现代数学手册

经济数学卷

Modern Mathematics Handbook

《现代数学手册》编纂委员会

华中科技大学出版社

现代数学手册

MODERN MATHEMATICS HANDBOOK

经济数学卷

《现代数学手册》编纂委员会

· 华中科技大学出版社 ·
（华中理工大学出版社）
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

现代数学手册·经济数学卷/《现代数学手册》编纂委员会
武汉:华中科技大学出版社,2001年1月
ISBN 7-5609-2176-0

Ⅰ.现…
Ⅱ.现…
Ⅲ.①数学-手册 ②经济数学-手册
Ⅳ.O 1-62

现代数学手册·经济数学卷 《现代数学手册》编纂委员会

责任编辑:佟文珍,叶见欣,姜新祺,周芬娜 封面设计:刘 卉
责任校对:张 欣 责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社 武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87545012
经销:新华书店湖北发行所

录排:湖北省新华印刷厂
印刷:湖北省新华印刷厂

开本:880×1230 1/32 印张:27.375 插页:6 字数:1 100 000
版次:2001年1月第1版 印次:2001年1月第1次印刷 印数:1—8 000
ISBN 7-5609-2176-0/O·209 定价:80.00元

《现代数学手册》编纂委员会

前　言

在人类开始跨入21世纪的历史时期，人们已普遍地看到了一种历史现象，即数学问题的多样性与数学应用的广泛性及深入性，已经成为现代科技发展的重要特征。可以预期，伴随着计算机科技在新世纪里的不断发展，此特征今后还将以更高的水平显示出来。

在中国，"科学技术是第一生产力"（邓小平名言）已逐渐成为人们信奉的朴实真理。国家富强显然要以第一生产力即科技的发达为必要条件。但是，如果没有近、现代发展起来的数学各分支学科作工具，当然也就不会有现代科技。因此"国家富强必须要依靠数学发达"这句经典名言（拿破仑（Napoleon）名言），自然也是一条不容置疑的客观真理。

基于上述认识，在华中理工大学出版社的倡议与委托下，我们通过集体协作，努力编纂了这部《现代数学手册》巨著，其目的正是怀着对我国将在新世纪里能尽快成为富强国家的热切希望，而欲为科技界提供一份力所能及的奉献。具体说来，这部工具性巨著服务的读者（或使用者）对象，包括广大科学工作者、工程技术人员、经济管理工作者、高等院校的教师和学生等。

那么，作为数学工具书，这部巨型手册要求具备哪些特点呢？在编写过程中，出版社负责人和我们达成了一项共识，即手册应具备科学性、先进性、实用性、规范性与简明性。200余位撰稿人与审稿人（来自中国科学院、北京大学、清华大学、复旦大学、南京大学、浙江大学、北京师范大学、厦门大学、上海交通大学、西安交通大学、中国科技大学、南开大学、武汉大学、华中理工大学、大连理工大学、南京航空航天大学、陕西师范大学等40多所高校与研究所）按照这些特点和要求付出了

艰辛的劳动。我们要感谢他们的通力合作与努力，使本手册基本上体现了上述所希冀的特点或特色。

为了读者选购和使用方便，本手册分5卷出版，分别名为“经典数学卷”、“近代数学卷”、“计算机数学卷”、“随机数学卷”和“经济数学卷”。需要指出的是，各个分支(篇目)的归属是相对的，这里考虑了各分卷篇幅大小的平衡问题。例如，“蒙特卡罗法”这一篇也可归入“计算机数学卷”。

我们要感谢诸分卷主编为精心组稿、编稿、审稿付出的精力和时间。特别要对中国科学院两位老院士钱伟长先生与吴文俊先生，以及杨叔子院士乐愿担任本手册的顾问而致以诚挚的谢忱。最后，还要对华中理工大学出版社具有远见卓识的负责人和埋头苦干的编辑人员与我们在本手册的生产全过程中的互相配合和精诚合作，深表谢忱。

《现代数学手册》编纂委员会

主编 徐利治

1999年12月于武汉

现代数学手册

篇目录

经典数学卷

近代数学卷

计算机数学卷

随机数学卷

经济数学卷

MODERN MATHEMATICS HANDBOOK

CONTENTS

CLASSICAL MATHEMATICS

MODERN MATHEMATICS

COMPUTER MATHEMATICS

STOCHASTIC MATHEMATICS

ECONOMIC MATHEMATICS

·经济数学卷·

目　录

·经济数学卷·

第 1 篇

计量经济

编　者　林少宫
审校者　冯文权

目　录

引　言

计量经济学(econometrics)是20世纪30年代开始发展起来的一门实证性数量经济学科.它运用数理统计和统计推断的方法,对由经济理论指引的经济关系(式)进行实测和经济研究,为经济预测和政策的制定提供依据.

计量经济学可大致分为理论计量经济学和应用计量经济学.前者主要研究适合于测算计量经济模型所设定的经济关系式的统计方法及其性质(如广泛使用的最小二乘法及其性质);后者则考虑如何运用前者去研究经济学中的某些特殊领域,如生产函数、消费函数、投资函数或货币需求函数,等等.

计量经济学从方法和步骤上可划分为四个部分:模型设定、参数估计、验证、预测和控制.即首先建立某一经济理论的数学模型,用数学语言特别是用方程式表达经济理论;其次通过参数估计把方程式中的参数值填入;然后按一定的准则验证所依据的经济理论是否可以接受,有时需要将模型作适当修改,重新估计参数,再验证模型;最后,利用所估算的模型进行预测和控制.

计量经济学方法所面对的数据主要是非实验(nonexperimental)数据①.这一特点有助于说明它为什么不仅是近代经济学、金融学研究中不可缺少的技术,而且在社会、人文、历史以至管理工程等行为科学方面都有广泛的应用.

1　线性回归模型

线性模型　它是最简单而又最常用的经济模型或经济关系式.经济模型可以是线性或非线性的."线性(一次)"(linearity)既可对变量而言,也可对参数而言.在计量经济学中,作为一种方便易行的方法或形式而采用的线性模型,是指它所含的每个方程对参数而言都是线性的.例如,边际成本方程

$$Y = \alpha + \beta X + \gamma X^2,$$

对变量(产量)X虽然是非线性的,但对参数α,β和γ是线性的,所以被认为是线性的.方程

$$Y = \alpha + \sqrt{\beta} X,$$

对变量X是线性的而对参数β不是,所以被认为是非线性的.相对于参数而言的线性模型之所以被广泛应用,主要因为它便于对参数作最小二乘(least squares)估计,而且许多原来不是线性的函数形式,经过一定的变换,就可变为线性.例如柯布-道格拉斯(Cobb-Douglas)生产函数

---

① 由于现代实验经济学的发展,这句话只有相对意义.

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta},$$

其中 K, L 分别表示资本、劳力投入，Q 表示产出，取其对数就变成对参数 α 和 β 来说为线性函数.

在现实中，经济关系(式)不是一种确切的关系，可在线性关系式中适当加入一个误差(干扰或扰动)项 u，如

$$Y = \alpha + \beta X + u, \tag{1-1}$$

其中，u 表示在考虑 Y 和 X 的线性关系时被忽略掉的许多微小因素的总和. 由于方程(1-1)中已设有截距项 α，就不妨考虑 u 的均值或数学期望为零，即

$$E(u) = 0.$$

这里 E 是数学期望符号. 于是，$\alpha + \beta X$ 就成为在给定 X 时 Y 的条件均值或条件数学期望. 因为，将(1-1)式两边求数学期望，得

$$E(Y|X) = E(\alpha + \beta X + u) = \alpha + \beta X + E(u),$$

即

$$E(Y \mid X) = \alpha + \beta X. \tag{1-2}$$

方程(1-1)表示 Y 对 X 的**回归方程**. 回归的目的是要求出形如方程(1-2)的条件期望值. 为此，不但要估计其中的参数 α 和 β，而且，为了知道估计的好坏，一般还要估计误差 u 的方差，记为 σ_u^2，

$$\sigma_u^2 = E(u^2).$$

在回归方程中，作为可以给定的自变量 X，又通称为**回归元**(regressor)，而随之而变的应变量 Y，则通称为**回归值**(regressand). 在计量经济学中，因应用目的的不同，Y 和 X 曾被赋予种种不同的名称，如表 1-1 所列举.

表 1-1

Y		X	
应变量	(dependent variable)	自变量	(independent variable)
被解释变量	(explained v)	解释变量	(explanatory v)
预测值	(predictand)	预测元	(predictor)
回归值	(regressand)	回归元	(regressor)
内生变量	(endogenous v)	外生变量	(exogenous v)
响应值	(response)	刺激量	(stimuli)
目标值	(target)	控制变量	(control v)
		(政策变量)	(policy v)

1.1 二元线性回归

含 k 个自变量的线性回归方程可写为

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_k X_k + u. \tag{1-3}$$

当 $k = 2$ 时为二元线性回归方程；当 $k > 2$ 时为多元线性回归方程. 为了估计方程中

的参数 β_i,须对 Y 和诸 X 进行 $n(n>k)$次观测.观测数据可分横截面和时间序列两种情形.当数据来自横截面时,常记观测结果为

$$Y_i=\beta_1+\beta_2X_{2i}+\cdots+\beta_kX_{ki}+u_i,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

而当数据来自时间数列时,则记为

$$Y_t=\beta_1+\beta_2X_{2t}+\beta_3X_{3t}+\cdots+\beta_kX_{kt}+u_t,\quad t=1,2,\cdots,n(\text{或 }T).$$

自然,u_i 或 u_t 是不可观测的.当含义明显或无须区分横截面或时间序列时,可略去下标 i 或 t 而直接写为(1-3)式.

1.1.1 最小二乘法与经典假设

最小二乘法 是计量经济学中最基本和最常用的参数估计方法.以二元线性回归方程

$$Y_i=\alpha+\beta X_i+u_i,\quad i=1,2,\cdots,n$$

为例.现要作出估计:

$$\hat{Y}_i=a+bX_i.$$

其中,a,b 分别是 α,β 的估计值.最小二乘法要求估计值 a,b 使得对 Y_i 的估计误差平方和 $\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-Y_i)^2$ 最小.令 $e_i=\hat{Y}_i-Y_i$,代表最小二乘(回归)残差(或剩余),则要求

$$\sum_{i=1}^{n}e_i^2=\min\sum_{i=1}^{n}(Y_i-(a+bX_i))^2.$$

对 a,b 求偏导数并令其为零,得所谓**正规方程**(normal equations)

$$\frac{\partial(\sum e_i^2)}{\partial a}=-2\sum(Y_i-a-bX_i)=0\quad(\text{即}\sum e_i=0);$$

$$\frac{\partial(\sum e_i^2)}{\partial b}=-2\sum X_i(Y_i-a-bX_i)=0\quad(\text{即}\sum X_ie_i=0).$$

记

$$x_i=X_i-\bar{X},\quad \bar{X}=\sum X_i/n;$$

$$y_i=Y_i-\bar{Y},\quad \bar{Y}=\sum Y_i/n.$$

解正规方程得

$$b=\frac{\sum x_iy_i}{\sum x_i^2},\quad a=\bar{Y}-b\bar{X},$$

这就是 β 和 α 的最小二乘(LS)估计.

平方和分解 它是对线性回归实行最小二乘法后的一种直观分析.容易推出

$$\sum(Y_i-\bar{Y})^2=\sum(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2+\sum(Y_i-\hat{Y}_i)^2,$$

记作

$$\underset{\text{(总平方和)}}{\text{TSS}} = \underset{\text{(解释平方和)}}{\text{ESS}} + \underset{\text{(剩余平方和)}}{\text{RSS}}$$

从而把 Y 的总平方和分解为由 X 解释了的**解释平方和**以及 X 未能解释的**剩余(残差)平方和**两部分.

定义

$$r^2 = \frac{\text{ESS}}{\text{TSS}} = \frac{\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2}.$$

r^2(或 r_{YX}^2)表示总平方和 TSS 中由 X 解释了或者说由回归解释了的部分,最小二乘法将使这个部分达到最大. $r = \pm\sqrt{r^2}$ 称为**相关系数**. r 取与 b 相同的符号.

经典假设　u_i 的期望值为零,方差为 σ^2(不因 i 而异), u_i 和 $u_j(i \neq j)$ 不相关,且 u_i 与 X_i 无关,即

$$E(u_i) = 0;\quad E(u_iu_j) = \begin{cases} 0 & (i \neq j), \\ \sigma^2 & (i = j); \end{cases}\quad \text{cov}(u_i, X_i) = 0. \tag{1-4}$$

其中, E 是数学期望符号, cov 是协方差符号. 可得到 σ^2(或 σ_u^2)的最小二乘估计

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2}. \tag{1-5}$$

还可以证明这个估计是无偏的,即 $E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$.

上述关于误差项 u_i 的假定常被喻为经典假设.

高斯-马尔可夫定理　在 u_i 满足经典假设的条件下,参数(α, β)的最小二乘估计(a, b)为**最优线性无偏估计**(best linear unbiased estimate,简记 BLUE). 最优是指估计量的抽样方差达到最小,线性是对 Y_i 而言,无偏是指估计量的期望值等于被估参数,而且 $\hat{Y}_i = a + bX_i$ 也是 Y_i 的最优线性无偏估计.

1.1.2　正态性假设与 t 统计量

在上述关于最小二乘法的经典假设(1-4)式的基础上,现再假定 u_i 服从**正态分布**

$$u_i \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, \sigma^2),$$

其中 $N(0, \sigma^2)$ 表示均值为零、方差为 σ^2 的正态分布, i.i.d. 表示独立同分布,即每次观测误差 u_i 都是独立的并有相同的正态概率分布. 这样,将最小二乘估计 b 标准化为 Z,就得到

$$Z = \frac{b - E(b)}{\sigma_b} = \frac{b - \beta}{\sigma_b} \sim N(0, 1),$$

即标准化的 b 服从标准正态分布,其中 σ_b 表示 b 的标准误(差). 可以证明①

① 在 u 的经典假设下,这个方差是在 β 的线性无偏估计中最小的;如再加上 u 的正态性假设,则是所有无偏估计中的最小方差.