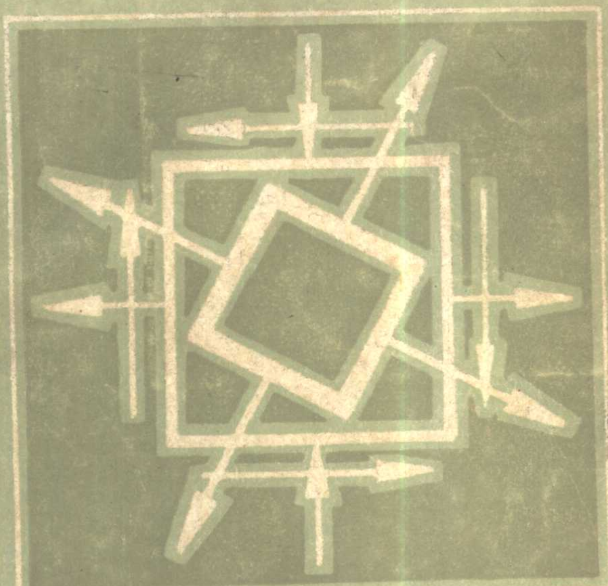
材料力学解题方法

石铁君、朱宝安、晁尚彝编



天津科学技术出版社

材料力学解题方法

石铁君　朱宝安　晁尚彝　编

天津科学技术出版社

材料力学解题方法

石铁君　朱宝安　晁尚彝　编

•

天津科学技术出版社出版

天津市赤峰道124号

天津新华印刷一厂印刷

天津市新华书店发行

•

开本 850×1168毫米 1/32 印张 12.375　字数 311,000

一九八三年十一月第一版

一九八三年十一月第一次印刷

印数：1－38,000

书号：13212·61　定价：2.10元

前　言

本书是为正在学习《材料力学》的全日制大学、电视大学、职工大学、函授大学的学生和自学这一课程的读者编写的，同时也可供有关中等专业学校师生和工程技术人员参考．

本书取材范围基本上以一九八〇年八月高等学校工科力学教材编审委员会材料力学编审小组审订公布的高等工业学校《材料力学大纲（草案）（120学时）》的基本要求为准，同时参考了90学时和少学时的《材料力学大纲》，仅在少数地方稍有出入．

编者根据多年教学经验，在编写中力求突出重点、难点，对于理论及方法的叙述尽量简明扼要，而用较多的篇幅以例题示范．其中包括典型问题及较难的例题，用以说明解题的一般方法，而特别着重指出一般读者在解题中容易出现的错误和应该注意的问题．有的例题则给出几种解法，以便对不同方法进行比较，并使读者熟悉一些解题技巧．同时，各章还附有若干习题供读者练习．

书中的例题和习题，多数是从有关教科书、习题集及教学资料中选取的，有的稍有变动．在此向原编著者致谢．

限于编者水平，本书一定会有不少缺点甚至错误，衷心希望读者批评指正．

编　者

目　录

第一章　拉伸和压缩

第一节　提　　要

一、轴向拉伸或压缩时横截面上的内力和应力

杆件受到轴向拉伸或压缩时，横截面上作用有沿轴线方向的内力，其合力为N，称为轴力．习惯上，根据杆件的变形规定，拉伸时轴力的符号为正，压缩时为负．

轴力N可以用截面法确定，其步骤为：

1．假想沿截面$m—m$把杆件截为两部分，留下其中任一部分作为研究对象，弃去另一部分（图1-1a）．

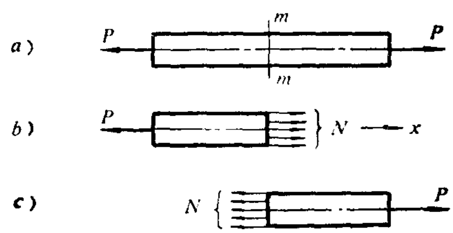


图 1-1

2．用作用于截面上的轴力N代替弃去部分对留下部分的作用．为方便计，通常假定N为拉力（图1-1 b、c）．

3．建立留下部分的平衡条件，确定轴力N．若求得N为正即为拉力，N为负即为压力．如由左段的平衡条件$\Sigma X=0$得

$$N = P \tag{1-1}$$

杆件横截面上的正应力

$$\sigma = \frac{N}{A} \tag{1-2}$$

和轴力N的符号规则一样，拉应力规定为正，压应力为负.

二、轴向拉伸或压缩的强度条件和许用应力

杆件受轴向拉伸或压缩时为保证正常工作所必须满足的强度条件为

$$\sigma=\frac{N}{A}\leqslant[\sigma] \tag{1-3}$$

$[\sigma]$称为材料的许用应力，它等于极限应力除以安全系数.对于塑性材料一般取屈服极限σ_s作为极限应力，即

$$[\sigma]=\frac{\sigma_s}{n_s} \tag{1-4}$$

n_s是按屈服极限规定的安全系数.对于脆性材料，则取强度极限σ_b作为极限应力，所以

$$[\sigma]=\frac{\sigma_b}{n_b} \tag{1-5}$$

式中n_b是按强度极限规定的安全系数.

三、轴向拉伸或压缩时的变形

直杆在轴向拉力作用下，将引起轴向尺寸的伸长和横向尺寸的缩短.反之，在轴向压力作用下，则将引起轴向的缩短和横向的伸长.等截面杆的轴向变形量为

$$\Delta l=\frac{Nl}{EA} \tag{1-6}$$

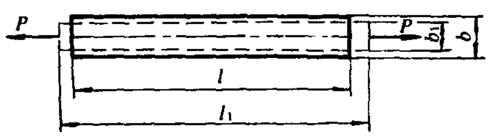


图 1-2

式中N为轴力，l为杆长，A为横截面面积，E为材料的弹性模量.（1-6）式称为虎克定律.若以$\sigma=N/A$和$\varepsilon=\Delta l/l$代入（1-

6）式中，则可得虎克定律的另一表达式

$$\varepsilon=\frac{\sigma}{E} \tag{1-7}$$

式中ε称为轴向线应变.

若以$\varepsilon'=(b_1-b)/b$表示横向线应变，引入横向变形系数$\mu=|\varepsilon'/\varepsilon|$，则横向应变与轴向应变之间有如下关系：

$$\varepsilon'=-\mu\varepsilon \tag{1-8}$$

四、拉伸和压缩的超静定问题

在某些情况下，构件上作用的未知力数目多于静力平衡方程的数目，这时不能单凭静力平衡方程来求出未知力，这种问题称为超静定问题.未知力多于静力平衡方程的数目称为超静定次数.

求解超静定问题，应从以下三个方面考虑：

1.列出静力平衡方程.

2.根据变形协调关系列出变形协调方程.

3.从物理方面，把变形与力之间的关系列出，将这种关系代入变形协调方程，即可得到所需要的补充方程.

4.联立求解静力平衡方程和补充方程，即可求得全部未知力.

第二节 例 题

例题 1-1 求图1-3a）所示杆件各段的轴力并绘轴力图.

【解】 为计算图1-3a）所示杆件各段的轴力，必须了解各段受力情况.例如在AB段，外力仅作用在其A端和B端，因而该段内轴力无变化.同样，BC、CD段内轴力亦无变化.

为求AB段轴力，在AB段内用任意截面1-1将杆假想截开,保留左边部分，在其右端截面上示出轴力N_1，并假定为拉力（图1-3b）.由平衡条件$\Sigma X=0$，

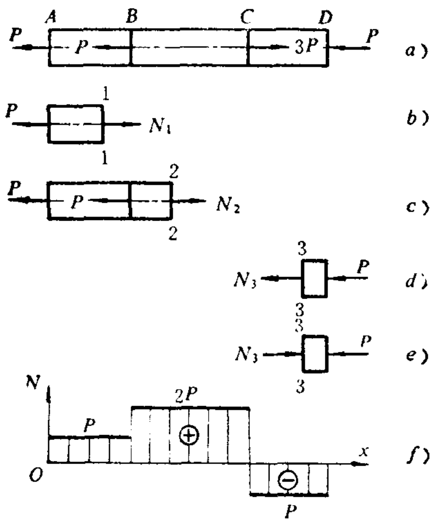


图 1-3

即

$$N_1 - P = 0$$

得

$$N_1 = P$$

正号表示轴力N_1的实际方向与假设方向相同，即轴力N_1为拉力.

同理，在BC段内用任意截面2-2将杆假想截开，保留左边部分，示出轴力N_2，并设为拉力（图1-3c）. 根据平衡条件$\Sigma X = 0$，即

$$N_2 - P - P = 0$$

得
$$N_2 = 2P$$

正号表示轴力N_2为拉力.

在CD段内用任意截面3－3将杆假想截开，保留右边部分，在其左端截面示出轴力N_3，并设为拉力（图1-3d）. 由平衡条件

$\Sigma X=0$，即

$$N_3-P-P+3P=0$$

得 $$N_3=-P$$

负号表示轴力N_3的实际方向与假设方向相反，即轴力N_3为压力。

为绘轴力图，以杆轴方向为x轴，与其垂直方向为N轴，根据求得数值绘轴力沿杆轴的变化图即轴力图，如图1-3f）所示。

【说明】

1.用截面法求轴力时，通常假定N为拉力。这样得到的正负值与轴力正负号的规定（拉为正，压为负）相符，故可直接利用所得结果绘轴力图。

当然，不这样做也可以。例如在求CD段轴力时，假设N_3为压力（图1-3e）。此时，由平衡条件$\Sigma X=0$，即

$$N_3-P=0$$

得 $$N_3=P$$

此正号表示，N_3的实际方向与原假设方向相同，即轴力N_3为压力。但是，在绘轴力图时，仍应根据轴力正负号规定，轴力N_3作为负值绘在轴力图中。

2.当用任意截面1-1、2-2、3-3将杆件假想截开，利用平衡条件所求得截面的内力，是分别表示AB、BC、CD三段内任一截面的内力。切不可把1-1、2-2、3-3作为绘轴力图的分段界限。

3.待利用截面法绘轴力图熟悉后，可利用轴力在数值上等于截面任一边外力代数和的方法直接绘轴力图。

例题 1-2 绘图1-4a）所示杆件的轴力图。已知$q=p/a$。

【解】 在杆件的三段中，分别用截面假想将杆截开，保留上部。在截开面上示出轴力，并假设其为拉力。考虑上部的平衡（图

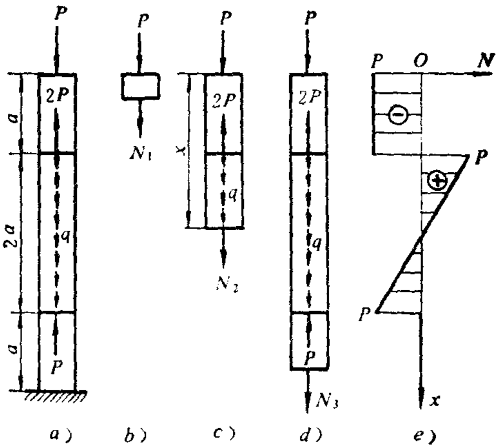


图 1-4

1-4b、c、d）得

$$N_1 = -P$$

$$N_2 = -P + 2P - \int_a^x q dx$$

$$= p - q(x - a)$$

当$x = a$时，$N_2 = p$；当$x = 3a$时，$N_2 = -p$.

$$N_3 = -p + 2p - q \times 2a + p = 0$$

于是，可绘轴力图如图1-4e）所示.

例题 1-3　求图1-5a）所示桁架各杆件的轴力.

【解】　为求各杆件轴力，一般需先求出支座反力. 为此，考

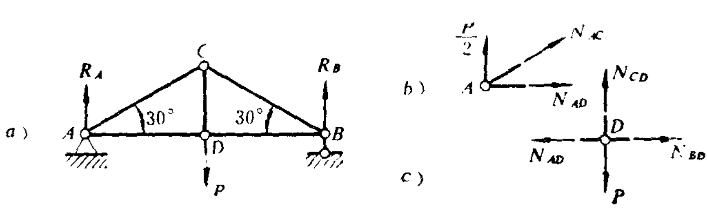


图 1-5

虑桁架整体平衡.根据结构和外载荷的对称性，显然

$$R_A = R_B = \frac{P}{2}$$

围绕桁架节点A，用截面假想地把杆件AC、AD截开，将桁架分成两部分.保留左边部分，并在截开面上示出轴力 N_{AC}、N_{AD}（图1-5b）.

根据留下部分的平衡条件，有

$$\Sigma Y = 0 \qquad \frac{P}{2} + N_{AC}\sin 30° = 0$$

得

$$N_{AC} = -\frac{P}{2\sin 30°} = -P$$

$$\Sigma X = 0 \qquad N_{AD} + N_{AC}\cos 30° = 0$$

得

$$N_{AD} = -N_{AC}\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}P$$

由于对称，所以

$$N_{BC} = N_{AC} = -P, \quad N_{BD} = N_{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}P$$

围绕桁架节点D，假想地截开杆件AD、DC和BD，将桁架分为两部分.考虑截取部分并示出轴力（图1-5c）.

根据截取部分的平衡，显然

$$N_{CD} = P$$

例题 1-4 求图1-6所示铆钉连接板中的最大正应力.已知$P = 150$kN，$b = 120$mm，$\delta = 20$mm，铆钉直径 $d = 26$mm，并假定每个铆钉传递同样大小的力，连接板近似按拉伸计算.

【解】 假想卸掉铆钉，取出连接板中的上板，而用力代替铆钉对连接板的作用.由于假定每个铆钉传递同样大小的力，所以每个铆钉作用于连接板的力为$P/4$（图1-6c）.于是可绘连接板的轴力图（图1-6d）.

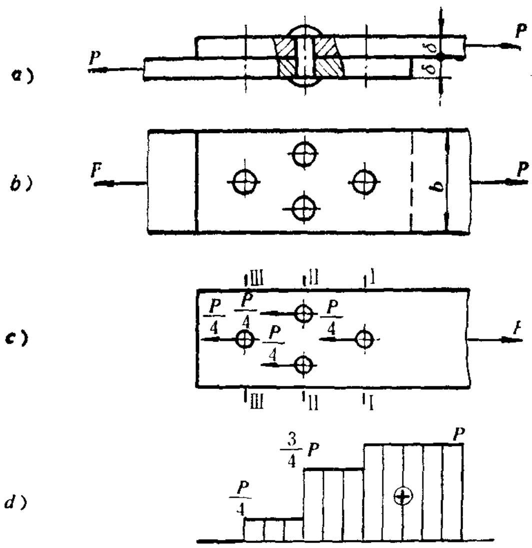


图 1-6

由于Ⅰ-Ⅰ截面轴力为P，截面上有一个铆钉孔；Ⅱ-Ⅱ截面轴力为$3P/4$，但截面上有两个铆钉孔，所以最大正应力可能发生在Ⅰ-Ⅰ或Ⅱ-Ⅱ截面上. Ⅲ-Ⅲ截面的截面积和Ⅰ-Ⅰ截面相同，而轴力较Ⅰ-Ⅰ截面小，可不予考虑.

Ⅰ-Ⅰ截面的正应力为

$$\sigma_{\mathrm{I}}=\frac{N_{\mathrm{I}}}{A_{\mathrm{I}}}=\frac{P}{\delta(b-d)}=\frac{150\times10^{3}}{20\ (120-26)}$$
$$=79.8\mathrm{N/mm^{2}}=79.8\mathrm{MPa}$$

Ⅱ-Ⅱ截面的正应力为

$$\sigma_{\mathrm{II}}=\frac{N_{\mathrm{II}}}{A_{\mathrm{II}}}=\frac{\frac{3}{4}P}{\delta(b-2d)}=\frac{\frac{3}{4}\times150\times10^{3}}{20\ (120-2\times26)}$$
$$=82.7\mathrm{N/mm^{2}}=82.7\mathrm{MPa}$$

所以连接板最大正应力为

$$\sigma_{\max}=\sigma_{\mathrm{II}}=82.7\mathrm{MPa}$$