定值計算就是一門研究誤差和精密度之間特有矛盾的形成、处理和运算方法的科学.

毛泽东同志的"实践論"对于实驗測定以及把我們的測定結果进行处理和归納具有重要的指导意义. 他說："你要有知識，你就得参加变革現实的实践."[2] "一切眞知都是从直接經驗发源的."[3] "要完全地反映整个的事物，反映事物的本質，反映事物的內部規律性，就必須經过思考作用，将丰富的感觉材料加以去粗取精、去伪存眞、由此及彼、由表及里的改造制作工夫，造成概念和理論的系統，就必須从感性認識跃进到理性認識."[4] 从这一辯証唯物主义的观点出发，那么，测定值計算的任务就在于将大量的感觉材料——測定的結果加以去粗取精，去伪存眞.

因此，測定值計算之对于科学研究与生产实践，实具有如此重大的意义，以致科学工作者都把它当成很重要的数学工具之一来加以掌握. 尤其在当前我国社会主义建設事业飞跃前进、科学事业一日千里的形势之下，出版一本专門討論科学研究中測定結果数学处理的著述，就更显得重要. 可惜的是作者学識浅薄、力不从心，編撰是书之际，虽曾謹愼不苟，終不免眼高手低，有負是书之使命. 还希海內专家，多加指正.

---

1) "毛澤东选集"，第一卷，第 297 頁.
2) "毛澤东选集"，第一卷，第 276 頁.
3) "毛澤东选集"，第一卷，第 276 頁.
4) "毛澤东选集"，第一卷，第 280 頁.

本书素材組成于 1954 年，到 1956 年春才算初步定稿．前年夏又作了一次全面整理．近年来又在业余工学院兼授机械系与土木系的高等数学与普通物理課程，編撰此书实际上是忙里偸閒倉促完成的．作者在此希望讀者如发現謬誤不当之处随时通知出版社，以便据以及时更正．

这本书能够在这个伟大的跃进年代里出版，首先应該归功于党的培养和支持．正因为在編撰本书的全部过程中得到了党組織的特别关怀和重視，才能够使这本书有可能发揮一定的作用．

其次要感謝我的学生江华明同志，他几乎牺牲了整整三个月的休息时間为本书初稿进行了謄正．楊志庸同志协助繪制插图，在此一併誌謝．

最后，乘本书出版之际，謹向我母亲——郭懿君老师致以敬意！她早年毕业于北京师范大学，曾进行研究工作有年，而堅持在教育崗位上也已經整整三十周年了．目前虽年近耳順，而为祖国服务之信心，从未稍減．

張啓人　1959 年 3 月

目　录

緒　論

§1. 測定的实际意义

所有在物理、力学、化学、气象、天文、地理、地質、生物等各自然科学領域中，以及在动力、电訊、土木、建筑、水利、化工、机械、航空、冶金等工程技术領域中进行的研究活动，除了依賴于各个科学領域中所特有的邏輯推理方法来进行不同的理論分析之外，它們有着一个共同的研究方法——实驗測定．实驗方法对于科学的进展起重要的作用．沒有赫茲的实驗測定；沒有波波夫的实驗測定；沒有其后成千上万的科学家和工程师們进行了更仆难数的实驗測定，仅仅有麦克斯韦的波动方程和电磁波理論，无論如何无綫电技术也不可能象今天这样蓬勃地发展起来和得到了光輝的实践成果．

辯証唯物主义認为，科学認識过程一般說来是由三个基本部分所組成的，这就是：感知、概括和实驗．列宁說过：“对于唯物主义者，人的实践的‘效果’証明着我們的表象与我們所感知的物的客观本性之符合．”[1] 而实驗，則往往为实践提供了可靠的証明和綫索．

实驗的基本目的有二，一小部分实驗是为了定性地驗証理論結果的正确性．例如被称为俄罗斯航空之父的茹可夫斯基教授，曾經由理論分析預言了在高級飞行技术中飞机可以翻筋斗．不久以后，俄罗斯陆軍上尉涅斯捷洛夫就曾在一次实驗性飞行中实現了茹可夫斯基的預言，这种实驗并不伴随任何測定——就其証实理論結果这一点而言．不过，絕大部分实驗都是定量地驗証理論

---

1) 列宁：“唯物主义与經驗批判主义”，曹葆华譯，人民出版社，第 132 頁．

結果是否正确．同时还可以从定量来确定理論結果中的未知量——这种未知量大部分又是常量．例如法国学者勒伏里在研究太阳系中的行星运动問題时，曾根据古典力学导出行星运动的函数关系．应用这个函数关系来看天王星軌道测定的結果，只有假設还存在一个具有一定質量及在距离更远的軌道上运行着的行星，才可能与他的理論結果吻合．果然按照这一推断，在計算出来的时間和位置上发現了一顆新行星，即海王星．这就說明定量的測定在检核理論結果中所起的重要作用．另一方面，例如由于美国物理学家密立根用油滴法测定了电子的荷質比，为探測微观世界的奥秘大开方便之門；由于我国科学家吳有訓与美国科学家康普頓研究了 X 射綫頻率与散射角的关系，通过散射光角度改变的观测和波长改变的測定，証实了理論分析的正确性，从而有力地奠定了量子理論的基础——光量子的能量守恆定律和冲量守恆定律．

由此可見，測定是所有科学研究的实驗过程中，为了定量地証实理論分析的結果，以及为了提供理論分析中必需的原始数据和新的內容所必不可少的重要的一环．

§2. 測定的方法

一般說，在作科学研究的測定时，必須經过三个步驟：安装仪器、观測和讀数．忽略了任一步驟中的任何細节，都可能为測定的結果引入不符合实际情况的錯誤，这样，就会使整个測定的質量降低，甚至于完全报废．

就測定本身来定义，簡单說来，就是依据一定的单位与一定的标准量所进行的实际量度．例如在物理实驗中，要量度某一物理量，通常是将这个物理量和另一性質相同的标准量相比較，从而定出該物理量本身．

就測定的对象和由測定結果的性質来区分，基本上可以把測定方法分成如下两大类：直接測定法和間接測定法．

直接測定法又叫相对測定法，是将未知的物理量直接以一定的标准量比較出来的．例如要知道一根鋼管长度是多少，我們是

拿一根尺来和它比較，从而测得这根鋼管是这根尺的长度的若干倍(譬如說，一根米尺的 2.4 倍，就是长 2.4 米). 設标准量的单位是 u，則待测物理量 x 可以用下式表之：

$$x = cu,$$

式中，常量 c 是对于标准量测得的倍数，称为讀值.

間接測定法又叫絕对測定法，是将未知的物理量通过完全不同的一些量用一个总的函数关系来表示，而这些完全不同的量則可从直接测定法得到. 从直接测定法求出来的各量，代入已知的函数关系，便可以推出所要求的未知物理量. 例如要测定圓柱体的体积 V，我們通过公式

$$V = \pi r^2 h,$$

用直接测定法测出底面半径 r 和高 h 后，就可以用計算的方法来定出体积 V 的大小. 設那些完全不同的量所取的标准量的单位各为 $u, v, w, \cdots$，則所求的物理量 y 可以用下式表之：

$$y = f(c_1u, c_2v, c_3w, \cdots),$$

式中，常量 c_1, c_2, c_3 等各为 u, v, w 等的讀值.

事实上，科学研究中的所有测定，不論其为直接或間接，基本上可以說都屬于长度的量度，即均从长度测量出发. 例如量度綫路电压，或者綫路电流，我們是从伏特計或安培計表盘上的标度来得到讀值的，而讀标度基本上也就是讀长度，因为我們所观测的是伏特計或安培計指針所偏轉的距离.

如果从賴以进行测定的仪器底构造和测定长度时的性質来区分，那么，我們还可以把测定的方法分成下面三种：

1. 偏位测定法 在量度时是根据测量仪器本身的零件所发生的偏轉或位移来定出所欲测的物理量. 例如上面提到的伏特計用来测定綫路电压，就是利用指針的偏位.

2. 零位测定法 将未知物理量的作用，用已知标准量去抵消，使得某一仪器上的零件，指在均衡的零位，这就是零位测定法. 例如用天平测定物体的質量，是拿已知質量的砝碼去抵消該物体对天平所产生的作用的.

3. 逐次比較法 这一方法介于偏位与零位之間，必須通过逐次比較才能决定。例如利用槓桿原理的中国市秤，位于支点两边的物体重量之比是由支点两边臂长之比来决定的，使用时必須移动秤錘，逐次地加以比較，才能最后得出讀值。

游标尺、球径計、光槓桿和高差計等普通测量仪器，是基于那一种測定方法来得到讀值，讀者自己可以思索出来。

§3. 測定値及其数学处理

測定时，由測量仪器得出的讀値，叫做測定値。

任何測定都不会也不可能得到与实际情况百分之百符合的測定値，在測定的整个过程中，都不免会有意或无意地引进来这种或那种可估計的和出人意料的誤差[1]，因此，絕不能认为得到了讀値就已經万事大吉，紧跟着我們还需要进行一系列有时甚至比实驗过程本身还繁复得多的数学处理[2]。这样才能得到在該測定条件下最高精密度[3]的測定結果。

不宁唯是，把測定値进行数学处理的目的还在于总括測定的結果，得出正确的实驗結論，并且通过必要的整理和归納（例如，通过把測定値繪成曲綫，作出相应的諾謨图），为驗証理論分析和补理論分析之不足創造完整的条件。

測定値的数学处理，一般説来包括两部分，即計算和图示。測定値的图示基本上有两种途径，其中之一是把測定結果合理地描繪在坐标系中，描繪出来的曲綫叫做实驗曲綫；其二是作出为研究工作所必需的諾謨图（又称算图或貫綫图）（这不在本书討論范围之內，讀者可参看参考文献中 I-7 第二部分，I-14 第 6、7 两章，I-15 第 8 章）。

測定値的計算包括：誤差和精密度的确定，內插法和外推法[4]，

1) 誤差的数学意义見 §5。
2) 当然，这主要是指一般物理、工程中的实驗。
3) 精密度的数学意义見 §22。
4) 見第七章。

根据实験曲綫求出实験方程[1]的方法等．为了进行計算，必須透彻地了解和掌握誤差理論[2]、最小二乘法[3]等一系列近似計算中的基本問題．本书的基本目的就在通过这些基本問題的討論引伸出測定値計算的中心問題——实験方程的求得．

我們将通过許多有用的与实际紧密联系着的例題，来进一步闡明測定値計算这門科学在科学研究活动中所具有的地位和价值．作为一門应用数学来說，測定値計算无疑是所有从事于科学理論与实践工作者的一种必备的武器和工具，而不只是科学研究人員才应該具备的知識．

§4. 測定値計算书籍中所必須提到的几位科学家

1. 高斯（C. F. Gauss, 1777—1855） 德国数学家，測量学家和天文学家．1794 年，当他十七岁时就已經闡明了最小二乘法的基本原理，但是直到 1809 年在他的著作"天体沿圓錐截面围繞太阳运动的理論"（Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis selem ambientium）中才把他所发現的这一原理发表．他所发表的方法奠定了測定値計算的基础，因此，也有人把最小二乘法称为高斯法．其后发表的高斯有关誤差理論、內插法的一些著作，都先后由拉丁文譯成法文和德文．例如：

i）"Methode des moindres carrés", 1855;

ii）"Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxial", 1873;

iii）"Theoria interpolationis methode nova tractata", 1876;

iv）"Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate", 1887.

2. 勒讓德尔（A. M. Legendre, 1752—1833） 法国数学家，巴黎科学院院士．他在 1805 年就已在自己的著作"决定彗星軌道的新方法"（Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites

1）見第八、第九两章．

2）見第一至四章．

3）見第五至六章．

des comètes）中提出了用最小二乘法来处理观测結果的方法. 因此，勒让德尔事实上比高斯发表得更早一些. 因而他在这一应用数学的領域中是与高斯名并眷齐的.

3. П. Л. 車貝雪夫 (П. Л. Чебышев, 1821—1894) 俄罗斯傑出的数学家. 曾經解决了許多有关数論、概率理論及机械理論方面的重大問題. 由于他的劳动成果，給测定值計算补充了許多理論上的不足. 他的全部論文都收集在苏联科学院出版的“П. Л. 車貝雪夫全集”(Полное собрание сочинений П. Л. Чебышева) 中.

4. А. Н. 克雷洛夫 (А. Н. Крылов, 1863—1945) 苏联科学院院士，著名的数学家、造船学家和工程师. 在推广近似計算的理論和实践領域中，他具有最卓越的功勳. 这方面的研究成果，都載在苏联科学院出版的“А. Н. 克雷洛夫院士論文集”(Сборник трудов академика А. Н. Крылова) 一书中.

当然，除了上面提出的几位科学家之外，在测定值計算方面有着开拓和发展功績的科学家还很多（譬如拉普拉斯，貝塞尔，勒格朗日，馬尔柯夫，希洛夫等），而发表的科学文献，更是汗牛充栋，这里便不再一一列举了. 讀者可参看有关的数学历史資料，以窥测定值計算的渊源.

第一章　誤差的基本概念

§5. 誤差的基本定义

用伏特計量度电压，若指針偏轉到某一标度处，我們必須用眼来估計标度上最小格的分数，尽管这种估計是欠准确的，但是总比略去这些分数要好些. 例如指針位于219伏与220伏这两个标度之間，我們虽限于眼的分辨能力，无法判断电压是219.4伏呢还是219.5伏，但是后面估計的两个数字总要比219伏和220伏要准确一些.

可見，虽然測定永远只能得到客观情况的近似結果，但是对于測定結果本身說来，还是可以通过某种定义来比較測定值的准确程度，或者說，比較測定值与实际值相差的程度. 根据这一观点，我們有誤差的定义：

从測定值M減去实际值或眞值T，所余的量叫做誤差，用δ表之；或即

$$M - T = \pm \delta. \tag{1}$$

为了区别于后面定义的各种誤差，δ称为絕对誤差. 应消去的絕对誤差值，是一个与絕对誤差大小相等、符号相反的量，叫做改正值，我們用k表示. 显然：

$$T - M = \pm k. \tag{2}$$

大多数情况下，眞值T是我們所不知道的，因而δ也就不能知道. 在这些情况中，通常为了判断測定值而取它的极限絕对誤差，并以$\delta_{极}$表示. 所謂极限絕对誤差也就是最大絕对誤差，所有被考虑的測定值底絕对誤差都不会比它大. 我們将在§9和§10中再闡明它的实际意义.

但是，絕对誤差和最大絕对誤差在許多場合中都不能用来比

較測定值之間的准确程度。譬如說，在量度电解槽中通过的电流值与量度收訊眞空管控制柵极中通过的电流值时，如果它們的絕对誤差一样，显然可以判断前者是极其准确，而后者便是粗糙得不堪言状的。这样看来，还有必要为补絕对誤差概念的不足，而定义相对誤差。

絕对誤差 δ 和眞值 T 的比，叫做相对誤差，用 ρ 表之；卽

$$\rho=\frac{\delta}{T}. \tag{3}$$

由式(1)可知

$$T=M\pm\delta=M\left(1\pm\frac{\delta}{M}\right)\doteq M\left(1\pm\frac{\delta}{T}\right)=M(1\pm\rho). \tag{4}$$

因此，相对誤差 ρ 直接表示了眞值 T 和测定值 M 之間的关系。相对誤差和 1 相距越近，則眞值与測定值也就偏离越远。

具有同样准确程度的测定值，其相对誤差总是相同的。

在实用上，我們并不按式(4)用普通的簡单分数来表示相对誤差，而是采用百分数或千分数。

最大絕对誤差（或极限絕对誤差）与眞值之比，称为最大相对誤差（或极限相对誤差）。

最大絕对誤差比絕对誤差有用，同样，最大相对誤差也应該比相对誤差更結合实际。最大相对誤差以 $\rho_{极}$ 表之，于是

$$\rho_{极}=\frac{\delta_{极}}{T}100\%, \tag{3a}$$

从式(3)和(3a)分别得到

$$\delta=T\rho \tag{5}$$

和

$$\delta_{极}=T\rho_{极}, \tag{5a}$$

卽相对誤差（最大相对誤差）与眞值的乘积等于絕对誤差（最大絕对誤差）。

在§9中我們还将論及取决于最大眞值的 $\delta_{极}$ 和最小眞值的 $\rho_{极}$。

例 1. 圓周率 $\pi = 3.14159265\cdots$，当取各种近似值时絕对誤差和相对誤差各如何?

解: 取

$\pi=3.1$: $\delta=+0.04159265\cdots$, $\rho=+1.3\%$;

$\pi=3.14$: $\delta=+0.0159265\cdots$, $\rho=+0.05\%$;

$\pi=3.142$: $\delta=-0.00040735\cdots$, $\rho=-0.01\%$;

$\pi=3.1416$: $\delta=-0.00000735\cdots$, $\rho=-0.0002\%$;

$\pi=3.14159$: $\delta=+0.00000265\cdots$, $\rho=+0.00008\%$;

$\pi=3.141593$: $\delta=-0.00000035\cdots$, $\rho=-0.00001\%$.

例 2. 氢原子的質量等于 $(1.673 \pm 0.001)\cdot 10^{-24}$ 克，而电子的質量等于 $(9.11 \pm 0.01)\cdot 10^{-28}$ 克. 从这里看到电子質量测定的絕对誤差是 $\pm 10^{-30}$ 克，而氢原子質量测定的絕对誤差是 $\pm 10^{-27}$ 克，即后者比前者大了一千倍，这是不是說氢原子質量测定时准确度要比电子質量测定时的准确度要小了一千倍呢? 不是的，因为从相对誤差得到前者是 0.06% 而后者是 0.11%，也就是說，按相对誤差来比較，事实上测定时前者比后者要更精确一些.

§6. 测定值与近似值

测定值是指那些經过直接测定，或是包含有直接测定在内的相对测定过程中得出的数值，从前面各节得知，测定值永远是一种近似值.

但是，近似值包括的范围远較测定值为广. 一般說来大約有以下几方面:

1. 各种数学常量 例如 $\pi = 3.14159\cdots$, $e = 2.71828\cdots$, $\sqrt{2} = 1.4142$, $\ln 10 = 2.30258$ 等等，这些常量对我們的計算来說，永远只能是近似的，但是都能够滿足我們給定的精密度. 它們可以在各种数学用表中找到.

2. 各种物理常量 例如鋁的热胀系数 $\alpha = 0.238 \times 10^{-4}$，銅的电阻系数 $\rho = 0.017 \times 10^{-4}$，水在 20℃ 时的折射率 $n_D = 1.333$