面向21世纪课程教材

面 向 2 1 世 纪 课 程 教 材

Textbook Series for 21st Century

高等学校经济管理学科数学基础

主编 范培华 胡显佑

微 积 分

朱来义 主编

高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

00110587

面 向 2 1 世 纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

高等学校经济管理学科数学基础

主编 范培华 胡显佑

微 积 分

主编 朱来义

高 等 教 育 出 版 社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容简介

本书是教育部"高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"的研究成果，是高等院校经济学学科门类和管理学学科门类的数学基础课教材之一.

全书采用经管类学生易于接受的方式科学、系统地介绍了微分与积分的基本内容，重点介绍了微积分的方法及其在经济、管理中的应用，并附有A、B两级习题及相应参考答案.

本书在内容安排上还考虑了经管类学生将来考研的需要，因而也适合于考研学生复习之用.

图书在版编目(CIP)数据

微积分/朱来义主编. —北京：高等教育出版社，2000
(经济管理学科数学基础/范培华，胡显佑主编)
ISBN 7-04-008367-1

Ⅰ. 微… Ⅱ. 朱… Ⅲ. 微积分-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第26421号

经济管理学科数学基础：微积分
朱来义 主编

出版发行	高等教育出版社		
社 址	北京市东城区沙滩后街55号	邮政编码	100009
电 话	010-64054588	传 真	010-64014048
网 址	http://www.hep.edu.cn		
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷	化学工业出版社印刷厂		
开 本	787×960 1/16	版 次	2000年7月第1版
印 张	24.25	印 次	2000年10月第2次印刷
字 数	440 000	定 价	20.50元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换.

版权所有 侵权必究

前　言

1996年原国家教委开始组织实施“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”其中子项目经济学门类数学基础课研究和管理学门类数学基础课研究分别由中国人民大学和北京大学承担．考虑到这两大学科门类数学基础课程的共同点，教育部又将这两个子项目整合为“经济管理学类专业数学基础课程设置与教学内容改革研究”，集中力量合作研究，并成立了以魏权龄教授和范培华教授为项目主持人的课题组．两年多来，课题组对国内外高等院校同类专业数学基础课程的现状进行了调查研究，编写了教学大纲，组织了多次有关课程体系、课程内容的研讨会．其中，于1997年7月在长春召开的中国数量经济学会年会上，全国40余所院校的教师就经济管理类专业的数学基础课、数量经济分析课程的体系、课程设置、内容等进行了深入的讨论；1998年4月，教育部在京召开了管理类专业面向21世纪教学内容和课程体系改革的研讨会上，初步确定了数学基础课应包括微积分、线性代数和概率统计三门课程，共16学分．其中，“微积分”8学分，“线性代数”3学分，“概率统计”5学分．

在调查研究和充分讨论的基础上，课题组拟定了《经济管理学科数学基础教学大纲》（草案），并邀请北京地区部分高校就该大纲进行了讨论．

受教育部委托，北京大学光华管理学院和中国人民大学信息学院共同承担了编写经济管理学科数学基础系列教材的任务．整套教材分为《微积分》、《线性代数》和《概率统计》3个分册，由魏权龄教授任编写组顾问，范培华教授、胡显佑教授任主编．这套教材的《微积分》分册由朱来义教授主编，参加编写的有朱来义、吴岚、范培华和严守权；《线性代数》分册由卢刚副教授主编，参加编写的有卢刚、胡显佑、崔兆鸣；《概率统计》分册由龙永红副教授主编，参加编写的有龙永红、张贻兰、成世学、王明进．

根据高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革总体目标的要求，我们在编写这套教材时，主要考虑了下述问题：

1．为适应我国在21世纪社会主义建设和经济发展的需要，培养“厚基础、宽口径、高素质”的人才，基础课，特别是数学基础课不应削弱，而应适当加强．

2．考虑到目前绝大多数综合性大学、工科院校都设立了经济或管理学科的有关专业，但各校、各专业方向对数学基础的要求有一定的差异．这套教材

应照顾到多数院校教学的实际情况，便于教师和学生使用.

3. 作为一门数学基础课的教材，我们首先注意保持数学学科本身的科学性、系统性，但在引入一些概念时尽可能采用学生易于接受的方式叙述，对个别冗长，繁琐的推理则略去，而更突出有关理论、方法的应用和经济数学模型的介绍.

4. 作为经济管理学科各专业的数学基础教材，我们注意了专业后继课程的需要，并考虑学生继续深造的需要，教材的各章均配备了 A，B 两组习题. 一般，达到 A 组习题的水平，就已经符合本课程的基本要求. B 组习题是为数学基础要求较高的专业或学生准备的. 各章中打有“*”号（或小字排版）的内容是为对数学基础要求较高的院校或专业编写的，可以作为选学内容或学生自学用.

1999 年 12 月，由教育部高教司聘请了有关专家对教材的初稿进行了审定. 参加审稿会的有：北京航空航天大学李心灿教授、清华大学胡金德教授、南开大学周概容教授、（以下以姓氏笔划为序）湖南财经学院苏醒教授、北方交通大学季文锋教授、中央财政金融大学单立波教授、华侨大学龚德恩教授、中南财金大学彭勇行教授. 他们对教材初稿提出了许多中肯的建议和具体的修改意见，这对于完善教材是非常有益的，在此向参加审定会的各位教授表示诚挚的谢意.

在各次研讨会上，全国各高校的许多同行都对这一项目和教材提出了极有价值的建议. 在此向有关院校的老师们表示衷心感谢. 在教材编写过程中，我们得到了教育部高教司的大力支持，得到高教出版社有关部门的协助，在此一并致谢.

范培华　胡显佑

2000 年 3 月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

第1章　函数 ………… 1
§1.1　预备知识 ………… 1
§1.2　函数概念 ………… 4
§1.3　函数的几何特征 ………… 8
§1.4　反函数 ………… 11
§1.5　复合函数 ………… 12
§1.6　初等函数 ………… 14
§1.7　简单函数关系的建立 ………… 19
习题一 ………… 22

第2章　极限与连续 ………… 26
§2.1　数列极限 ………… 26
§2.2　函数极限 ………… 31
§2.3　函数极限的性质及运算法则 ………… 35
§2.4　无穷大量与无穷小量 ………… 39
§2.5　函数的连续性 ………… 43
§2.6　闭区间上连续函数的性质 ………… 47
习题二 ………… 49

第3章　导数与微分 ………… 55
§3.1　导数概念 ………… 55
§3.2　导数运算与导数公式 ………… 60
§3.3　复合函数求导法则 ………… 64
§3.4　微分及其计算 ………… 68
§3.5　高阶导数与高阶微分 ………… 71
§3.6　导数与微分在经济学中的简单应用 ………… 74
习题三 ………… 76

第4章　中值定理与导数的应用 ………… 80
§4.1　微分中值定理 ………… 80
§4.2　泰勒公式 ………… 86
§4.3　洛必达法则 ………… 91

§4.4 函数的单调性与凹凸性 …… 96
§4.5 函数的极值与最大（小）值 …… 102
§4.6 函数作图 …… 107
习题四 …… 110

第5章 不定积分 …… 115
§5.1 原函数与不定积分的概念 …… 115
§5.2 基本积分公式 …… 118
§5.3 换元积分法 …… 120
§5.4 分部积分法 …… 132
习题五 …… 136

第6章 定积分 …… 142
§6.1 定积分的概念与性质 …… 142
§6.2 微积分基本定理 …… 149
§6.3 定积分的换元积分法与分部积分法 …… 154
§6.4 定积分的应用 …… 161
§6.5 反常积分初步 …… 171
习题六 …… 185

第7章 多元函数微积分学 …… 195
§7.1 预备知识 …… 195
§7.2 多元函数的概念 …… 208
§7.3 方向导数、偏导数与全微分 …… 213
§7.4 多元复合函数与隐函数微分法 …… 220
§7.5 高阶偏导数与高阶全微分 …… 226
§7.6 多元函数的极值 …… 229
§7.7 二重积分 …… 236
习题七 …… 252

第8章 无穷级数 …… 259
§8.1 常数项级数的概念和性质 …… 259
§8.2 正项级数 …… 265
§8.3 任意项级数 …… 272
§8.4 幂级数 …… 276
习题八 …… 288

第9章 微分方程初步 …… 295

§9.1　微分方程的基本概念 …… 295
§9.2　一阶微分方程 …… 298
§9.3　二阶常系数线性微分方程 …… 309
§9.4　微分方程在经济学中的应用 …… 318
习题九 …… 321

第10章　差分方程 …… 326
§10.1　差分方程的基本概念 …… 326
§10.2　一阶常系数线性差分方程 …… 331
§10.3　二阶常系数线性差分方程 …… 337
§10.4　差分方程在经济学中的简单应用 …… 342
习题十 …… 344

习题参考答案 …… 347

第 1 章

函　数

微积分学是这样的一门数学学科——它以极限理论为基础，着重研究函数的连续性、可微性和可积性等问题．它的基本对象就是函数．本章我们就系统地讲述函数的有关知识．

§1.1　预备知识

一、实数与数轴

由于微积分中的函数是在实数范围里来讨论，因此我们先简单介绍实数学有关知识．

有理数和无理数统称为实数．全体实数所组成的集合称为实数系．数轴是一条有原点、正方向和长度单位的直线．如图 1－1 所示．

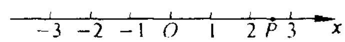

图 1－1

实数与数轴上的点之间具有一一对应的关系，即每一个实数 x 对应数轴上的唯一一个点 P，同时，数轴上的任意一点 P 都对应一个实数 x，当点 P 在原点 O 的右侧时，P 点对应的实数 x 是线段 OP 的长度 $|OP|$，而当 P 点在原点 O 的左侧时，P 点对应的实数 x 是线段 OP 的长度的相反数 $-|OP|$．通常称数轴为 1 维坐标系．数轴上点 P 按上述对应规则所对应的那个实数 x 称为点 P 的坐标，可记为 $P(x)$．为方便起见，把点 P 与其坐标视为等同，有时二者用同一个字母来表示，比如数 a 也称为点 a，而点 a 就表示坐标为 a 的点．

二、实数的绝对值及其基本性质

定义 1.1　设 x 是一个实数，则 x 的绝对值定义为

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时} \\ -x, & \text{当 } x<0 \text{ 时} \end{cases}$$

绝对值$|x|$的几何意义是：$|x|$表示点 x 到原点 O 的距离．而$|x-y|$则表示点 x 与点 y 之间的距离．

因此，设 $a\geqslant 0$，不等式$|x|\leqslant a$ 表示点 x 到原点的距离小于等于 a．即$|x|\leqslant a$的充分必要条件是 $-a\leqslant x\leqslant a$．

绝对值有以下一些基本性质：

设 x，y 为任意实数，则

1. $|x|\geqslant 0$
2. $|-x|=|x|$
3. $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$
4. $|x\pm y|\leqslant |x|+|y|$
5. $||x|-|y||\leqslant |x-y|$
6. $|x\cdot y|=|x||y|$
7. $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$ $(y\neq 0)$

这里我们只给出性质 4、5 的证明，其余性质利用绝对值的定义很容易得到，把它们留给读者作为练习．

性质 4 的证明：

我们只就$|x+y|\leqslant |x|+|y|$来证．由性质 3 可得

$$-|x|\leqslant x\leqslant |x|,\quad -|y|\leqslant y\leqslant |y|$$

因此

$$-(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant |x|+|y|$$

这等价于

$$|x+y|\leqslant |x|+|y|$$

性质 5 的证明：

由性质 4 可得

$$|x|=|x-y+y|\leqslant |x-y|+|y|$$

因此

$$|x|-|y|\leqslant |x-y|$$

在上式中交换 x 与 y 的位置可得

$$|y|-|x|\leqslant |y-x|$$

即

$$|x|-|y|\geqslant -|x-y|$$

从而证得

$$-|x-y|\leqslant |x|-|y|\leqslant |x-y|$$

即

$$||x|-|y||\leqslant|x-y|$$

三、区间与邻域

在本课程中，常用的实数集它们都有特定的记号，例如，**R** 表示全体实数构成的集合；**N**①表示自然数全体构成的集合；**Z** 表示整数全体构成的集合．此外还有区间，它们的表示及含意如下：

开区间$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$

闭区间$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$

类似地还有半开半闭区间$(a,b]$和$[a,b)$,这里 a,b 分别称为区间的左、右端点,$b-a$ 称为区间的长度.对于端点为无限的区间,它们的表示及含意是:

$$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}=\{x\mid-\infty<x<+\infty\}$$

$$(-\infty,a)=\{x\mid-\infty<x<a\}=\{x\mid x<a\}$$

$$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x<+\infty\}=\{x\mid x\geqslant a\}$$

当考虑某点附近的点所构成的集合时,我们常用邻域的概念来描述.

设 $\delta>0$,我们称 $O_\delta(x_0)$为 x_0 的 δ 邻域,具体定义为

$$O_\delta(x_0)=(x_0-\delta,x_0+\delta)$$

其中 x_0 称为 $O_\delta(x_0)$的中心点,δ 称为 $O_\delta(x_0)$的半径,而

$$O_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$$

称为 x_0 的 δ 去心邻域,其中$(x_0-\delta,x_0)$称为 x_0 的左邻域,$(x_0,x_0+\delta)$称为 x_0 的右邻域.

对于无穷远点∞的邻域,它的表示及含意为:设 $M>0$,我们称 $O_M(\infty)$为∞点的 M 邻域,其中

$$O_M(\infty)=\{x\mid|x|>M\}=(-\infty,-M)\cup(M,+\infty)$$

$(-\infty,-M)$是∞的左邻域,$(M,+\infty)$是∞的右邻域.

邻域 $O_\delta(x_0)$与 $O_M(\infty)$用数轴形象地表示为

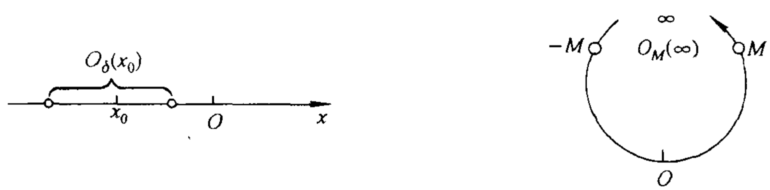

图 1－2

例 1 解不等式$|x+2|<|x-1|$，并用区间表示该不等式的解集．

---

① 本书自然数是非负整数．

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

解 由绝对值的几何意义可知，待解不等式要求的是这样的一些点 x 的集合：它到 -2 的距离小于它到 1 的距离．在数轴上易知 $-\frac{1}{2}$（此点为 -2 和 1 的中点）到 -2 的距离与到 1 的距离相等．于是可知当 $x<-\frac{1}{2}$ 时，x 到 -2 的距离小于 x 到 1 的距离．如图1－3所示．

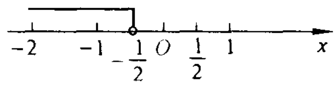

图 1－3

故所给不等式的解集为 $\{x \mid x<-\frac{1}{2}\}$，用区间表示即为 $\left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right)$．

§ 1.2 函数概念

一、变量与函数

所谓变量就是指在某一过程中不断变化的量．例如运动物体的速度；某地的气温；某种产品的产量、成本和利润；某时刻的世界人口总数等都是变量．时间是我们最熟悉的变量，很多变量的变化都依赖于时间．例如物理学中自由落体的距离 s 与时间 t 的关系为 $s=\frac{1}{2}gt^2$；又如复利问题，存入银行 k_0 元本金，银行每月的月利息为 2%，那么在第 t 个月后的存款余额（又称为本息金）a_t 与 t 的关系为 $a_t=k_0\cdot 1.02^t$，$t=1,2,3,\cdots$．也有一些变量的变化是不依赖于时间的．例如圆的面积 S 只依赖于该圆的半径 r，即 $S=\pi r^2$．

另外有的量在某一变化过程中始终保持不变，称这种量为常量．例如 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 中的 g；$S=\pi r^2$ 中的 π．

任何变量的取值都有一定的范围，称变量的取值范围为该变量的变域．变域一般是实数集 $\mathbf{R}$ 的某个子集．变量的变域若是区间，则称这种变量为连续取值变量，比如 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 中的 t 的取值为 $(0,\ T_0)$ T_0 为某个实数，此处的 t 是连续取值变量，相应的 s 也是连续取值变量．若变量的变域不是区间，比如在 $a_t=k_0\cdot 1.02^t$ 中，t 的取值为 $\{1,2,3,\cdots\}$，a_t 相应的取值为 $\{1.02k_0,\ 1.02^2k_0,\ \cdots\}$，$t$ 和 a_t 的取值具有“跳跃”性，称这种变量为离散取值变量．

在上面的关系式 $s=\frac{1}{2}gt^2$，$a_t=k_0\cdot 1.02^t$ 以及 $S=\pi r^2$ 中，我们可以看出，在同一问题中所涉及到的诸变量之间都按一定的规律相联系，其中一个变量的变化将会引起另一变量的变化，当前者（又称为自变量）的值确定后，后

者（又称为因变量）的值按照一定的关系相应被确定．变量之间的这种相互确定的依赖关系抽象出来就是函数的概念．下面给出一元函数（只有一个自变量的函数）的定义．

定义 1.2 设有两个变量 x 与 y，变量 x 属于某实数集合 D．如果存在一个确定的法则（也说对应规则）f，使得对于每一个 $x\in D$，都有唯一的一个实数 y 与之对应，则称这个对应法则 f 为定义在实数集合 D 上的一个一元函数，简称函数．D 称为 f 的定义域．

函数 f 的定义域 D 通常记为 $D(f)$．

当 $x\in D(f)$时，称函数 f 在 x 处有定义；否则称 f 在 x 处无定义．

对于每个 $x\in D(f)$，由法则 f 所对应的实数 y 称为 f 在点 x 处的函数值，常记为 $f(x)$．全体函数值的集合称为函数 f 的值域，记为 $R(f)$．即

$$R(f)=\{y\mid y=f(x),x\in D(f)\}$$

注意 定义 1.2 中，法则 f 确定了变量 x 与变量 y 之间的对应关系，这种对应关系也称为函数关系．函数关系中 x 通常称为自变量，y 称为因变量（因此也称 y 是 x 的函数）．另外，由定义 1.2 知，确定一个函数需要两个要素，即定义域 $D(f)$ 和对应法则 f．因此，常用

$$y=f(x),x\in D(f)$$

表示函数 f，也称其为函数 f 的函数表达式．例如，常数函数 $y=C$（C 是一个给定的实数），其定义域为全体实数 $\mathbf{R}$，值域为单点集 $\{C\}$，尽管在其表达式中并没出现自变量 x，但是它能反映出 x 与 y 之间的对应关系．

我们称两个函数相同，如果它们的定义域和对应法则都相同．

二、函数的表示法

函数的表示法一般有三种：表格法、图示法和解析法．

我们用例子说明．

例 2 据统计，60 年代世界人口增长情况如下表 1.1 所示

表 1.1

年份 t（公元）	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968
人口 n（百万）	2 972	3 061	3 151	3 213	3 234	3 285	3 356	3 420	3 483

从表 1.1 可以看出 60 年代世界人口随年份的变化而变化的规律：随着时间 t 的变化，世界人口数 n 在不断增长．n 是 t 的函数，其定义域为 $\{1960, 1961, \cdots\}$，值域为 $\{2972, 3061, \cdots\}$．这种用表格表示函数关系的方法就称为表格法．

例3 某气象站用温度自动记录仪记录某地的气温变化情况．设某天24小时的气温变化曲线如图1－4所示．

图1－4中的曲线描述了一天中的温度T随时间t变化的规律．T是t的函数，t与T之间的相互对应关系由曲线上的点的位置确定．例如图1－4中，曲线上点P的横坐标为t_0，纵坐标T_0就是曲线所描述的函数在t_0点的函数值．其定义域为$[0, 24]$，值域为$[10, 30]$．这种用图形表示函数的方法称为图示法．

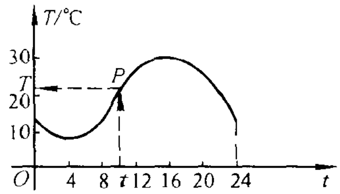

图1－4

例4 设有一个半径为r的半圆形铁皮，将此铁皮做成一个圆锥形容器，问该圆锥形容器的体积V是多少？

解 易知圆锥形容器的底圆半径$r_1=\frac{1}{2}r$，圆锥形容器的高$h=\frac{\sqrt{3}}{2}r$，故其容积

$$V=\frac{1}{3}\pi r_1^2\cdot h=\frac{\sqrt{3}}{24}\pi r^3$$

上式表示了体积V与r之间的关系．V随着r的变化而变化．V是r的函数．这种用解析表达式（简称为解析式）表示函数关系的方法称为解析法．

函数的3种表示法各有其特点，表格法和图示法直观明了，解析法易于运算．在实际中可以结合使用．

在用解析法表示函数时，有一种特别的情形，即有些函数，在它的定义域的不同部分，其表达式不同．即用多个解析式表示一个函数．这类函数称为分段函数．例如，绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

和取整函数$[x]$，$[x]$表示不超过x的最大整数，即

$$y=[x]=n,\ n\leqslant x<n+1,\ n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \cdots$$

就都是分段函数．它们的图形分别如图1－5和图1－6所示．

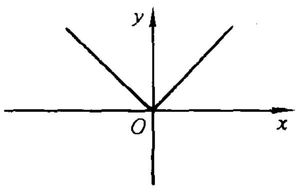

图1－5

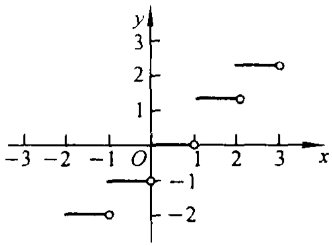

图1－6

对于取整函数 $[x]$，可以证明：对任意的实数 x，有不等式

$$[x] \leqslant x < [x] + 1$$

注意 分段函数的定义域是其各段定义域的并集；另外，分段函数在其整个定义域上是一个函数，而不是几个函数.

三、函数定义域

我们知道，一个函数 $y = f(x)$的确定要有两个要素即定义域 $D(f)$和对应法则 f. 当我们给定某个函数时，事先要给定其定义域，但对于由解析式表示的函数，其定义域是指使得该函数表达式有意义的自变量取值的全体，这种定义域称为函数的自然定义域. 函数的自然定义域通常不写出，因此需要我们去求出其定义域. 为此，我们必须掌握一些常用的函数表达式有意义的条件. 如负数不能开偶次方根；分式的分母不能为零；对数的真数必须为正数等等.

下面是求函数定义域的几个例子.

例 5 求函数 $f(x) = \ln(x-1) + \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$的定义域.

解 要使 $f(x)$有意义,必须有

$$x - 1 > 0 \text{ 且 } x^2 - 1 > 0$$

由 $x - 1 > 0$ 得 $x > 1$,即 $x \in (1, +\infty)$.

由 $x^2 - 1 > 0$ 得 $x > 1$ 或 $x < -1$,即 $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

综上可知:函数 $f(x)$的定义域为

$$D(f) = (1, +\infty) \cap [(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)] = (1, +\infty)$$

例 6 求分段函数

$$g(x) = \begin{cases} x + 3, & 2 < |x| \leqslant 4 \\ 2x^2 + 1, & |x| \leqslant 2 \end{cases}$$

的定义域,并作其图形.

解 由于分段函数定义域是各段定义域的并集,故 g 的定义域为

$$D(g) = [-4, -2) \cup (2,4] \cup [-2,2] = [-4,4]$$

按照函数 $g(x)$在其各段定义域上相应的表达式，分段作图得该函数的图形如图 1－7 所示.

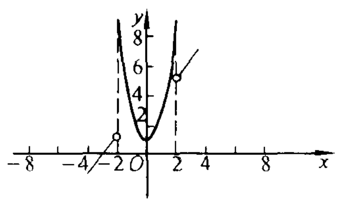

图 1－7

注意 如果某函数是从实际问题中得到的，其自变量有实际的含义，此时定义域的确定须根据实际情况来确定. 比如在圆面积公式 $S = \pi r^2$ 中，r 表示圆半径，它必是正数，故此函数的定义域为 $(0, +\infty)$. 因为若不考虑实际意义，则上述函数的自然定义域为

$(-\infty, +\infty)$.

§1.3　函数的几何特征

本节将介绍函数的单调性、有界性、奇偶性及周期性等特性.

一、单调性

定义 1.3　设函数 $f(x)$ 在实数集 D 上有定义,对于 D 内的任意两数 x_1, x_2, $x_1 < x_2$,若总有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ 成立,则称 $f(x)$ 在 D 内是单调递增(简称为单增)的;若总有 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ 成立,则称 $f(x)$ 在 D 内是单调递减(简称为单减)的;若总有 $f(x_1) < f(x_2)$ 成立,则称 $f(x)$ 在 D 内是严格单增的;若总有 $f(x_1) > f(x_2)$ 成立,则称 $f(x)$ 在 D 内是严格单减的.严格单增(单减)也是单增(单减).当 $f(x)$ 在 D 内是单调递增(单调递减)时,又称 $f(x)$ 是 D 内的单调递增(单调递减)函数.单调递增函数或单调递减函数统称为单调函数.

例 7　函数 $y = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是严格单增的.

解

因为

$$x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$$
$$= (x_1 - x_2)\left[\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2\right]$$

当 $x_1 < x_2$ 时, $x_1^3 < x_2^3$.

$y = x^3$ 的图形如图 1-8 所示.

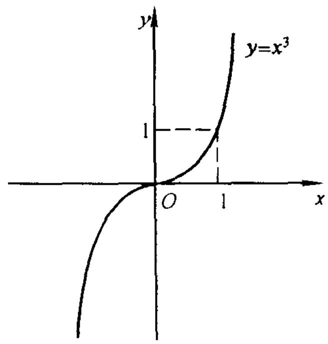

图 1-8

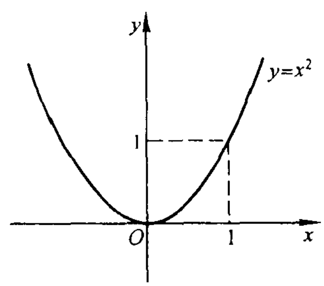

图 1-9

例 8　函数 $y = x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 内是严格单减的;在 $(0, +\infty)$ 内是严格单增

的.但在整个定义域$(-\infty,+\infty)$上不是单调函数.($y=x^2$ 的图形如图 1－9 所示)

证明留给读者.

二、有界性

定义 1.4　设函数$f(x)$在集合 D 内有定义，若存在正数 M，使得对每一个 $x\in D$，都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立,则称 $f(x)$在 D 内有界,或称 $f(x)$为 D 内的有界函数,否则称 $f(x)$在 D 内无界,或称 $f(x)$为 D 内的无界函数.

定义 1.5　设函数 $f(x)$在集合 D 内有定义,若存在数 A(或 B),使得对每一个 $x\in D$,都有

$$f(x)\leqslant A(\text{或 } f(x)\geqslant B)$$

成立,则称函数 $f(x)$在 D 内有上界(或有下界),也称 $f(x)$是 D 内有上界(或有下界)的函数.

显然,有界函数必有上界和下界;反之,既有上界又有下界的函数必是有界函数.

有界函数的图形完全落在两条平行于 x 轴的直线之间,如图 1－10 所示

例如函数 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上有界,因为$|\sin x|\leqslant 1$.而函数 $y=x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$上有下界但无上界(因 $x^2\geqslant 0$),因此 $y=x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$上是无界函数.不过函数 $y=x^2$,$x\in[-1,1]$是有界函数.

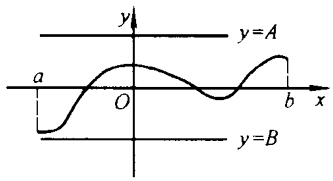

图 1－10

三、奇偶性

定义 1.6　设函数 $f(x)$在一个关于原点对称的实数集合 D 内有定义,若对每一个 $x\in D$,(此时必有 $-x\in D$),都有

$$f(-x)=-f(x)(\text{或 } f(-x)=f(x))$$

则称 $f(x)$为 D 内的奇(或偶)函数.

从定义 1.6 易知，奇函数的图形关于原点对称，而偶函数的图形关于 y 轴对称．如图 1－11 (a) 与 (b) 所示.

例如，$y=x^{2k+1}$（k 为整数）为奇函数，$y=x^{2k}$（k 为整数）为偶函数，$y=\sin x$ 是奇函数，$y=\cos x$ 是偶函数，$y=C$（C 为非零常数）是偶函数，$y=0$ 既是奇函数又是偶函数，$y=x^2+x$ 既不是奇函数也不是偶函数.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com