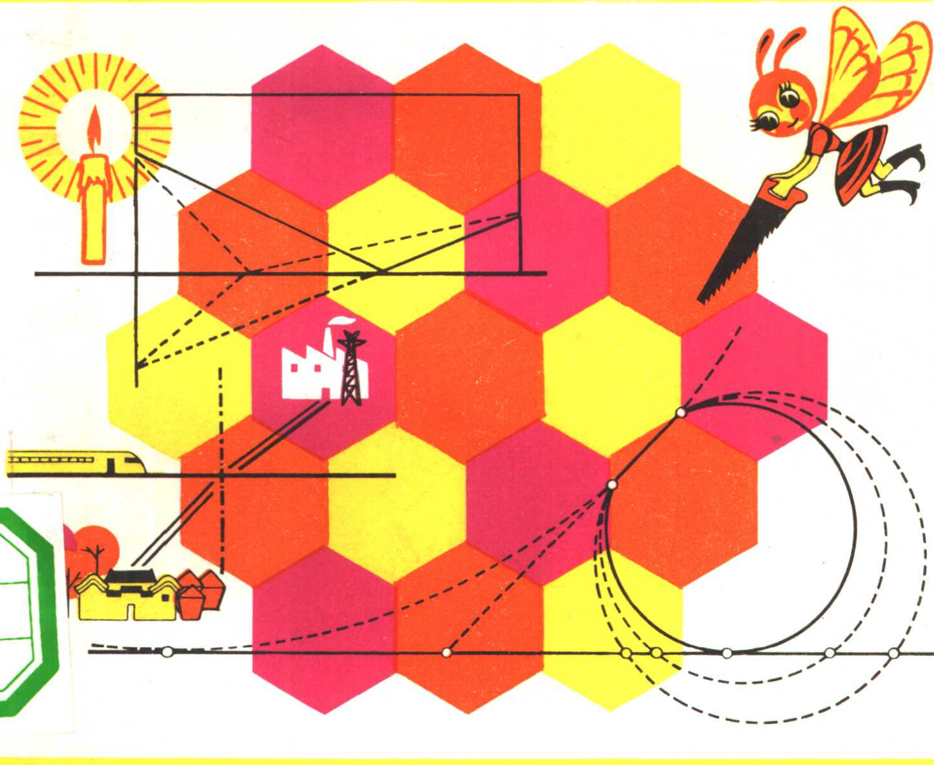
SHAONIAN BAIKE CONGSHU

节约的数学

马　明

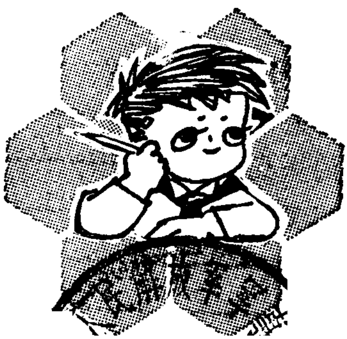


节约的数学

马明

封面设计：陈焕然

插　　图：王存德



中国少年儿童出版社

内 容 提 要

怎样节约时间？怎样节约材料？怎样节约动力？都是日常生活和生产中经常遇到的实际问题，也是极其有趣的数学问题——极大和极小问题。本书介绍了一些非常巧妙的思路和方法，帮助你去研究极大和极小问题。

节约的数学

马 明

*

中国少年儿童出版社出版

中国青年出版社印刷厂印刷

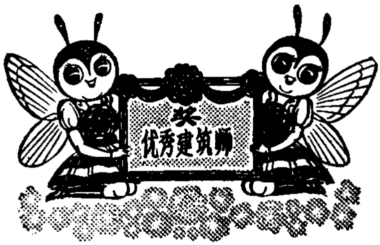
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

787×1092 1/32 2.5印张 25千字

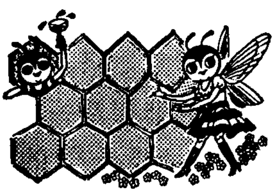
1980年2月北京第1版 1980年2月北京第1次印刷

印数1—250,000册 定价0.19元



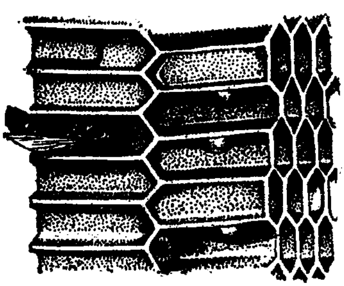
目　次

一　华罗庚谈蜂房结构



一九六三年十月，秋高气爽，华罗庚教授来到南京师院附中了解教学情况。借此机会，学校师生请这位我国著名的数学家作了一次报告。报告是从蜂房的结构开始的：

如果把蜜蜂放大为人体的大小，蜂箱就成为一个20公顷的密集市镇。

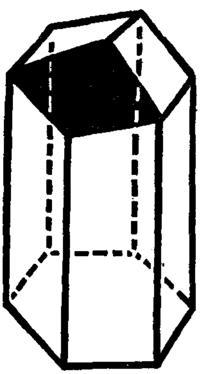


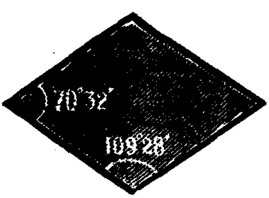
一道微弱的光线从这个市镇的一边射来，人们可以看到一排排五十层的建筑物。在每一排建筑物上，整整齐齐地排列着薄墙围成的成

千上万个正六角形的蜂房。

十八世纪初，法国学者马拉尔琪测量了蜂房，得到了一个有趣的发现：每个正六角形的蜂房的底，都是由三个全等的菱形组成的，菱形的钝角都等于109°28′，锐角都等于70°32′。

难道这是偶然的现象吗？法国物理学家列奥缪拉由此得到一个启示：蜂房筑成这样的形状，是不是最节省材料呢？

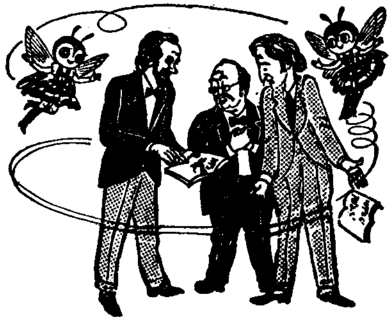




列奥缪拉去请教巴黎科学院院士、瑞士数学家克尼格。克尼格计算的结果使人非常震惊。他根据理论计算，要消耗最少的材料，菱形的角度应该是109°26′和70°34′，与蜂房仅相差2分。

后来，苏格兰数学家马克劳林又重新计算了一次，得出的结果竟和蜂房完全一样。后来发现，原来是克尼格计算用的对数表印错了！

蜜蜂在人类有史以前已经解决的问题，竟要十八世纪的数学家，用高等数学才能解决！



“小小蜜蜂”,“科学院院士”,“高等数学”,“对数表印错了”,真是引人入胜的描述,启发人们思考的描述!

达尔文说得好:蜂房的精巧构造十分符合需要。如果一个人看到蜂房而不倍加赞扬,那他一定是个糊涂虫。

自然的奇迹如此,人类认识问题的过程又如此,怎能不引人入胜哩!

这就是一个极值问题,是十八世纪的数学家用高等数学已经解决了的问题。今天,二十世纪的中学生懂不懂?大学生懂不懂?大学教授懂不懂?初等数学能不能解决?报告人热情地提出了一系列问题。

最后,报告人更提出一个发人深省的问题:解决困惑的办法是什么?是撤退吗?不能!我们可以找到一千

个撤退的理由——诸如这是已经解决了的问题呀！这不是属于我们研究范围的小问题呀！但是，我们有一个理由不准许撤退——不懂就钻研，哪怕是一个“小”问题。

的确，当时一千多师生，都被华罗庚教授的这种勇于探索真理的精神所深深感动！

为了和读者分享这份乐趣，我就记上这段旧事，作为这本书的开始。

二　富有经验的射手

笔直的公路上聚集着一群射手，射击目标 PQ，$PQ=17$ 米。一声令下，射手们便散开在公路 l 上准备射击。一名富有经验的射手想了一想，再目测出 $QK=64$ 米，于是他宣布：最好的位置是 M 点，$MK=72$ 米。在 M 点上，射中目标的机会最大。

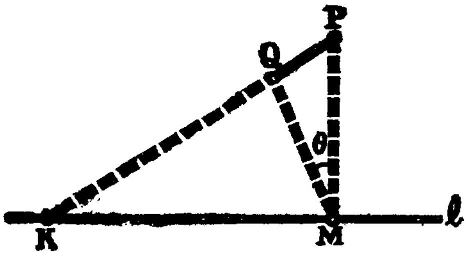
1 "逼"出一个最好位置

所说射中的机会最大，显然是指射击时的张角 θ 最大。

这样，问题可以变为一道几何题：

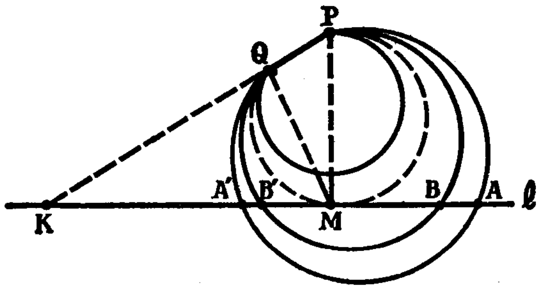
在已知直线 l 的同侧，有 P 和 Q 两点，要求在直线 l 上，找出一点，它对 P 和 Q 两点的张角最大。

问题的解不是一眼能看穿的。不过，可以先让射



手从 l 的极右端逐渐向左移动，不时张望PQ，比较各次的张角。他会发现，开始时张角 θ 很小，随着向左移动，张角 θ 就逐渐增大；当接近K点时，张角 θ 又变小了，到了K点时，张角 $\theta=0$。在这两个极端的情况当中，他相信一定有一个最大的张角 θ。或者说，在他逐渐左移的过程中，一定经过一个最好的位置，在那里获得的张角最大。问题是怎样找到这个最好的位置？

从刚才的分析中，我们得到一个重要的启示：随着射手的左移，张角由小变大，再由大变小，直至零度，在这中间，一定存在一个最好位置——站在这里，环顾左右，各点都不如它好。反过来说，如果M点不是最好位置，那么，在最好位置的另一侧，一定还有一个位置，它与M点的张角同样大小。然后，让这一对有同样大小张角的点逐渐靠拢，最后，就会"逼"出一个最好位置M



点。如图，

$\angle PAQ = \angle PA'Q$，

$\angle PBQ = \angle PB'Q$，

并且$\angle PAQ < \angle PBQ < \angle PMQ$。

2 基 础

刚才，我们曾把注意力集中在直线 l 上，看它的哪些点具有相同的张角。

我们不妨把眼界放大些，让射手走出直线 l，去考察平面上所有的点中，哪些点具有相同的张角？——这是解决问题的基础。

平面几何知识告诉我们：在弦的一边，圆周上的点对这弦所张的角相等。仔细揣摩这张图以后，会立即

想到：射手既要“放眼”平面，又要“立足”直线 l，于是，这个最好位置就是图中的切点 M 了。也就是说，通过 P、Q 两点作一个圆，使它与直线 l 相切，切点 M就是最好位置。

因为 $KM^2 = KP \cdot KQ = (64+17) \cdot 64 = 5184$，

所以 $KM = 72$(米)。

这样，我们也就可以知道，那名富有经验的射手，是怎么决定 M 点的了。

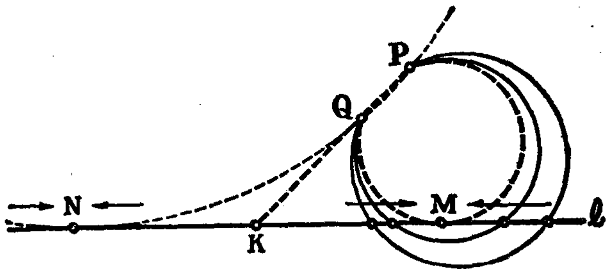
3 慎 微

到此，问题已经解决。

但是细心的读者还会想下去：射手自右向左，得到最好位置 M 后，再继续向左移动，就得到最坏位置 K，这时候 $\theta = 0$，最不利于射击。如果过了 K 点再继续向左走，张角必然地又要逐渐增大，而且越往左走，张角也会由大变小。于是必然会问：会不会还有一个比 M 点更有利的射击点呢？

这个问题提得好，不这样，我们就有“坐井观天”的危险。

从纯粹几何知识来看：通过 P、Q 两点的圆有千千万万。在千千万万个圆中，与直线 l 相切的不止一个，



而是两个。我们设另一个圆与直线 l 相切于N点。

立足 K 点，环顾左右，它是最坏点；

立足 M 点，环顾左右，它是最好点；

立足 N 点，环顾左右，它也是最好点。

这就是说，M 和 N 这两个切点各“霸”一方，必须经过“较量”，才能决定谁是最好的位置。这件事很容易办到，因为过P、Q、M的圆比过P、Q、N的圆小，所以，M点的位置比N点的位置好。

尽管如此，N点不失为一“霸”，因为环顾左右，它的位置最好，与邻近的点相比较，它得到的张角最大。数学上把这种最大张角值叫做“相对极大”或者“局部极大”。同样，M 点所得的最大张角值也应该叫做“相对极大”或者“局部极大”。不过，两个“相对极大”较量之后，发现点M所得的张角最大，于是在数学上把这种最

大值叫做“绝对极大”。

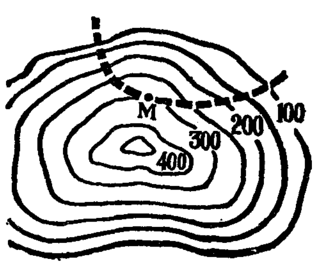
研究“局部极大”是高等数学的任务，我们这本书说的“极大”，指的都是“绝对极大”，也就是人们常说的最大值。

说到“极小”，指的也都是“绝对极小”。“极值”就是极大和极小的统称。

4 等高线法

刚才思路中的重要一点是：暂时离开直线 l，让射手放眼全平面。这样，就得到一系列等角弧，也叫等角线。射手在一条具体的等角线上走，所得张角不变。它很象地形图上的等高线。等高线标着海拔高度，如100、200、300、400米。

你如果沿着一条等高线走，就不会升高，也不会降低。要是限定你在图中的虚线上走，那么，你能达到的



最大高度是多少呢？这和解决“射击”问题的思路一样，最高点一定是虚线与某条等高线相切的地方(M点)，而不是相交的地方。

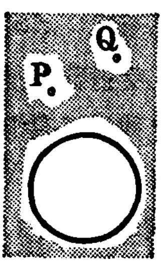
这样看来，等高线——切点——极值点，这是一条重要的思路。我们把这种解题方法，叫做等高线法。

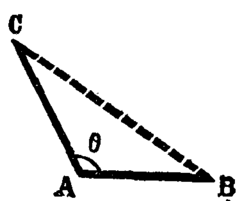
练 习 题

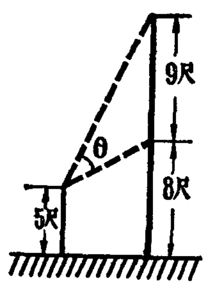
1、在已知圆上找一点，使它对圆外两个已知点 P 和 Q 的张角最大。

2、三角形两边的长度一定，问夹角为多少度的时候，三角形的面积最大？

3、墙上挂着一张 9 尺长的巨幅图画，底边距地面 8 尺，你身高 5 尺，应该站在离墙多远的地方看得最清楚(视角最大)？假设你站在 30° 的坡地上，再解本题。







三　节约时间的光线

“光阴似箭，日月如梭。”这句话一方面说时间消逝很快；另一方面也告诉人们要节约时间。

你可知道，光线是珍惜光阴、节约时间的能手！公元第一世纪，亚历山大时代的科学家海罗就这样指出过。

1　海罗的光线问题

亚历山大时代的希腊人提出过很多极值问题。其中最重要的一个，要算海罗的光线问题：

从P点有光线射出，碰到镜面R处反射到Q点。PR和QR对镜面构成的角必然相等。这种等角性质，就是光的反射性质，它是几何光学理论的萌芽。

从这种等角性质出发，海罗发现，如果在镜面上另取任一点R′，那么，PR′+QR′总比PR+QR大些。就是

说，从定点P出发，途经镜面再到定点Q，以光线所走的路程 P-R-Q 为最短。

海罗得到的这个结论很容易证明：

以镜面 LL′ 为轴，作 P 点的像 P′，也就是作 P 点的对称点 P′。这样，镜面线就是线段 PP′ 的垂直平分线。于是，

$$PR = P'R,\quad PR' = P'R',$$

$$\angle PRL' = \angle P'RL'。$$