现代工程数学手册

HANDBOOK OF MODERN MATHEMATICS IN SCIENCE AND ENGINEERING

第Ⅰ卷

華中工學院出版社

现代工程数学手册

第 I 卷

现代工程数学手册编委会

華中工學院出版社

现 代 工 程 数 学 手 册

（ Ⅰ ）

现代工程数学手册编委会　编

责任编辑：李立鹏

*

华中工学院出版社出版

（武昌喻家山）

湖北省新华书店发行

武汉大学出版社印刷总厂印刷

*

开本：850×1168 1/32　印张：37.375　字数：930,000

1985年8月第一版　1985年8月第一次印刷

印　数　1—15,000

统一书号：13255—012　定价：9.00元

《现代工程数学手册》
编辑委员会

前　　言

现代工程规模愈益宏大，技术愈益复杂，要求有科学的决策和计划，精确的分析和计算。因此，数学在现代工程科学的各个领域中正日益发挥着越来越重要的作用。另一方面，工程科学的发展，又对数学不断提出新的课题，促使一些新的数学分支的出现和发展。

为了适应社会主义“四化”建设的需要，促进工程学科更有效地运用数学．一九七九年，根据汪胡桢同志的倡议，水利电力部领导决定组织编写《现代工程数学手册》·经过各方面的共同努力，本书终于和读者见面了！我们希望本书能向读者较系统地介绍现代数学的一些理论与方法，也希望它能在工程科学技术人员和数学工作者之间起到一定的桥梁作用。

本书涉及的数学分支较多，全书近百篇，分为五卷陆续出版：

第Ⅰ卷是基础部份，包括初等数学、微积分和在工程实践中广为应用的一些数学分支，如微分方程、复变函数论、特殊函数和线性代数等。

第Ⅱ卷介绍近代数学的一些基本内容，如群论、拓朴、泛函分析、广义函数、偏微分方程的近代理论；介绍以数值计算的各种数学方法，如数值分析、数值代数、有限差法、有限元法等。

第Ⅲ卷介绍现代数学的若干分支，如凸分析、图论、外微分、模糊数学和数理逻辑等．

第Ⅳ卷介绍概率论、数理统计等随机性数学的有关分支及其应用．

第Ⅴ卷介绍规划论，控制论，信息论及经济数学等现代应用数学的有关分支。

本书的取材侧重于数学理论和方法在工程和科学中的应用，其中许多是工程技术人员和其它应用科学工作者所迫切需要的。本书编写体裁力求适应上述读者的要求，对于某些重要的数学定理和公式给予必要的推导或证明，并辅以适当的例题说明其应用，使读者在使用本书时，既能查到公式和方法，又能学到一些理论，以便于加深理解和灵活运用。本书也可供其他领域的读者参考。

本书的编撰得到全国数学界和工程技术界许多专家学者的支持和帮助，特别是老一辈的数学家、工程学家参与了本书的编、审、校工作和进行指导，对提高本书的质量、保持特色作出了贡献。

本书的编辑出版工作得以顺利进行，是与水利电力部、华中工学院以及许多高等院校和科研单位的支持和帮助分不开的。

对于本书的缺点或错误，敬请广大读者给予批评指正。

《现代工程数学手册》编辑委员会

一九八五年元月

《现代工程数学手册》

第 I 卷

目 录

《现代工程数学手册》第Ⅰ卷

第 一 篇

数及数的运算

编 者：汪胡桢

目　　录

第1章 数的名称和表示

人类很早就会屈指计数，从1开始，一个加一个地进行，得到的是一个正整数集，即自然数：1、2、3、4、5、….数的计数方法通常采用十进制，即逢十进一。在近代电子计算机中，一般采用二进制，也有采用八进制等计数法。

我国表示自然数的文字最早已在殷商时代（约公元前十六世纪到公元前1066年）的甲骨文中出现，用的就是十进制。在汉文中自然数用一、二、三、四、五、六、七、八、九来表示，个位以上为十、百、千、万、…。《汉书·律历志》就定义“数者，一十百千万也，所以算数事物”。

万以上的大数古代都有专名，《数术记遗》说：大数有十等，即亿、兆、京、垓（gai）、秭（zi）、穰（rang）、沟、涧、正、载。大数间的进位倍数分三种：第一种十十而变，即十万为亿，十亿为兆，如《诗经》的郑笺称十万为亿；第二种万万而变，即万万为亿，万亿为兆，如《诗经》的毛传称万万为亿；第三种自乘而变，即万万为亿，亿亿为兆。在这三种中，世上行用的是第二种。《数理精蕴》主张大数以四位为一节，即万万为亿，万亿为兆，万正为载。由于众说纷纭，到现在还没作出定论。现时行用的大数是在万以上依次冠以十、百、千，如十万、百万、千万，到万万为亿，又依次冠以十、百、千，如十亿、百亿、千亿。所有其他大数名词均未行用，仅物理数量中规定一百万为兆是一例外，例如兆欧等于一百万欧，兆赫等于一百万赫。

对于小数，我国都给以专名，如十分之一称为分，百分之一称为厘，千分之一称为毫，万分之一称为丝，十万分之一称为忽，一百万分之一称为微。从微以下每十分之一依次为纤、沙、尘等，但现在没有通行。

我国现在通用阿拉伯数字，以0、1、2、3、4、5、6、7、8、9来记数。对于大数，采用国际通例，每三位为一段，用撇“,”为界，以便识读。例如：一千写作1,000；一万写作10,000；一百万写作1,000,000；1亿写作100,000,000。

在欧美对于大数都有专称。英语中称100为“hundred”，1000为“thousand”，1,000,000为“million”。从这以上各国称法有异。美、法称1,000,000,000为“billion”，而英、德称1,000,000,000,000为“billion”。

我国规定书写银券时用大写数字：壹、贰、叁、肆、伍、陆、柒、捌、玖、拾、佰、仟、万、亿，以防篡改。古代称这种数字为“钱谷字”。

世界上在特殊场合还使用罗马数码。用I＝1，V＝5，X＝10，L＝50，C＝100，D＝500，M＝1000，$\overline{\text{L}}$＝50,000，$\overline{\text{D}}$＝500,000（上面加一横表示乘1000）组合起来表示各数。

组合罗马数码的规定如次：（1）凡在任何数码前面不放置较小的数码时，用数码相加来代表本数。例如：Ⅲ＝3，XX＝20，Ⅵ＝6，（2）凡在任何数前放置着较小的数码时，应从较大的数码减去较小的数码作为本数。例如：Ⅳ＝5－1＝4，XL＝50－10＝40。

组合罗马数码的例子如下：

Ⅸ＝9，XⅢ＝13，XⅣ＝14，LV＝55，XLⅡ＝42，XCⅥ＝96，CXLV＝145，MDCI＝1601。

现代科学中常用“浮点数”形式。即以$\pm m10^{\pm n}$来表示（n，m为自然数）。例如：$3\times10^{10}=30,000,000,000$，$324.26=3\times10^2+2\times10^1+4\times10^0+2\times10^{-1}+6\times10^{-2}$。通常以十倍为一个数量级，例如$2\times10^{14}$比$3\times10^{13}$高一个数量级，比$6\times10^9$高五个数量级。对于小数，用$\pm m10^{-n}$来代表，如$3\times10^{-4}=3/10000=0.000,3$，$8\times10^{-8}=0.000,000,08$。

对于百分数用“%”来表示，对于千分数用“‰”来表示，对于万分数用“‱”来表示。

我国古代用筹运算，筹为竹制。据《汉书》称，筹径一分，长六寸，每副271支，贮在一个六角形的筒里，早期使用竹筹时，每筹都当作一，以致一个大数必须用很多的筹来代表。《礼记》上说“一人执筹以从之”，可见运算时用筹是很多的。

后来筹算得到改进，就是用横放的筹当作五，直放的筹当作一，并按十进制按位放筹，这样从一到九的数目可表如图1.0—1。

图1.0—1

例如365的数目不需用三百六十五支筹，只要排成如图1.0—2，用六支筹就足够了。把数摆出后，利用类似现代珠算的口诀或笔算的方法就可进行加、减、乘、除的运算。后来这种运算法发展成商码，在商业交易中应用，一到九的数目表如图1.0—3。

图1.0—2

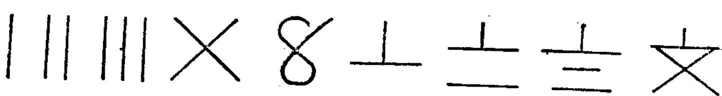

图1.0—3

大约到了六世纪，人们始用珠代筹，使携带更加方便。用黑色的珠当作5，白色的珠当作1，从5到9的数字可表如图1.0—4。那时已有原始算盘出世，如图1.0—5的形式。木板中凿出截面为半圆形的纵沟代表十进位制的各位数，有了这些沟可使圆珠不致滚动而离开本位，布数时黑珠在上，白珠在下。由上下两格贮放多余的珠或取用不足的珠。

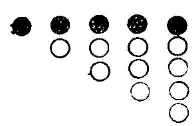

图1.0—4

那时又有一种“太一算”的算盘问世。如图1.0—6所示。

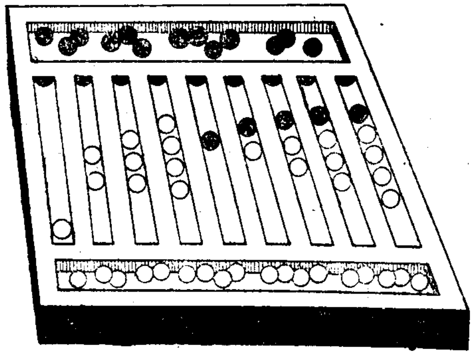

图1.0—5 原始算盘

用平行横线所成的空格表示数目．用贯穿一个活动木珠的竹柱表示位次，图中自左到右的木珠分别表示0～9的数码．以后又把竹柱分上、下两格，上格贯二珠，每珠当五，下格贯五珠，每珠当一，就成为现代的算盘．

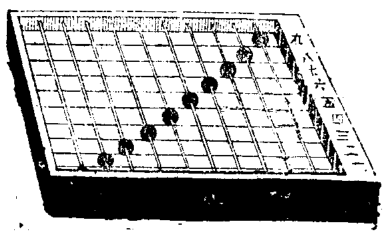

图1.0－6 太一算盘

现代算盘大概诞生于北宋后期，是由原始算盘和太一算盘合并而成的．河北鉅鹿宋代故城有算盘珠出土，现存历史博物馆，但尚未确切鉴定．到元代，算盘已经在全国风行，并传入朝鲜、越南、日本及东南亚各国．元代文学书中有多起述及算盘珠的诗文．

近代从外国传入我国的计算工具有计算尺和台式机械计算机．最近又引进袖珍电子计算器，它计算方便，在短期内一跃而为重要的计算工具．此外，在科技领域内广泛应用各种大型高速电子计算机来完成各种复杂的运算．

第2章 实 数

2.1 整数

（1） $\{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$ 称为**自然数也称正整数集**．

$\{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$称为**扩大的自然数**.

(2) $\{\cdots, -n, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$称为整数集。

整数集中凡能被2整除的称为**偶数**，否则称为**奇数**. 设n为整数，则$2n$为偶数，$2n+1$为奇数 .

整数集中奇数和偶数相间出现。偶数个奇数之和为偶数，任意个奇数之积为奇数.

(3) 自然数可分为合数和素数(质数).凡只能为1和本数所整除的称为**素数**，除1和本数之外还能为其他自然数所整除的为**合数**。如自然数60除可为1及60整除外,还能为2、3、5所整除，故60为合数，而2、3、5为其素数因子。在素数中只有2是偶数，其余均为奇数。

怎样断定一个大的自然数是否属于合数或素数，尚不知其规律。仅知要判定一个数a是不是素数可用$\leqslant\sqrt{a}$的素数去除，都除不尽的便是素数。对于大数，这个试算工作很繁难。现把1～100范围里的合数和素数列如表2.1—1.

2.2 有理数

凡可用p/q(p、q是整数，$q\neq0$)表示的数称为**有理数**，它包括整数和分数，分数可用有限位小数或循环小数表示。

2.3 无理数

凡不能用两个整数相除表示的数称为**无理数**，它是不循环的无限位小数.

如正方形对角线长和边长的比为$\sqrt{2}=1.414,213\cdots$,圆周长和直径长的比为$\pi=3.141,592,653,589,793,2\cdots$，都是无理数.

2.4 实数

实数是有理数与无理数的总称。现实事物计数用的都是实数。

表2.1—1　100以内的合数与素数表

整　数	合数或素数	整　数	合数或素数	整　数	合数或素数
2	素　数	36	$2^2\cdot3^2$	70	$2\cdot5\cdot7$
3	素　数	37	素　数	71	素　数
4	2^2	38	$2\cdot19$	72	$2^3\cdot3^2$
5	素　数	39	$3\cdot13$	73	素　数
6	$2\cdot3$	40	$2^3\cdot5$	74	$2\cdot37$
7	素　数	41	素　数	75	$3\cdot5^2$
8	2^3	42	$2\cdot3\cdot7$	76	$2^2\cdot19$
9	3^2	43	素　数	77	$7\cdot11$
10	$2\cdot5$	44	$2^2\cdot11$	78	$2\cdot3\cdot13$
11	素　数	45	$3^2\cdot5$	79	素　数
12	$2^2\cdot3$	46	$2\cdot23$	80	$2^4\cdot5$
13	素　数	47	素　数	81	3^4
14	$2\cdot7$	48	$2^4\cdot3$	82	$2\cdot41$
15	$3\cdot5$	49	7^2	83	素　数
16	2^4	50	$2\cdot5^2$	84	$2^2\cdot3\cdot7$
17	素　数	51	$3\cdot17$	85	$5\cdot17$
18	$2\cdot3^2$	52	$2^2\cdot13$	86	$2\cdot43$
19	素　数	53	素　数	87	$3\cdot29$
20	$2^2\cdot5$	54	$2\cdot3^3$	88	$2^3\cdot11$
21	$3\cdot7$	55	$5\cdot11$	89	素　数
22	$2\cdot11$	56	$2^3\cdot7$	90	$2\cdot3^2\cdot5$
23	素　数	57	$3\cdot19$	91	$7\cdot13$
24	$2^3\cdot3$	58	$2\cdot29$	92	$2^2\cdot23$
25	5^2	59	素　数	93	$3\cdot31$
26	$2\cdot13$	60	$2^2\cdot3\cdot5$	94	$2\cdot47$
27	3^3	61	素　数	95	$5\cdot19$
28	$2^2\cdot7$	62	$2\cdot31$	96	$2^5\cdot3$
29	素　数	63	$3^2\cdot7$	97	素　数
30	$2\cdot3\cdot5$	64	2^6	98	$2\cdot7^2$
31	素　数	65	$5\cdot13$	99	$3^2\cdot11$
32	2^5	66	$2\cdot3\cdot11$	100	$2^2\cdot5^2$
33	$3\cdot11$	67	素　数		
34	$2\cdot17$	68	$2^2\cdot17$		
35	$5\cdot7$	69	$3\cdot23$		

实数有下列性质：

（1） 这个数集是有序的，就是说：能够比较任何两个实数的大小。

（2） 这个数集是稠密的，在任何两个实数a与b之间（$a<b$）

至少存在一个实数c，即$a<c<b$，同样a与c和c与b间都存在着实数，因此可知在a与b之间存在着一个无限的实数数集.

（3） 这个数集是连续的。如果数a_1，a_2，… 是递增的，而b_1，b_2，…是递减的，且总比a_i大，则在这两串数间必有一个数c存在。

（4） 对任何两个实数都可进行加、减、乘、除的四则运算，得到的结果是一个唯一的实数，只有0例外，不能用0来做除数。算式$a/0$是没有意义的，因为不存在一个确定的b可使$b\cdot 0=a$，如果$a=0$，则b可为任意数。写作$a/0=\infty$时，这个∞只表示当这分式的分母逼近于0时，分式的数值大到无穷。因此∞不是一个数。

（5） 这个数集是连续的，就是说任何实数均可用直线上的点P表示（如图2.4—1），反之亦然。实数与数轴上的点可以建立一一对应关系。

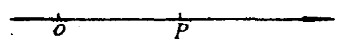

图 2.4—1

2.5　实数的基本运算

（1） 加

（A） 交换律

设a和b是实数，则

$$a+b=b+a.$$

（B） 结合律

设a，b和c为实数，则

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

（2） 减

（A） 负数

设a为实数，则只存在一个x可使$x+a=0$，记为$x=-a$，这个x就是a的**相反数**.正数的相反数为负数，负数的相反数为正数.

（B） 实数的减法是加法的逆运算

设a和b是实数，则

$$a-b=a+(-b).$$

（C） 实数的减法不遵从结合律

设a，b和c是实数，则

$$(a-b)-c\neq a-(b-c).$$

（3） 乘与除

（A） 交换律

乘的运算遵从交换律，设a，b为实数，则

$$a\times b=b\times a.$$

除的运算不遵从交换律，设a，b为非零实数，则

$$a\div b\neq b\div a.$$

（B） 单位数的存在

只有一个非0实数u的存在可使$ua=a$，这个u是整数1，也叫**单位数**。

只有一个非0的实数u的存在可使$a/u=a$，这个u是整数1.

（C） 结合律

设a，b和c为实数，则

$$(ab)c=a(bc).$$

（D） 倒数

对于一个非零的实数a，只有一个实数x可使$ax=1$，即$x=\frac{1}{a}$，称x为a的**倒数**. 因$y=\frac{b}{a}=b\times\frac{1}{a}$，故利用倒数可把除法改为乘法运算.

（E） 分配律

设a，b和c为实数，则

$$a(b+c)=ab+ac.$$

（4） 乘幂

设a为正实数，则