

高教自考

高等数学(二) 试卷解答

(1992—2000)

主编 王永葆 赵宝泽

主审 刘俊山

7. 实对称矩阵的正交相似定理 任何实对称矩阵 A , 总可找出一个正交矩阵 T 使

$$T^{-1}AT = T^TAT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

其中 $\lambda_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是 A 的 n 个特征值.
8. 实对称矩阵 A 正交相似的正交矩阵 T 的求法

- (1) 求 A 的特征值 λ_i ;
- (2) 求 A 的特征向量 (n 个且线性无关);
- (3) 将属于同一个特征值 (重根) 的特征向量正交化单位化, 得到 n 个单位正交的特征向量 $e_1, e_2, \dots, e_n$;
- (4) 以 $e_i (i=1, 2, \dots, n)$ 为列向量作矩阵 T , 则有



解 (1) 正常工作的事件为 $A_1 A_2 \dots A_n \cup B_1 B_2 \dots B_n$
以系统 (1) 的可靠性为
$$\begin{aligned} P(A_1 A_2 \dots A_n \cup B_1 B_2 \dots B_n) &= P(A_1 A_2 \dots A_n) \\ &\quad + P(B_1 B_2 \dots B_n) - P(A_1 A_2 \dots A_n B_1 B_2 \dots B_n) \\ &= P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n) - P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n) \\ &\quad + P(B_1)P(B_2) \dots P(B_n) - P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n) \\ &\quad \dots P(A_n)P(B_1)P(B_2) \dots P(B_n) \\ &= r^n + r^n - r^{2n} = r^n(2 - r^n) \end{aligned}$$

(2) 正常工作事件为 $(A_1 \cup B_1)(A_2 \cup B_2) \dots (A_n \cup B_n)$, 所以系统 (2) 的可靠性为
$$\begin{aligned} P((A_1 \cup B_1)(A_2 \cup B_2) \dots (A_n \cup B_n)) &= P(A_1 \cup B_1)P(A_2 \cup B_2) \dots P(A_n \cup B_n) \\ &= [P(A_1 \cup B_1)]^n \\ &= [P(A_1) + P(B_1) - P(A_1)P(B_1)]^n \\ &= (2r - r^2)^n = r^n(2 - r)^n \end{aligned}$$

高 教 自 考

高等数学(二)

试卷解答

(1992—2000)

主编 王永葆 赵宝泽

主审 刘俊山

东北大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(二)试卷解答/王永葆,赵宝泽编. —沈阳:东北大学出版社,2000.6

ISBN 7-81054-303-2

I. 高…

I. ①王…②赵…

III. 线性代数—考试 概率统计—考试

IV. O13

内 容 提 要

全书共分两个分册. 第一分册为线性代数, 有行列式、矩阵、线性方程组、线性空间、特征值问题与实二次型等五章; 第二分册为概率统计, 有概率的基本概念、随机变量及其分布、参数估计、假设检验、回归分析与相关分析等五章.

每章的第一部分为内容要点, 第二部分为典型例题.

把1992—2000年上半年全国高等教育自学考试《高等数学(二)》全部试题作为附录. 为了保持试题的完整性, 将18套考试试题按时间顺序编排, 并均作了详细解答.

本书可供参加自学考试的学生使用, 也可作为财经类大专学生的学习参考书.

©东北大学出版社出版

(沈阳市文化路3号巷11号, 邮政编码110006)

东北大学印刷厂印刷

新华书店总店北京发行所发行

开本: 787×1092 1/32 字数: 295千字 印张: 13.125

2000年6月第3版 2000年6月第3次印刷

印数: 10061~14620册

责任编辑: 刘宗玉

责任校对: 米戎

封面设计: 唐敏智

责任出版: 秦力

定价 18.00 元

前 言

自我国推行高等教育自学考试以来,广大考生踊跃参加,高等教育自学考试取得了巨大的成绩.全国各地相继建立了许多自学辅导站,同时成立了私立大学,招收了不少有志的青年学生.现在已有大批考生通过自学考试这一途径学到知识和本领,通过各科考试,得到毕业文凭,走向相应的工作岗位,成为有用的人才,正在为祖国的社会主义四化事业贡献力量.

高等数学(二)这一学科已列为不少专业的必考科目.高等数学(二)的内容包括线性代数和概率统计两门课程,内容广泛,理论较深.线性代数这门课程在经济科学、管理科学中有着广泛的应用.著名的投入—产出模型就是以线性代数为基础的.概率统计这门课程是对随机现象的统计规律进行演绎和归纳的科学,能够解决抽样调查、预测、决策这样一类的实际问题.因此,掌握高等数学(二),学好线性代数和概率统计这两门课程,不仅对后续课程的学习是必不可少的,而且有助于掌握现代经济管理科学中许多理论和方法.

由于高等数学(二)具有较强的理论并具有抽象性,使许多考生仅因此一科通不过,而未拿到毕业文凭.编者在多年的教学实践中认识到,在考前必须给予重点复习,并进行强化训练.只要考生在掌握教材的主要内容的基础上,利用考前的总复习阶段,以历届的考试试题为主要内容带动全面复习,就会激发起学生的学习热情,从而收到意想不到的效果.为此,编者搜集了1992—2000年上半年的全国高等教育自学考试中的高等数学(二)全部试题,并作了详尽的解答.为了保持试题的完整性,对于18套试题保持原型,加上解答,作为本书的附

录.

为了使考生在总复习中系统复习并重点掌握教材的内容,本书各章均按教学大纲的要求作了内容要点的概述及典型例题的分析解答.

由于试题量比较大,题型涉及面较广,考生在考前如能认真地系统读完此书,对于进一步掌握高等数学(二)(线性代数和概率统计)知识,提高考试成绩,一定会有较大的帮助.

全书由王永葆教授、赵宝泽教授编写,由刘俊山教授主审.刘俊山教授仔细地审阅了书稿,并提出了宝贵的意见;在本书编写过程中还得到东北大学出版社的大力支持和鼓励,在此一并表示感谢.

本书自出版以来,深受广大自学考生的欢迎.本次再版,对个别错误之处做了修改,并增加了1999年以来的3套试题及其解答.

由于水平所限,书中难免存在错误和不妥之处,诚恳地希望广大读者批评指正.

编 者

2000年5月

目 录

第一分册 线性代数

第一章 行列式

§ 1.1 内容要点	1
§ 1.2 典型例题	4

第二章 矩 阵

§ 2.1 内容要点	12
§ 2.2 典型例题	17

第三章 线性方程组

§ 3.1 内容要点	28
§ 3.2 典型例题	31

第四章 线性空间

§ 4.1 内容要点	42
§ 4.2 典型例题	45

第五章 特征值问题与实二次型

§ 5.1 内容要点	49
§ 5.2 典型例题	52

第二分册 概率统计

第一章 概率的基本概念

§ 1.1 内容要点	65
§ 1.2 典型例题	69

第二章 随机变量及其分布

§ 2.1 内容要点	75
§ 2.2 典型例题	88

第三章 参数估计

§ 3.1 内容要点	99
§ 3.2 典型例题	108

第四章 假设检验

§ 4.1 内容要点	115
§ 4.2 典型例题	122

第五章 回归分析与相关分析

§ 5.1 内容要点	131
§ 5.2 典型例题	136

附 录 试题与解答

1992 年上半年全国高等教育自学考试《高等数学二》	
试题	142
1992 年上半年全国高等教育自学考试《高等数学二》	
试题解	150
1992 年下半年全国高等教育自学考试《高等数学二》	
试题	159
1992 年下半年全国高等教育自学考试《高等数学二》	
试题解	167
1993 年上半年全国高等教育自学考试《高等数学二》	
试题	173
1993 年上半年全国高等教育自学考试《高等数学二》	
试题解	181
1993 年下半年全国高等教育自学考试《高等数学二》	
试题	189
1993 年下半年全国高等教育自学考试《高等数学二》	
试题解	197
1994 年上半年全国高等教育自学考试《高等数学二》	
试题	203
1994 年上半年全国高等教育自学考试《高等数学二》	
试题解	211

1994 年下半年全国高等教育自学考试《高等数学二》	
试题	217
1994 年下半年全国高等教育自学考试《高等数学二》	
试题解	225
1995 年上半年全国高等教育自学考试《高等数学二》	
试题	231
1995 年上半年全国高等教育自学考试《高等数学二》	
试题解	239
1995 年下半年全国高等教育自学考试《高等数学二》	
试题	245
1995 年下半年全国高等教育自学考试《高等数学二》	
试题解	253
1996 年上半年全国高等教育自学考试《高等数学二》	
试题	263
1996 年上半年全国高等教育自学考试《高等数学二》	
试题解	272
1996 年下半年全国高等教育自学考试《高等数学二》	
试题	280
1996 年下半年全国高等教育自学考试《高等数学二》	
试题解	289
1997 年上半年全国高等教育自学考试《高等数学二》	
试题	299
1997 年上半年全国高等教育自学考试《高等数学二》	
试题解	308
1997 年下半年全国高等教育自学考试《高等数学二》	
试题	315
1997 年下半年全国高等教育自学考试《高等数学二》	
试题解	326
1998 年上半年全国高等教育自学考试《高等数学二》	
试题	332

1998 年上半年全国高等教育自学考试《高等数学二》	
试题解	338
1998 年下半年全国高等教育自学考试《高等数学二》	
试题	345
1998 年下半年全国高等教育自学考试《高等数学二》	
试题解	352
1999 年 1 月份全国高等教育自学考试《高等数学二》	
试题	360
1999 年 1 月份全国高等教育自学考试《高等数学二》	
试题解	366
1999 年上半年全国高等教育自学考试《高等数学二》	
试题	374
1999 年上半年全国高等教育自学考试《高等数学二》	
试题解	381
1999 年下半年全国高等教育自学考试《高等数学二》	
试题	387
1999 年下半年全国高等教育自学考试《高等数学二》	
试题解	394
2000 年上半年全国高等教育自学考试《高等数学二》	
试题	400
2000 年上半年全国高等教育自学考试《高等数学二》	
试题解	406

第一分册 线性代数

第一章 行列式

§ 1.1 内容要点

1. n 阶行列式的概念与定义

由 n^2 个数排成 n 行 n 列的式子, 即

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式.

n 阶行列式划去第 i 行、第 j 列, 即划去元素 a_{ij} 所在的行和列的所有元素, 其余元素按原来的顺序所构成的 $(n-1)$ 阶行列式 M_{ij} 称为元素 a_{ij} 的余子式; 称 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式.

n 阶行列式 D_n 的值定义为:

$$D_n = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \cdots + (-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}$$

$$D_n = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{n1}A_{n1}$$

通常把这定义简称为按第一列展开.

2. 行列式的性质

- (1) 行列式与它的转置行列式相等.
- (2) 交换行列式的任意两列(行), 行列式仅改变符号.
- (3) 行列式的某一行(列)乘以数 k , 等于用数 k 乘这个行列式.
- (4) 若行列式中有两列(行)元素对应成比例, 则行列式等于零.
- (5) 若行列式的某列(行)的各元素是两项之和, 则此行列式可表为两个行列式之和, 即

[illegible]

- (6) 把行列式的某一列(行)的 k 倍加到另一列(行)上去,行列式值不变.

3. 定 理

定理 1 n 阶行列式等于它任一列(行)的所有元素与它们的对应代数余子式的乘积之和.

定理 2 n 阶行列式中某一列(行)的每个元素与另一列(行)相应元素的代数余子式的乘积之和等于零.

4. 行列式的计算方法

- ### (1) 二阶行列式

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- ### (2) 三阶行列式

若齐次线性方程组

[illegible]

的系数行列式 $D \neq 0$, 则方程组(2)只有零解.

§ 1.2 典型例题

例 1 求四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

中元素 a_{32} 的余子式和代数余子式.

解 元素 a_{32} 的余子式即为划去第三行和第二列后的三阶行列式

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

元素 a_{32} 的代数余子式为

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = - \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

例2 计算四阶行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 \\ 7 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & -3 & -5 \end{vmatrix}$$

解法1 由定义

$$\begin{aligned} D_4 &= 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 6 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & -5 \end{vmatrix} \\ &\quad + 7 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 6 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & -5 \end{vmatrix} \\ &\quad + (-2) \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 5 \\ 4 & -3 & -5 \end{vmatrix} \\ &\quad + 8 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 5 \\ 6 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 2 \left[(-1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} + 6(-1)^{2+1} \right. \\ &\quad \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} + 4(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \Big] \\ &\quad - 7 \left[0 + 6(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} \right. \\ &\quad \left. + 4(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \left[0 + (-1)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} \right. \\
& \left. + 4(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \right] \\
& -8 \left[0 + (-1)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right. \\
& \left. + 6(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \right] \\
& = 2[5 - 90 - 20] - 7[0 + 72 + 16] \\
& \quad - 2[0 - 12 + 0] - 8[0 + 4 + 0] \\
& = -210 - 616 + 24 - 32 = -834
\end{aligned}$$

解法 2 按第一行展开

$$\begin{aligned}
D_4 &= 2(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 6 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & -5 \end{vmatrix} \\
&+ (-4)(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 7 & -1 & 0 \\ -2 & 6 & 1 \\ 8 & 4 & -3 \end{vmatrix} \\
&= 2 \left[(-1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} \right. \\
&+ 5(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} \left. \right] + 4 \left[7(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} \right. \\
&+ (-1)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} \left. \right] . \\
&= 2[5 - 110] + 4[-154 - 2] = -834
\end{aligned}$$

解法 3 (利用行列式性质将某行(列)的元素除一个元素不为零外其余元素都化成零,然后再展开)用数 k 乘以第 j 行(列)加到第 i 行(列)上,记作 $r_i + kr_j$ ($c_i + kc_j$).

$$\begin{aligned}
 D_4 &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 \\ 7 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & -3 & -5 \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow{r_4 + 3r_3} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 \\ 7 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & 1 & 0 \\ 2 & 22 & 0 & -5 \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow{\text{按第3列展开}} \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 7 & -1 & 5 \\ 2 & 22 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3 + 2c_1} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 19 \\ 2 & 22 & -1 \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow{\text{按第1行展开}} 2 \begin{vmatrix} -1 & 19 \\ 22 & -1 \end{vmatrix} = 2[1 - 418] = -834
 \end{aligned}$$

例3 求

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4-x \end{vmatrix} = 0$$

的根.

解 由于当 $x=1, 2, 3$ 时, 行列式中有两行相同, 所以等于零. 即这 3 个数 1, 2, 3 都是这个方程的根. 又因为这个行列式展开后是一个关于 x 的 3 次多项式, 故 1, 2, 3 是方程的全

部根.

例4 已知

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ x & 1 & 0 & 0 \\ y & 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

求 x, y, z .

解

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ x & 1 & 0 & 0 \\ y & 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{展开}]{\text{按第4行}} -z \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{展开}]{\text{按第3行}} z \begin{vmatrix} x & z \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -z^2 - y^2 - x^2 + 1$$

所以 $x^2 + y^2 + z^2 = 0, x = y = z = 0$.

例5 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 + (c_2 + c_3 + c_4)} \begin{vmatrix} a+3 & 1 & 1 & 1 \\ a+3 & a & 1 & 1 \\ a+3 & 1 & a & 1 \\ a+3 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$