

全国高等教育自学考试统

辅导用书



高等数学

(一)

《高等教育自学考试自测习题丛书》编写组 编

自测 习题集

quanguo
gaodeng
jiaoyu
zixue
kaoshi
tongkao
kecheng
fudao
yongshu

中国财政经济出版社

全国高等教育自学考试统考课程辅导用书

高等数学（一）自测习题集

《高等教育自学考试自测习题丛书》编写组 编

中国财政经济出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学 (一) 自测习题集 / 《高等教育自学考试自测习题丛书》编写组编. — 北京: 中国财政经济出版社, 1998.4

全国高等教育自学考试统考课程辅导用书

ISBN 7-5005-3740-9

I. 高… II. 高… III. 高等数学 - 高等教育 - 自学考试 - 习题 IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (98) 第 05606 号

中国财政经济出版社出版

<http://www.cicph.com>

(版权所有 翻印必究)

社址: 北京东城大佛寺东街 8 号 邮政编码: 100010

北京朝阳印刷厂印刷

787×1092 毫米 32 开 13.625 印张 278 000 字

1998 年 5 月第 1 版 1998 年 7 月北京第 2 次印刷

印数: 10 051--20 060 定价: 16.00 元

ISBN 7-5005-3740-9/O·0004

(图书出现印装问题, 本社负责调换)

出版前言

为满足高等教育自学考试、社会助学和考生应试的需要，我们组织了部分多年从事自考助学工作的专家学者，根据全国高等教育自学考试指导委员会颁布的高等教育自学考试《自学考试大纲》和所指定使用的教材，结合自学考试的特点，编写了《高等教育自学考试自测习题丛书》。

本丛书精选了有代表性和覆盖面较大的题目，各学科中的知识点均被以各种形式的题目列出。

专家指出，自测习题可以使自考生随时检验自己对所学知识的掌握程度，在解题当中加深对知识的理解，起到事半功倍的效果，以帮助自考生达到学习目标，顺利通过考试。

《高等数学（一）自测习题集》是本丛书中的一分册。高等数学（一）是经济管理类的专业共同课，该课程为6学分。

《高等教育自学考试自测习题丛书》编写组

1997年12月

目 录

导 言	(1)
一、内容简介及特点	(1)
二、题型分析和重点要求	(1)
三、基本内容总结与要求	(3)
第一章 函数及其图形	(10)
基本要求与重点	(10)
习题 1.1	(11)
习题 1.2	(12)
习题 1.3	(12)
习题 1.4	(22)
复习题	(24)
第二章 极限与连续	(32)
基本要求与重点	(32)
习题 2.1	(33)
习题 2.2	(35)
习题 2.3	(38)
习题 2.4	(45)
习题 2.5	(48)
习题 2.6	(53)

复习题	(55)
第三章 导数与微分	(66)
基本要求与重点	(66)
习题 3.1	(67)
习题 3.2	(70)
习题 3.3	(80)
习题 3.4	(84)
习题 3.5	(87)
复习题	(93)
第四章 中值定理与导数的应用	(103)
基本要求与重点	(103)
习题 4.1	(103)
习题 4.2	(109)
习题 4.3	(129)
习题 4.4	(135)
复习题	(139)
测试题	(150)
第五章 积分	(168)
基本要求与重点	(168)
习题 5.1	(169)
习题 5.2	(189)
习题 5.3	(206)
习题 5.4	(213)
复习题	(222)
测试题	(238)

第六章 无穷级数	(247)
基本要求与重点	(247)
习题 6.1	(248)
习题 6.2	(250)
习题 6.3	(257)
习题 6.4	(264)
复习题	(273)
测试题	(285)
第七章 多元函数及其偏导数	(296)
基本要求与重点	(296)
习题 7.1	(297)
习题 7.2	(299)
习题 7.3	(305)
习题 7.4	(308)
习题 7.5	(316)
习题 7.6	(329)
复习题	(339)
测试题	(348)
第八章 微分方程初步	(366)
基本要求与重点	(366)
习题 8.1	(367)
习题 8.2	(369)
习题 8.3	(384)
习题 8.4	(392)
习题 8.5	(403)

复习题..... (407)

测试题..... (422)

导 言

一、内容简介及特点

(一) 本书由三部分内容组成

1. 自学指导与基本概念总结分析。
2. 教材习题解答及题型、解题方法和重点要求总结分析。
3. 最新全真考题练习分析。

(二) 本书的特点和目的

1. 以教材为主体，习题为基本练习，不断总结基本概念、基本运算和基本方法技巧。
2. 内容精练实用，紧扣教材，且能迅速熟悉接近考试，以全真考题练习作为强化手段，事半功倍，少走弯路，避免题海泛舟，漫无边际，从而达到全面迅速掌握教材，突出重点，突破难点，并最终攻克考关的效果。

二、题型分析和重点要求

(一) 内容分为四大部分

1. 一元函数微积分。
2. 多元函数微积分。
3. 无穷级数。

4. 微分方程初步。

其中，一元微积分是基本和重点部分，考试比重较大，需要重点掌握基本概念和基本计算。其他三个部分偏重于计算题的掌握，其中微分方程初步分量最轻，其次是无穷级数。

(二) 考试题型与结构分析

题型结构主要分为四大部分

1. 概念题。
2. 计算题。
3. 应用题。
4. 论证题。

其中，概念题和计算题分量最大，论证题分量较轻，概念题和简单计算题以单选题和填空题形式出题，均为小分题，量较大，构成了微积分考试的基础，应完全掌握；计算题和应用题构成了微积分考试的主干，应熟练掌握；论证题是微积分考试的补充，不可花费过多的精力。

(三) 微积分自学考试重点要求

1. 一元微积分部分。

- (1) 函数概念。
- (2) 极限的计算。
- (3) 导数的计算，特别是复合函数的求导。
- (4) 导数应用及最大（小）应用题。
- (5) 积分计算技巧，包含凑微分法、分部积分法和换元积分法。特别要加强凑微分法的积分训练。
- (6) 定积分的几何应用。

- (7) 广义积分收敛性。
- 2. 多元微积分部分。
 - (1) 偏导数的计算。
 - (2) 二重积分的计算。
 - (3) 多元函数的极值。
- 3. 无穷级数部分。
 - (1) 级数收敛性判别。
 - (2) 幂级数收敛区域与泰勒级数。
 - (3) 求幂级数的收敛函数。
- 4. 微分方程初步。
 - (1) 一阶微分方程的可分离变量方法的理解和掌握。
 - (2) 一阶线性微分方程的求解。
 - (3) 二阶常系数线性微分方程的求解。

三、基本内容总结与要求

(一) 函数概念

- 1. 判断两函数相等。
- 2. 求函数定义域。
- 3. 基本初等函数的性质及图形。
- 4. 函数的基本性质（单调性可用求导法）。

(二) 极限求法

- 1. 初等方法变形。
- 2. 无穷大的倒数为无穷小，非零无穷小倒数为无穷大。
- 3. 无穷小乘有界量仍为无穷小。

4. 两个重要极限。
5. 罗必达法则。
6. 变上限积分极限。
7. 定积分定义求极限。
8. 收敛级数通项趋于零。
9. 夹逼准则。
10. 单调有界数列有极限。

(三) 极限相关概念

1. 阶的比较。
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有界。
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$
4. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 且 $f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A$
5. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 与 X 在 x_0 处有无定义无关。

(四) 函数的连续性

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$
2. 间断点分类及求法。
3. (1) 基本初等函数在其定义域上连续。
(2) 初等函数在其定义区间内连续。
(3) 单调连续函数的反函数仍为单调连续函数。
(4) 连续函数的复合函数仍为连续函数。

4. 闭区间上连续函数的性质。

(五) 求导数

1. 复合函数求导。

2. 隐函数求导。

3. 参数方程求导 (可用微分法)。

4. 高阶导数

5. 微分 $[dy = f'(x)dx]$ 。

6. 变上下限定积分的导数。

(六) 导数相关概念

1. 导数的几何意义。

2. 导数的一般意义 (变化律)。

3. 导数的经济意义 (边际函数)。

4. 导数的定义:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

5. 左 (右) 导数定义:

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

6. 基本结论: 左导数 = 右导数 $\Leftrightarrow$ 可导 $\Leftrightarrow$ 可微 $\Rightarrow$ 连续

(七) 微分中值定理

1. 中值定理条件表述, 几何意义。

2. $f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = c$ (证明等式可用此结论)。

3. 应用。

(1) 证明不等式。

(2) 求根 (或用零点定理)。

(八) 导数的应用

1. 求单调性（或证明不等式）、极值、最大（小）值，
凹向性及拐点。

2. 绘图、求渐近线。

3. 最大（小）值应用题（如最大利润问题等）。

(九) 不定积分的求法

1. 凑微分法。

2. 换元积分法。

3. 分部积分法。

4. 特定类型积分及积分技巧。

5. 性质：(1) $[\int f(x)dx]' = f(x)$

$$(2) \int f'(x)dx = f(x) + c$$

(3) 连续函数可积。

(十) 定积分

1. 定义、几何意义、可积性和性质。

2. 变上限函数积分求导及微积分基本定理。

3. 几何应用。

(1) 求面积。

(2) 求体积。

4. 广义积分收敛性判别及计算。

5. 一元函数微积分基本结构：

$$\text{可微} \Leftrightarrow \text{可导} \Rightarrow \text{连续} \Rightarrow \begin{cases} \text{可积} \Rightarrow \text{有界} \\ \text{有极限} \Rightarrow \text{局部有界} \end{cases}$$

(十一) 多元函数偏导数

1. 复合函数求偏导。
2. 隐函数求偏导。
3. 高阶偏导数计算。
4. 全微分: $df = f_x dx + f_y dy$
5. 基本结论:

(1) 二阶混合偏导连续, 则二阶混合偏导相等。

(2) 偏导数连续 $\Rightarrow$ 可微 $\Rightarrow \begin{cases} \text{偏导存在} \\ \text{函数连续} \end{cases}$

(十二) 极值、条件极值与最大值、最小值的求法

(十三) 二重积分

1. 二重积分的计算及积分区域的确定。

(1) 直角坐标系下的二次积分, 积分区域为 x -型区域
或 y -型区域

(2) 极坐标系下的二重积分, 积分区域为扇形区域。

2. 几何意义。

3. 应用。

(1) 平面面积。

(2) 曲顶柱体体积。

(十四) 无穷级数

1. 数项级数性质。

(1) 收敛级数通项趋于零。

(2) 级数前有限项的变化不改变其敛散性。

(3) 级数收敛, 任意加括号所得新级数仍收敛, 且其和不变。

(4) 绝对收敛, 则条件收敛。

- (5) 调和级数发散。
- (6) P 级数当 $P > 1$ 时收敛，否则发散。
- (7) 几何级数当其公比绝对值小于 1 时收敛。

2. 正项级数敛散性判别法。

- (1) 比较判别法。
- (2) 比值判别法（达朗贝尔判别法）。
- (3) 根值判别法（柯西判别法）。
- (4) 交错级数的莱布尼兹判别法。

3. 幂级数。

- (1) 求收敛半径和收敛区域。
- (2) 收敛区域内幂级数的逐项求导和积分。
- (3) 求和函数。
- (4) 基本求和公式：

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad |x| < 1$$

4. 泰勒公式与泰勒级数。

- (1) 会用泰勒公式展开函数，并能确定泰勒级数收敛半径。

- (2) 掌握下列基本的幂级数展开式及收敛区间。

$$\textcircled{1} e^x \quad \textcircled{2} \sin x \quad \textcircled{3} \cos x \quad \textcircled{4} \ln(1+x) \quad \textcircled{5} (1+x)^2$$

(十五) 微分方程初步

- 1. 掌握一阶微分方程的分离变量法和常数变易法。
- 2. (1) 一阶线性微分方程：

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

通解公式: $y = e^{-\int P(x)dx} \{ C + \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx \}$

(2) 贝努里方程:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad \text{设 } z = y^{1-n}$$

3. 二阶常系数线性齐次方程: $y'' + py' + qy = 0$

求解步骤:

(1) 求特征方程: $r^2 + pr + q = 0$ 的根

(2) 确定线性无关特解:

单根: $r_1 \neq r_2$ 无关特解: $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}$

重根: $r_1 = r_2$ 无关特解: $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}$

复根: $\alpha \pm i\beta$ 无关特解: $e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x$

4. 二阶常系数线性非齐次方程: $y'' + py' + qy = f(x)$

(1) 通解形式: $y = \bar{y} + y^*$

其中 y^* 为其方程一特解, $\bar{y}$ 为对应线性齐次方程的通解。

(2) 特解求法: 设 $y^* = F(x)$, 而 $F(x)$ 与 $f(x)$ 的差别仅在于多项式的系数(待定)可能不同。

$f(x)$ 形式	判别式	特解形式
$e^{\alpha x} [R(X) \cos \beta x + Q(x) \sin \beta x]$ {或 $e^{\alpha x} P(x)$ }	$Z = \alpha + i\beta$ (或 $z = \alpha$) Z 不是特征根	$F(x)$
	Z 是单根	$x F(x)$
$e^{\alpha x} P(x)$	Z 是重根	$x^2 F(x)$

其中 $F(x)$ 中出现的多项式的最高方幂等于多项式 $R(x)$ 和 $Q(x)$ 两者方幂的最高者。