面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

# 微积分

王迺信　主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

## 内 容 提 要

本书是教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果，是面向21世纪课程教材和教育部农林数学学科“九五”规划教材.

本书内容为一元微积分、微分方程、二元微积分及级数，教学内容深广度与现行的《高等数学课程教学基本要求》大体相当，按照渗透现代数学思想，加强应用能力的培养要求，对一些传统内容进行了重新处理，更加注意对基本概念、基本定理和重要公式的几何意义和实际背景的介绍，增加了数学在农林科学中的应用范例，书后有习题答案. 本书叙述详细,例题较多，便于在教学中使用.

本书可作为高等农林院校各专业的教科书,也可供其他专业选用和社会读者阅读.

**图书在版编目（CIP）数据**

微积分 / 王迺信主编. 一北京：高等教育出版社,
2000 (2001 重印)

ISBN 7-04-008991-2

Ⅰ.微… Ⅱ.王… Ⅲ.微积分 Ⅳ.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第62093号

微积分

王迺信 主编

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | | |
| 社　址 | 北京市东城区沙滩后街55号 | 邮政编码 | 100009 |
| 电　话 | 010-64054588 | 传　真 | 010-64014048 |
| 网　址 | http: //www.hep.edu.cn | | |
| 经　销 | 新华书店北京发行所 | | |
| 印　刷 | 北京民族印刷厂 | | |
| 开　本 | 787×960 1/16 | 版　次 | 2000年8月第1版 |
| 印　张 | 23 | 印　次 | 2001年7月第2次印刷 |
| 字　数 | 420 000 | 定　价 | 19.50元 |

# 序

教育部“面向 21 世纪高等农林院校本科数学（含生物统计）系列课程教学内容和课程体系改革的研究与实践”课题（04-6 项目），自 1996 年启动，经过近四年的深入研究，由原西北农业大学、原西北林学院、宁夏农学院、塔里木农垦大学、河北农业大学和东北农业大学联袂，完成了《微积分》、《线性代数》、《概率论与应用数理统计》、《试验设计与分析》和《数学实验》等五本系列教材的编写工作.

20 世纪数学的迅猛发展，确立了它在整个科学技术中的基础地位. 由于数学与物理学、化学、生态学、经济学等的融合，涌现出一系列的交叉学科，表明数学已向人类的一切知识领域渗透. 面向 21 世纪，高等农林院校本科数学的教学内容和课程体系如何符合今日“数学应用”的时代要求呢？中国科学院院士吴文俊教授认为“应该训练学生的逻辑推理能力，但也应适可而止. 只会推理，缺乏数学直觉，是不会有创造性的.”因此，在我们编写本系列教材的过程中，遵循了三条原则：首先，审慎地考虑和保留传统数学中最必要的内容，适度增添一些最必要的新内容；其次，推理适可而止，对于学生望而生畏的较为复杂的证明，尽量给以思想性的说明，使学生在应用中“知其然”，并在一定程度上“知其所以然”；第三，力求通过数学在农林科学中应用的范例，启迪学生把数学创造性地用于农林科学.

本系列教材是多所农林院校的数学工作者和农林科学工作者长期合作研究的结果，总主编由课题主持人袁志发教授担任，编委有袁志发教授、王迺信教授、周静芋教授、孟德顺教授、刘光祖教授、卢恩双副教授和宋世德副教授.

限于编者的水平，疏漏和错误在所难免，望同行专家和读者不吝赐教.

袁志发

2000 年 3 月

# 前　　言

本教材追求下述目标:

1．追求简明实用

针对教学的需要,本教材尽量压缩极限的叙述,单刀直入地从物理世界所提供的模型和原理中导出微积分的基本概念、法则和公式，使表达更简明，把学生从繁难的概念推演和运算技巧中解放出来，引导学生理解概念的内涵和背景，培养学生用微积分的思想和方法分析、解决实际问题的能力．

2．追求适当的严密性

作为教材，只可能在一定程度上具有严密性，本教材选择了一些不加论证而予以接受的先验的结论作为论证的基础；在对概念作直观描述时，尽量采用作为充分必要条件的性质进行描述；在对理论和应用中起关键作用的内容进行论证时，则采用比较准确的语言表述，诸如中值定理、微元法等．

3．追求微积分的对称美

对于应用中最常见的连续函数或至多有有限个不连续点的函数，微分和积分既是互逆的概念，也是互逆的运算，本教材在定义微分概念和积分概念时，在引入微分法和积分法时，在论证微分中值定理和积分中值定理时，充分揭示其互逆的本质，简化概念间的联系，努力体现微积分的固有的对称美．

古人云：取法乎上，仅得乎中．由于水平所限，错漏在所难免，敬请批评指正，以便修改．

本教材由西北农林科技大学、宁夏农学院、塔里木农垦大学合作编写．主编为王迺信，副主编为卢恩双、边宽江、王经民、许瑞峰、刘建忠、杨淑华，参加编写的还有史美英、刘瀛洲、刘亚相、刘建军、吴养会、路新玲、张学东、周芳，全部插图由郑瑶绘制．

西北工业大学叶正麟教授审阅了书稿，提出了许多中肯的修改意见，特此表示衷心感谢．

编　者

2000 年 3 月

# 目　录

# 第一章　微积分的基本概念

## 第一节　引　　言

数学是研究现实世界中的空间形式和数量关系的科学.

17 世纪以前，数学的研究对象主要是常量问题，研究方法也基本上是孤立的，静止的.

到了 17 世纪，社会生产力的发展和科学技术的进步，给整个自然科学提出了更高的要求，尤其是自然科学所涉及的数学问题层出不穷，数学面临着崭新的课题和前所未有的挑战——必须研究变量问题，因为各种形式的物质运动都必须用变量来描述；必须创造新方法，创立新学科，因为原有数学学科中的数学方法都不能提供研究变量的普遍适用的方法. 于是，在 17 世纪，几乎所有最出色的科学家都曾直接地或间接地参与了创造新方法，创立新学科的工作，Descartes（1596—1650）引入了坐标方法，把空间形式的研究与数量关系的研究结合起来，从而把变量正式引进数学，推动了数学的大变革. 还有一大群生气勃勃的科学家，从继续研究物理学、天文学以及几何学等入手，在创造新方法，创立新学科方面做出了重要贡献. 但是，必须指出，在创造新方法，创立新学科方面做出最大贡献的是 Newton（1642—1727）和 Leibniz（1646—1716）. 他们各自独立地对变量问题进行深入研究，并且各自独立地提出了几乎相同的新方法，并且在 17 世纪末完成了他们建立新学科的著作，宣告了新学科——**微积分**的诞生.

微积分区别于它以前的数学的主要标志是：它研究的不是常量问题，而是变量问题；它研究的方法不是孤立的、静止的方法，而是从变量与变量的互相依赖中去研究，是用变化的思想和方法去研究.

微积分的诞生在数学史和整个自然科学史上都具有划时代的意义. 微积分诞生之初，论述上尚缺乏严密性，但由于它本质上的深刻性和正确性，微积分一诞生就显示出极强的生命力和应用前景. 它很快得到了充实和发展，并且获得了广泛应用. 微积分的广泛应用使它开始渗透到自然科学的各个领域. 数学家为微积分注入严密性的努力，又促进许多学科获得了迅速发展. 总之，微积分的诞生，以及它的发展、应用和完善，影响了整个自然科学，从而促进了社

会生产力的发展和科学技术的发展.

## 一、微积分研究的主要对象

在观察和描述自然现象或技术过程时，我们将遇到两类不同性质的量——常量和变量. 常量是指在某一个过程中不变的量；变量是指在某一个过程中变化的量. 例如，在密闭的容器里装有某种气体，在加热的过程中，气体的体积是常量，气体的分子数是常量，但气体的温度是变量，气体的压强是变量.

自然现象和技术过程中的变量之间总是互相依赖的，不是孤立的. 例如，对密闭容器里的气体加热时，气体的压强是随气体温度的变化而变化的. 微积分通过变量研究这些现象和过程，主要是研究这些互相依赖的变量的变化规律.

变量之间的互相依赖关系，通常被表示为函数关系. 这样函数就成为微积分研究的主要对象.

函数表示变量之间的关系非常广泛，这使得函数的类型是举不胜举的，这也使得微积分的论述必须具有严密性，以便使结论适合于各种类型的函数而无一例外.

本书从实际应用出发，将把注意力主要集中在一类简单而重要的函数类型——初等函数. 我们将会看到，在论述初等函数的微积分时，论述将获得简化.

## 二、微积分研究的主要问题

17 世纪，数学面临着大量的变量问题. 当时的数学家已逐渐认识到，这些表现形式上差异很大的变量问题，可以归并为两大类问题，这就是微积分研究的主要问题.

第一大类问题是函数的变化率. 例如，运动的速度，曲线的切线斜率，物质分布的密度等. 这一大类问题的研究产生了微分学.

第二大类问题是函数的积累量. 例如，平面图形的面积，立体图形的体积，变力所作的功等. 这一大类问题的研究产生了积分学.

需要指出的是，从古希腊的 Archimedes（前 287—前 212）到我国古代的刘徽（3 世纪），祖冲之（429—500），一直到 Kepler（1571—1630），Galileo（1564—1642），许多科学家都在解决某一类问题方面做出了重要贡献. 但是，Newton 和 Leibniz 在前人工作的基础上，完整地解决了这两大类问题，并且高瞻远瞩地指出了这两大类问题的内在联系.

## 三、微积分研究的主要思想方法

微积分创立之初，其思想方法是不够明确的. Newton 和 Leibniz 在其著作中常常用“直觉”和“本能”代替严密的推理，未明确揭示其思想方法. 数学

家为此求索了两个世纪，终于明确地揭示出微积分的主要思想方法是极限思想和极限方法.

我们用两个简单的例子来说明微积分是怎样分析、处理、解决问题的.

**例 1** 速度问题

速度是刻画运动快慢的量. 在匀速直线运动中，速度定义为位移与所用时间之比. 但在变速直线运动中，运动的快慢是变化的，必须引入瞬时速度，才能刻画每一时刻的运动快慢. 那么，什么是瞬时速度呢？怎样计算瞬时速度呢？为了解答这个问题，我们先来分析自由落体运动的瞬时速度问题：

设物体作自由落体运动，此时位移 $h$ 作为时间 $t$ 的函数，其关系式为

$$h=\frac{1}{2}gt^2.$$

求物体在时刻 $t$ 的瞬时速度.

为了求时刻 $t$ 的瞬时速度，我们在时刻 $t$ 的附近取一个很小的时间间隔 $\Delta t$，从时刻 $t$ 到时刻 $(t+\Delta t)$ 这段时间的平均速度，可以作为时刻 $t$ 的瞬时速度的近似值：

$$\bar{v}=\frac{\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt^2}{\Delta t}=gt+\frac{1}{2}g\Delta t.$$

而且，时间间隔 $\Delta t$ 愈小，愈能用平均速度 $\bar{v}$ 表示时刻 $t$ 的瞬时速度. 显然，当时间间隔 $\Delta t$ 不为零而趋向于零时，平均速度 $\bar{v}$ 趋向于 $gt$. 这就是说，在自由落体运动中，时刻 $t$ 的瞬时速度应为

$$v=gt.$$

以上讨论虽然只是针对自由落体运动求瞬时速度的问题，但这种极限的思想方法是适用于第一大类的所有问题的.

**例 2** 面积问题

平面图形的面积是刻画平面图形大小的量. 矩形的面积定义为底乘以高. 由此还可以导出所有直线形的求面积方法. 对于一般平面图形，即曲线形的面积，情形就复杂得多. 到底怎样定义面积？怎样求面积？为了解答这个问题，我们先来分析如下曲线形的面积问题：

已知抛物线 $y=x^2$，直线 $x=1$ 和直线 $y=0$ 围成一个平面图形，求该平面图形的面积（图 1-1）.

虽然我们一开始尚不能准确地写出该平面图形面积 $S$ 的表达式，但却可以凭着对面积的直觉对该面积作出估计.

为了便于叙述，称该平面图形为曲线 $y=x^2$ 下，区间[0，1]上的平面图形，将区间[0，1]分为 $n$ 等份，其分点为

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1,$$

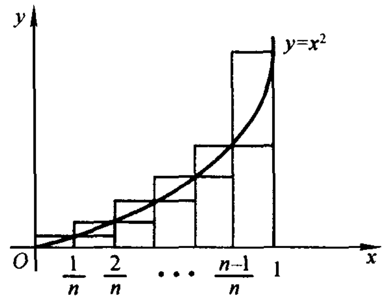

图 1-1

此时，平面图形也被分为 $n$ 部分，它们的面积分别为 $S_1, S_2, \cdots, S_n$，其中 $S_i$ 表示曲线 $y=x^2$ 下，区间 $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ 上的部分平面图形的面积. 显然，该面积 $S_i$ 介于底为 $\frac{1}{n}$，高为 $\left(\frac{i-1}{n}\right)^2$ 的矩形面积和底为 $\frac{1}{n}$，高为 $\left(\frac{i}{n}\right)^2$ 的矩形面积之间：

$$\frac{1}{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^2 < S_i < \frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2.$$

此即

$$\frac{1}{n^3}(i-1)^2 < S_i < \frac{1}{n^3}i^2.$$

注意到所求平面图形的面积 $S$ 为

$$S = S_1 + S_2 + \cdots + S_n,$$

故知

$$\frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2) < S < \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2).$$

化简得

$$\frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3} < S < \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}.$$

根据熟知的数列极限的结果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3},$$

该平面图形的面积 $S$ 既不可能大于 $\frac{1}{3}$，也不可能小于 $\frac{1}{3}$，该面积必然是这同一个极限值：

$$S = \frac{1}{3}.$$

同样地，解决这一问题的极限的思想方法是适用第二大类的所有问题的.

# 第二节　两个有启发性的例

我们在上一节曾讨论了速度问题和面积问题. 我们发现，速度和面积概念的精确描述离不开极限；速度和面积问题的分析与解决也离不开极限. 正如我们所指出的，极限的思想方法对于描述、分析和解决各类微积分问题是普遍适用的. 但是，这并不是说，用微积分讨论问题的每一步都将离不开极限，也并不是说，在微积分中我们要经常进行烦琐的极限运算. 不是这样的. 我们的意见是：我们将把极限作为微积分的一种必须的思想方法，要求读者理解和掌握；同时，我们还必须指出，许多极限过程在现实世界和观念世界中是自然而然地、在不知不觉中完成的，因而人类的认识常常超越极限的思想方法，要求读者也实现这种超越. 一旦你超越了极限的思想方法，你可能就找到了一种比极限更简单、更直观、更实用的描述问题、分析问题和解决问题的方法. 其实，我们承认一些运动的瞬时速度的存在性，承认一些平面图形的面积的存在性，就超越了这些概念的极限描述；我们毫无顾忌地运用速度和面积的一些显而易见的性质，就超越了这些性质的极限分析，这些都是我们超越了极限的思想方法的例证. 对于非数学专业的读者而言，超越极限的思想方法显得尤为重要.

以下所举的两个例子，就是超越极限思想方法的有启发性的例.

**例 1**　匀速圆周运动的分解

在平面直角坐标系下，设质点绕坐标原点，以逆时针方向作匀速圆周运动，起始点为（1，0），角速度为 1 rad/s（弧度/秒）. 求 $x$ 方向和 $y$ 方向上的分运动的瞬时速度.

从运动学知，上述匀速圆周运动可以分解为 $x$ 方向和 $y$ 方向上两个独立的分运动. 匀速圆周运动 $t$ 时刻的位移可以分解为 $x$ 方向上的位移 $x$ 和 $y$ 方向上的位移 $y$ 两个分位移：

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$$

它们描述了 $x$ 方向和 $y$ 方向上两个独立的分运动. 匀速圆周运动的速度矢量方向为切向，大小为 1，则速度可以分解为 $x$ 方向上的速度 $v_x$ 和 $y$ 方向上的速度 $v_y$ 两个分速度（图 1-2）：

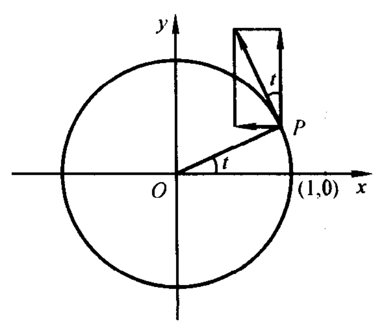

图 1-2

$$\begin{cases} v_x = -\sin t, \\ v_y = \cos t. \end{cases}$$

这就是说，如果在 $x$ 方向上的运动中，位移 $x$ 作为时间 $t$ 的函数为

$$x = \cos t ,$$

则在时刻 $t$ 时的瞬时速度为

$$v_x = -\sin t .$$

如果在 $y$ 方向上的运动中，位移 $y$ 作为时间 $t$ 的函数为

$$y = \sin t ,$$

则在时刻 $t$ 时的瞬时速度为

$$v_y = \cos t.$$

我们知道，瞬时速度概念的精确描述离不开极限，但在本例中，极限过程是自然而然地、在不知不觉中完成的. 通过本例，我们实际上已经获得一些重要函数的微积分公式.

**例 2**　反比曲线下平面图形的面积

由反比曲线 $y = \dfrac{1}{x}$，直线 $y = 0$ 以及直线 $x = 1$ 和 $x = x_0$（>1）围成一个平面图形，求该平面图形的面积.

为了便于叙述，称该平面图形为曲线 $y = \dfrac{1}{x}$ 下，区间 $[1,\ x_0]$ 上的平面图形.

历史上，人们很早就对平面图形的面积进行过深入的研究，人们很早就超越了极限的思想方法而从直觉上引入了面积所具备的若干性质：面积具有惟一性；面积具有可分性；面积具有可估计性. 这些性质恰好揭示了面积的本质. 在上一节的例 2 中，我们正是利用这些性质来求面积的.

我国南北朝时的伟大数学家祖冲之父子在研究立体体积时曾指出："幂势既同，则积不容异. "是说两个立体图形，如果等高处截面积相等，则体积相等. 这句话在我国数学史上被誉称为"**祖氏原理**". 祖冲之父子就是利用这一原理求出球和其他一些立体体积的. 顺便指出，在西方，第一个提出这一原理的人是千年以后的 Cavalieri（1598—1647）. 祖氏原理也是超越极限思想方法而提出来的. 显然，祖氏原理可以进行各种类推，例如，两个立体图形，如果等高处截面积之比为常数，则体积之比也为该常数；两个平面图形，如果等高处截线长相等，则面积相等；两个平面图形，如果沿任一固定方向伸缩一个倍数，则面积伸缩同样的倍数.

现在回到例 2 中来，显然曲线 $y=\frac{1}{x}$ 下，区间 $[1, x_0]$ 上的平面图形的面积为 $x_0$ 的函数. 记为 $F(x_0)$.

为了表述上的统一，我们规定 $F(1)=0$. 又规定当 $0<x_0<1$ 时，用 $F(x_0)$ 表示曲线 $y=\frac{1}{x}$ 下，区间 $[x_0, 1]$ 上的平面图形面积的负值. 这样，$F(x)$ 就是定义域为 $x>0$ 的函数.

显然存在着常数 e，使

$$F(\mathrm{e})=1.$$

分析计算表明，e 是如下形式的一个无理数

$$\mathrm{e}=2.71828\cdots$$

这就是自然对数的底.

以下讨论 $F(x_1x_2)$ 与 $F(x_1)$ 和 $F(x_2)$ 的关系. 先假定 $x_1>1$，$x_2>1$，此时，$F(x_1x_2)$ 表示曲线 $y=\frac{1}{x}$ 下，区间 $[1, x_1x_2]$ 上的平面图形的面积，它又等于曲线 $y=\frac{1}{x}$ 下，区间 $[1, x_1]$ 上的平面图形的面积加上曲线 $y=\frac{1}{x}$ 下，区间 $[x_1, x_1x_2]$ 上的平面图形的面积，前者显然为 $F(x_1)$，而后者又恰为 $F(x_2)$，这是因为曲线 $y=\frac{1}{x}$ 下，区间 $[x_1, x_1x_2]$ 上的平面图形可以视为曲线 $y=\frac{1}{x}$ 下，区间 $[1, x_2]$ 上的平面图形沿 $x$ 方向伸缩，其伸缩率为 $x_1$，沿 $y$ 方向伸缩，其伸缩率为 $\frac{1}{x_1}$ 所生成（图 1-3）. 这就是说

$$F(x_1x_2)=F(x_1)+F(x_2).$$

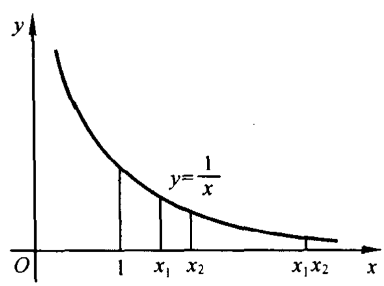

图 1-3

注意到 $F(1)=0$，又注意到当 $0<x_0<1$ 时，曲线 $y=\frac{1}{x}$ 下，区间 $[x_0, 1]$ 上的平面图形的面积，等于曲线 $y=\frac{1}{x}$ 下，区间 $\left[1, \frac{1}{x_0}\right]$ 上平面图形的面积，这是因为前者是后者沿 $x$ 方向伸缩，其伸缩率为 $x_0$，沿 $y$ 方向伸缩，其伸缩率为 $\frac{1}{x_0}$ 所生成，此即 $F(x_0)=-F\left(\frac{1}{x_0}\right)$. 因而，对于任意的 $x_1>0$，$x_2>0$，恒有

$$F(x_1x_2)=F(x_1)+F(x_2).$$

作为面积概念推广而又满足如上关系的函数，仅有对数函数. 由于 $F(\mathrm{e})=1$，

故知 $F(x)$ 即为自然对数函数：

$$F(x) = \log_e x = \ln x .$$

通过本例，我们实际上又获得了一些重要函数的微积分公式.

## 第三节　函　　数

### 一、函数的概念

**定义**　在某个变化过程中有两个变量，$x$ 和 $y$，如果存在一种法则，使得对于 $x$ 取值集合 $D$ 内的每一个值，都有惟一确定的 $y$ 值和它对应，则变量 $y$ 称为变量 $x$ 的**函数**，记为

$$y = f(x), \quad x \in D .$$

$x$ 称为**自变量**，$y$ 称为**因变量**，自变量 $x$ 取值的集合 $D$ 称为函数的**定义域**，如果 $D$ 由区间构成则称为函数的**定义区间**，与 $x$ 的取值对应的 $y$ 的取值称为**函数值**，函数值的集合称为函数的**值域**.

这里的符号 $f(\quad)$ 是构成该函数关系的对应法则的抽象描述. 函数所刻画的就是由对应法则所形成的自变量与因变量之间的关系.

在讨论微积分问题时，建立恰当的函数关系是至关重要的. 所谓建立函数关系，首先是建立自变量与因变量之间的对应法则，这种对应法则通常通过解析式表达，也可以用图象表达或用数表表达；其次是指出函数的定义域，定义域通常由所讨论问题的性质决定，当不考虑函数的实际背景时，定义域就是使函数解析表达式有意义的点的集合.

设变量 $y$ 为变量 $u$ 的函数，定义域为 $D_1$：

$$y = f(u), \quad u \in D_1 ,$$

变量 $u$ 又为变量 $x$ 的函数，定义域为 $D_2$，值域为 $W_2$，其中 $W_2 \subset D_1$：

$$u = g(x), \qquad x \in D_2 ,$$

则变量 $y$ 也为变量 $x$ 的函数

$$y = f(g(x)), \qquad x \in D_2 .$$

称为函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 的**复合函数**.

简单函数的复合可以生成较复杂的函数；反之，有些较复杂的函数可以分解为简单函数的复合.

这里的符号 $g(\ )$ 是描述区别于 $f(\quad)$ 的另一种对应法则.

约定在 $f(\quad)$ 和 $g(\quad)$ 中填写自变量时，代表抽象的一般的函数关系，填写自变量的值时，代表具体的函数值.

## 二、函数举例

**例 1**　在自由落体运动中，位移 $h$ 是时间 $t$ 的函数：

$$h=f(t)=\frac{1}{2}gt^2,\qquad t\in[0,+\infty).$$

**例 2**　在半径为 $R$ 的圆内作一内接矩形，则矩形面积 $S$ 是矩形高 $x$ 的函数：

$$S=f(x)=x\sqrt{4R^2-x^2},\qquad x\in(0,2R).$$

**例 3**　在单摆振动中，振动周期 $T$ 是单摆长 $l$ 的函数：

$$T=f(l)=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},\qquad l\in(0,+\infty).$$

**例 4**　建立下列问题中的函数关系：设圆锥的母线长为常数 $l$，求圆锥体的最大体积.

该问题没有指明哪个变量是哪个变量的函数，因此，需要我们具体分析，找出其中的函数关系，使问题明确化. 该问题是说，在圆锥母线长不变的条件下，圆锥体的体积仍然会变化，不能确定，因而才有求最大体积的问题. 因此，必须首先指明，在圆锥母线长不变时，圆锥体的体积是怎样变化的. 显然，在圆锥母线长不变时，圆锥体的体积是随着圆锥体底面半径的变化而变化的，也可以说，圆锥体的体积是随着圆锥体高的变化而变化的. 由此可知，圆锥体体积是底面半径的函数，也可以说，圆锥体体积是圆锥体高的函数.

以后者为例，设圆锥体高为 $h$，则底面半径为 $\sqrt{l^2-h^2}$，底面面积为 $\pi(l^2-h^2)$. 此时，圆锥体体积 $V$ 是圆锥体高 $h$ 的函数：

$$V=f(h)=\frac{1}{3}\pi h(l^2-h^2),\qquad h\in(0,l).$$

对于解决这个问题而言，建立如上函数关系是至关重要的，因为有了这个函数，问题就明确化为：对于 $h\in(0,l)$，求当 $h$ 取何值时，$V$ 的值最大，最大值为多大. 以后将会看到，明确化后，问题的求解将是非常简单的.

**例 5**　建立下列问题中的函数关系：将椅子四条腿的末端视为点，假定四条

腿的末端点恰好构成正方形的顶点. 讨论在一个由曲面形成的不平的地面上，能否把椅子放稳，即能否使四条腿的末端点同时着地.

该问题初看起来不像是函数问题，但仔细分析，尤其是动态地分析后就发现了函数关系. 我们将会看到，用函数关系描述该问题，将使该问题明确化，变得异常简单. 这充分说明了用函数关系描述问题的重要性.

用 $A$、$B$、$C$、$D$ 表示椅子四条腿的末端点. 将椅子任意放置于地面上，则或者四点全着地，此时，椅子已经放稳，无需讨论；或者只有三点着地，一点悬空，例如 $A$、$B$、$C$ 点着地，$D$ 点悬空. 设 $D$ 点与地面的垂直距离为正数 $h$. 此时，椅子未放稳. 为了寻找能放稳的方位，将椅子以中心为轴逆时针方向旋转 $\pi/2$，并要求在旋转中始终保持 $A$、$B$ 点必须着地，$C$、$D$ 点至多有一点悬空. 最后，$A$、$B$、$C$、$D$ 点将旋转到原来 $B$、$C$、$D$、$A$ 点所在位置，使 $D$、$A$、$B$ 点着地，$C$ 点悬空，$C$ 点与地面的垂直距离为正数 $h$. 请读者注意这个从 $D$ 点悬空旋转到 $C$ 点悬空的变化过程，尤其是 $D$ 点悬空与 $C$ 点悬空的临界点，从中一定会悟到该问题的求解途径和答案（图 1-4）.

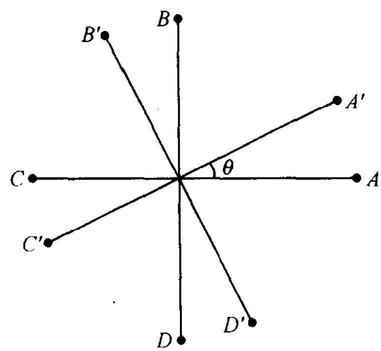


图 1-4

在旋转过程中，构造 $D$ 点与地面的垂直距离与 $C$ 点与地面的垂直距离之差 $y$ 作为旋转角 $\theta$ 的函数：

$$y=f(\theta),\ \ \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

尽管我们不能确知 $f(\theta)$ 的对应关系或表达式，但是，我们知道

$$f(0)=h,\ \ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-h\,,$$

问题仍然是被明确化了，并且问题已经变得异常简单：对于 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，是否存在 $\theta_0$，使 $f(\theta_0)=0$. 在一定的假设条件下，该问题很容易求解并给出答案.

## 三、初等函数

### 1. 基本初等函数

下列五类函数称为基本初等函数：