力学变分原理

陈位官　编著

同济大学出版社

内 容 简 介

本书精炼地阐述了变分原理的数学本质及工程应用。内容包括：不动边界问题中的变分方法；可动边界问题中的变分方法；变分问题中的直接法；力学变分原理等。章末附有一定数量的习题。作者在叙述数学理论时辅以应用实例，在分析力学例题时揭示数学本质。因而将数学本质与力学应用有机地结合了起来。

本书可作大学生、研究生之变分法或工程数学的教材或参考书，亦可供工程技术人员、大学教师参考。

责任编辑　孟玉恩
封面设计　徐　繁

力 学 变 分 原 理
陈位宫　　编著
同济大学出版社出版
（上海四平路1239号）
新华书店上海发行所发行
大丰县印刷二厂印刷
开本：787×1092　1/32　　印张：8,375　　字数：107千字
1989年8月第1版　　1989年8月第1次印刷
印数：1—3,000　　定价：4.70元
ISBN7-5608-0216-8/O·29

序

变分法是数学的重要分支，有着深刻的古典数学渊源。它之所以越来越为人们所重视，与它在物理、力学和工程中的广泛应用分不开。在力学中变分法体现为力学的变分原理。力学的丰富内容只建立在为数不多的若干原理基础之上，而这些原理都可以从变分原理得到。因而可以说，几乎所有的力学命题均基于力学的变分原理，离开变分法的力学是不可想象的。

应用日趋广泛的有限元法直接由力学变分原理导出。广义变分原理亦正在逐步扩大它的应用领域。

科学技术的进步，要求越来越多的工程技术人员熟悉与掌握变分法的基础知识。这就是目前许多大学都开设《变分法》课程的原因。

可以从不同的角度论述变分法。数学工作者往往偏于从纯数学的观点深入讨论变分法的理论，但涉及其力学应用不多；而力学工作者又多偏于讲述力学应用，却较少涉及其数学本质。笔者认为对于广大初学者来说，也许把二者结合起来更易于接受。即从数学的本质来论述力学的变分原理，以使数学严密、精确之论证不致因游离其应用而显得枯燥；同时又能在应用力学变分原理时因深知其数学实质而感到自由，并为力学应用的创新与发展打下基础。本书並不涉猎数学与力学中过于精深的内容。对于有关变形体力学的内容亦局限于小变形线弹性理论的范围，因而有助于初学者实现从数学到力学的过渡，为进一步学习其他力学分支的变分原理提供了较好的基础。

由于本书较详细地讨论了一般工程中涉及的变分法的基本理论，因而对于那些並不需要深入了解力学变分原理的读者来说，也是适用的。

本书是在教学讲义基础上修改而成的，可作为大学力学专业、工程专业高年级学生之教材或参考书，也可供大学教师、研究生、工程技术人员参考。

本书由同济大学钱曙复付教授审阅。此外，上海交通大学金忠谋教授给予了热情关怀与帮助，深深致谢。

由于编者水平所限，难免会有不妥之处，恳请读者批评指正。

陈位宫

一九八七年九月

引　言

变分的概念与应用在工程技术中是十分普遍的。例如，给定两点 A 与 B，那么连接它们的曲线弧的长度便依赖于曲线弧的不同形状。我们关心这样的问题：在所有可能选取的曲线（称容许曲线）中，选取哪一条曲线使该曲线弧的长度为最短。对于这样的命题，人们自远古时代就从经验得知它应该是一条直线。然而，要给出数学上的证明却归结为变分问题的求解。又如，假设飞机在平行于地面的平面内飞行（风速不变），问它应该绕什么样的闭合曲线飞行使得在一段时间内绕过最大的面积。该问题的有趣解答可为某些飞行实践提供参考。又如，某棉纺织厂曾提出《高速并条机的卷条斜管曲线问题》这一课题。要求棉花条沿着某一种形状的斜管下滑（且并条）速度最快。其力学模型就是质点在自重作用下沿着何种曲线下滑（光滑或计及摩擦）所需时间最少，以实现生产中的高速运转。以后我们将会知道这是有名的最速落径问题在生产中的应用。

在上述诸例中，我们涉及了两个概念：泛函及泛函的极值。

一、泛函（或曰函数的函数）

例如连接两定点的不同曲线是点坐标的函数。而曲线弧的长度这一变量又依赖于用以表征曲线形状的函数。因此，曲线弧的长度这一变量便是（曲线形状）函数的函数。我们称这类变量为泛函。

如设连接所给两点 A、B 的曲线弧的形状用函数 $y=y(x)$ 表示（图 1），则其长度 l 依赖于该函数。其数学表达式为

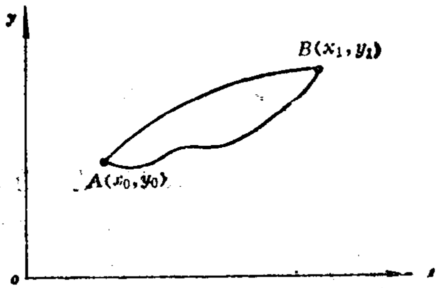


图 1

$$l[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx \qquad (1)$$

这里 $l[y(x)]$ 便是函数 $y(x)$ 的泛函。

又如求算曲线 $y(x)$ 与轴 ox、纵线 $x=x_0$ 及 $x=x_1$ 所围的面积（图 2）应为求下述积分

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}y(x)\,dx \qquad (2)$$

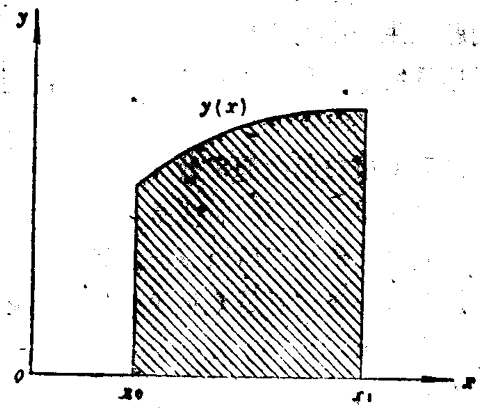


图2

于是 $v[y(x)]$ 亦为函数 $y(x)$ 的泛函。每一个函数 $y(x)$ 对应于一个确定的值 $v[y(x)]$。

具有等加速度的物体在某一介质中运动时，其所受阻力也是一个泛函。它是由运动物体表面形状的选取来确定的。

材料力学中直梁弯曲时的变形能亦为一泛函。它由下式确定

$$U[y(x)] = \frac{EI}{2}\int_0^l y'^2 dx \tag{3}$$

其中 EI 为常量，函数 $y=y(x)$ 为梁挠曲线形状。

至此，不难给出定义。

定义 设 $\{y(x)\}$ 为已给的某类函数。如果对于这类函数中的每一个函数 $y(x)$，变量 v 有一值与之对应，那么变量 v 称为这类函数 $\{y(x)\}$ 的泛函，记为 $v=v[y(x)]$。

与函数 $z=f(x)$ 作一比较，泛函 $v[y(x)]$ 对于函数 $y(x)$ 的依赖关系正如同变量 z 对于数 x 的依赖关系一样。

这里，在函数关系中，函数对应于点 x；在泛函中，变量泛函对应于曲线 $y(x)$。

与函数的定义域类似，一个在其上定义泛函的函数类称为该泛函的定义域。

泛函 (1) 是定义在有连续导函数的函数类上，而泛函 (2) 则定义在更为广泛的连续函数类上。

二、泛函的极值

函数 $z=f(x)$ 的极值问题在微积分中已作详尽讨论，泛函的极值亦当为人们所关心。例如前面提到的在连接已给定的两点的所有曲线弧中，哪一条曲线的弧长为最短？这是个最简单的泛函极值问题。可通过求泛函 (1) 的极值证实它应为直线。

研究解决泛函各种极大值和极小值问题的普遍方法即为变分法或变分学。凡有关求泛函的极大值和极小值的问题称为变分问题。

变分法始于十七世纪末，是差不多和数学分析同时发展起来的古老数学分支。经 Bernoulli 兄弟，Euler，Newton，L'Hôspitale，Lagrange，Gauss 等人的研究，使得它成为数学中一门独立而又别具风格的重要分支。

在变分法的发展史上，以下三个重要问题具有典型意义。

最速落径问题（最速降线问题或捷线问题）

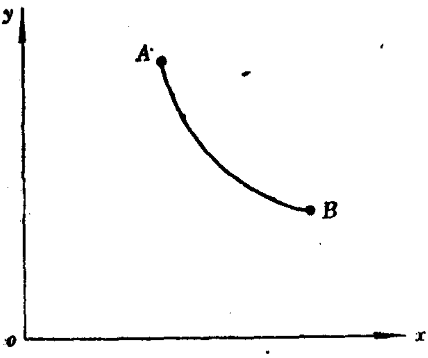


图 3

在所有连结不在同一铅直线上两定点 A、B 的曲线中，求出一条曲线来，使得初速等于零的质点在重力作用下，自 A 点沿着该曲线运动至 B 点所需时间最短（不计质点与曲线间的摩擦）（图 3）。

这是在历史上引起数学家普遍兴趣的第一个变分问题。它是 Euler 于1696年提出的。

我们知道运动时间不仅决定于路径长短，而且与速度有关。连接 A、B 的所有曲线中以直线段 AB 为最短，然而其速度增长是比较慢的。如果我们取某一条由 A 至 B 较为陡峭的曲线，自然路径是加长了，但其速度的增长却是较快的。这样，质点沿着该曲线（从 A 至 B）经历最短的时间。

后来证明了该曲线为圆滚线。它是由 Bernoulli 兄弟、Newton, L'Hôspitale 解决的。

短程线问题（测地线问题）

给定曲面 $\phi(x,y,z)=0$，求曲面上所给两点 A 与 B 间长度最短的曲线（图 4）。

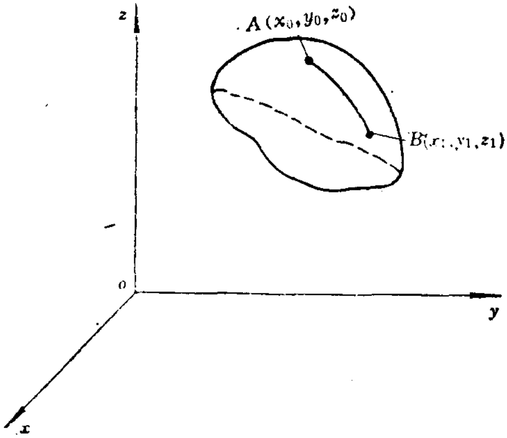


图 4

问题为需求泛函

$$l=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx \tag{4}$$

的极小值。其中 $y(x)$，$z(x)$ 应当适合条件

$$\phi[x,\ y(x),\ z(x)]=0 \tag{5}$$

这是一个条件极值或约束极值的问题。地球上的测地线即为此问题的特殊情形。

等周问题

在具有定长 l 的所有不相交的闭合平面曲线中，找出一条曲线来，使其所围面积 A 为最大。

面积 A 由下述线积分

$$A=\frac{1}{2}\oint(xdy-ydx)$$

计算。将变量 x，y 用参数 t 表示，则上面的积分为

$$A=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)dt \tag{6}$$

这里 t_0 与 t_1 对应于闭合曲线的起点与终点。
附加条件为

$$l=\oint ds=\oint\sqrt{dx^2+dy^2} \tag{7}$$

其参数表示为

$$l=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \tag{8}$$

问题归结为在满足泛函 (8) 为定值的条件下，求泛函 (6) 的最大值。

与前一问题不同的是该附加条件本身为一泛函。这样的条件称为等周条件。远在古希腊时，人们已经知道这个曲线就是一个圆周。

近代，泛函分析理论有了很大的发展，不论在数学的理论上（纯粹数学）或是在其应用方面（应用数学）都显示了重要的作用，而变分学就是泛函分析的一个重要组成部分。

变分学的特点在于它的应用。它的发展是与力学、物理学以及工程上的许多方面相联系。

虽然，目前变分学的应用已相当广泛，但还不能满足工程上许多方面对它日益增长的需要，仍然面临着许多新的问题。例如宇宙航行理论中的轨道设计和计算方面经常提出新

的变分问题，结构的优化问题等等。

因此我们可以说变分学既是富于数学渊源的古典数学分支，又是新颖的具有强大生命力的重要学科。

与一元函数及多元函数的极值问题相类似，变分法自然产生下列三个需要解决的问题：

Ⅰ. 探求未知函数所应满足的必要条件，以便当解存在时，就可藉以实际地确定所求的曲线。

Ⅱ. 充分地探讨极值存在的一般准则。

Ⅲ. 求得了满足基本必要条件的曲线后，建立一个判别法则，以判断曲线是否真正给出极值，並且当给出极值时，确定它究竟是极大还是极小。

在带有应用性质的实际问题中，极值的存在往往间接地在问题的提法中已经肯定。因而第Ⅰ类问题就有特别重要的价值。

变分问题按其边界是否固定可分为不动边界的变分问题与可动边界的变分问题。前者如最速落径问题，而求两曲线间的最短距离，则为可动边界的变分问题。

目　录

第一章　不动边界问题中的变分方法

§1.1　变分及其特性

变分法所研究的是泛函的极大值和极小值问题。它与我们所熟知的用微分研究函数的极大值与极小值的方法有许多相似之处。因此我们不妨用类比的手法从函数的极值问题引述变分的概念及有关定理。

1. 如果对于变量 x 的某一区间中的每一 x 值，z 有一值与之对应，那么，变量 z 叫做变量 x 的函数，记为 $z=f(x)$。

1° 如果对于某一类函数 $\{y(x)\}$ 中的每一个函数 $y(x)$，v 有一值与之对应，那么，变量 v 叫做依赖于函数 $y(x)$ 的泛函，记为 $v=v[y(x)]$。

2. 函数 $f(x)$ 的宗量 x 的微小增量 Δx 是指这个变量的两值间的差 $\Delta x=\bar{x}-x$。如果 x 是自变量，则 x 的微分就是它的增量，即 $dx=\Delta x$。

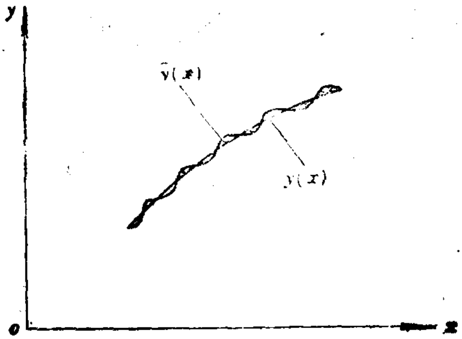
2° 泛函 $v[y(x)]$ 的宗量 $y(x)$ 的微小增量称为变分，记作 δy，δy是指 $y(x)$ 和跟它相接近的 $\bar{y}(x)$ 之差 $\delta y=\bar{y}(x)-y(x)$。其中 $y(x)$ 是在某一函数类中任意改变着，显然，δy 也是 x 的函数。

按照定义，函数 $y(x)$ 的变分与微分是不同的概念。

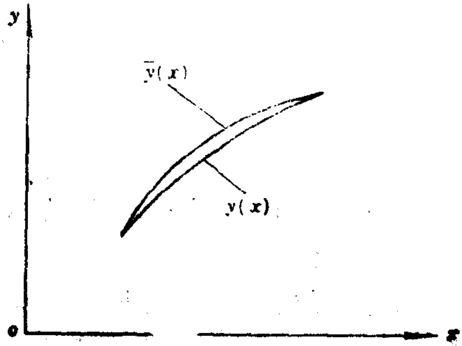
3. 如果对于 x 的任何微小改变，相应地使函数 $f(x)$ 也产生微小改变，则函数 $f(x)$ 是连续的。

3° 如果对于 $y(x)$ 的任何微小改变，相应地使泛函

$v[y(x)]$ 也产生微小改变，则泛函 $v[y(x)]$ 是连续的。



(a)



(b)

图 5

那么，泛函的宗量 $y(x)$ 的微小改变意味着什么？

直观的理解，自然是指对于使函数 $y(x)$ 与 $\bar{y}(x)$ 有定义的一切 x 值

$$|\bar{y}(x)-y(x)|$$

很小，如图 5 (a)、(b) 两种情况所示。

进一步比较这两种情况，不难发现，图 5 (b) 所示的两曲线不仅纵坐标之间很接近，而且其相应点处的切线的方向也很接近，即是说，

不仅 $$|\bar{y}(x)-y(x)|$$

而且 $$|\bar{y}'(x)-y'(x)|$$

也很小。这种情况当然要比图 5 (a) 所示的两曲线仅仅是纵坐标之间很接近的情形，在数学上含义更为深刻。

我们把图 5 (a) 所示的两曲线，即仅仅使两函数之差的模很小的情形称为零阶接近度。而把图 5 (b) 所示的两曲线，即不仅使两函数之差的模很小，而且其一阶导数之差的模亦很小的情形称为一阶接近度。

仿此不难给出 k 阶接近度的定义。对于使函数 $y(x)$ 与 $\bar{y}(x)$ 有定义的一切 x 值，有

$$|\bar{y}(x)-y(x)|$$

$$|\bar{y}'(x)-y'(x)|$$

$$|\bar{y}''(x)-y''(x)|$$

$$\vdots$$

$$|\bar{y}^{(k)}(x)-y^{(k)}(x)|$$

都很小，则称曲线 $\bar{y}=\bar{y}(x)$ 与 $y=y(x)$ 有 k 阶接近度。接近度的阶数越高，曲线接近得越好。

从定义知，如果两曲线有 k 阶接近度，那么它们将必定有任何较低阶的接近度。

在弄清了接近度的意义后可以精确地定义泛函的连续。

4。如果对于任给的正数 $\varepsilon>0$，可以找到这样的 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$

时，能使

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

就说函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处是连续的。

4° 如果对于任给的正数 $\varepsilon>0$，可以找到这样的 $\delta>0$，

当 $$|y(x)-y_0(x)|<\delta,$$

$$|y'(x)-y_0'(x)|<\delta,$$

$$\vdots$$

$$|y^{(k)}(x)-y_0^{(k)}(x)|<\delta$$

时，能使

$$|v[y(x)]-v[y_0(x)]|<\varepsilon$$

就说泛函 $v[y(x)]$ 在 $y=y_0(x)$ 处是 k 阶接近度的连续。

5. 线性函数 $L(x)$ 是指满足条件：

$$L(cx)=cL(x)$$

及 $$L(x_1+x_2)=L(x_1)+L(x_2)$$

其中 c 为任意常数。

5° 线性泛函 $L[y(x)]$ 是指满足条件：

$$L[cy(x)]=cL[y(x)] \tag{1-1 a}$$

$$\text{及} L[y_1(x)+y_2(x)]=L[y_1(x)]+L[y_2(x)] \tag{1-1 b}$$

例 $L[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}[p(x)y+q(x)y']dx$ 是线性泛函。

证明：

$$L[cy(x)]=\int_{x_0}^{x_1}[p(x)cy+q(x)cy']dx$$