Mathematical Modeling and Mathematical Experiments

数学建模与数学实验

主　编　赵　静　但　琦
副主编　严尚安　杨秀文
主　审　汪达成

CHEP 高等教育出版社
Springer 施普林格出版社

数学建模与数学实验

Mathematical Modeling and Mathematical Experiments

主　编　赵　静　但　琦

副主编　严尚安　杨秀文

编委（按姓氏笔划）

付诗禄　严尚安　余建民　但　琦

杨秀文　赵　静　蒋银华　蒋继宏

主　审　汪达成

CHEP
高等教育出版社

Springer
施普林格出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学建模与数学实验/赵静　但琦 主编;严尚安等 编.－北京:高等教育出版社;海德堡:施普林格出版社,2000.11(2001 重印)

ISBN 7-04-009116-X

Ⅰ.数…　Ⅱ.①赵…②但…③严…　Ⅲ.①数学模型－建立模型②数学－实验　Ⅳ.022

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 47667 号

责任编辑:赵天夫 徐　可　**封面设计**:王凌波　**责任印制**:陈伟光

数学建模与数学实验
赵静　但琦　主编

出版发行	高等教育出版社　施普林格出版社		
社　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	**邮政编码**	100009
电　话	010－64054588	**传　真**	010－64014048
网　址	http://www.hep.edu.cn		
经　销	新华书店北京发行所		
印　刷	北京民族印刷厂		
开　本	787×1092　1/16	**版　次**	2000 年 11 月第 1 版
印　张	18.25	**印　次**	2001 年 7 月第 2 次印刷
字　数	450 000	**定　价**	22.00 元

序

一提起数学，人们首先想到的是它的抽象和难懂，以及它的严密的推理和证明．抽象的理论，固然是数学的一个重要方面；但不可否认的是，数学还有另一个重要方面，那就是其广泛的应用性．数学从一开始就是为了实际运用的需要而产生的，数学的很多重大发现（比如微积分）是顺应实际运用的需要而出现的．当然，也有大量的数学成果是来源于解决数学自身提出的问题的努力，这些成果也许不能立即转化成生产力，应用于当时社会实际，但有可能多年以后发现它们有很大的实际效用．随着社会的发展、科学技术的更新，数学的应用越来越广泛．特别是计算机技术的飞速发展和广泛应用，更是导致了数学的越来越广泛深入的应用．在这样的形式下，学校的数学教育，就不能还是按照传统的模式，教师靠粉笔和黑板传授知识，学生靠纸和笔学习知识．数学教学要联系实际应用，要与计算机结合起来，学生不只靠听课和看书接受数学知识，而且要自己动手，借助于计算机，尝试数学的应用，以便在毕业之后能更快更好地适应社会的需要．数学建模和数学实验课程的开设，数学建模竞赛活动的开展，也就适应这一社会需求应运而生了．

数学怎样用来解决实际问题？首先需要用数学的语言来描述实际问题，将它变成一个数学问题，利用现成的数学工具或发展新的数学工具来加以解决．将实际问题变成数学问题的这个过程，就是数学建模．实际上，从数学一开始产生，就是不断在进行数学建模．但是，即使在十年以前，数学建模这个词对于大多数大学生甚至大学教师来说还是陌生的、感觉遥远的．那时我国还只有少数大学在尝试开设数学模型课，开始参加美国的大学生数学建模竞赛．只经过了短短十年，数学建模竞赛已经在全国各高校广泛开展起来，声势浩大，数学建模也随之而广为人知．当然，竞赛只是一种手段，一种形式，而不是目的．但正是通过这种手段和形式，一批又一批大学生受到了培养和锻炼，他们体验了建立数学模型解决实际问题的全过程，体验了合作，体验了创造的艰苦和欢乐，体验了如何使用计算机为解决问题服务，体验了如何将自己的成果写成论文以有利于获得承认和采纳，等等．参加过竞赛的学生普遍感到，得到的收获远不是一张奖状所能表达的．而当他们进入社会之后，竞赛的效果更加显现出来，参加竞赛的经验对于他们适应社会的需要起到了巨大的作用．我们反对应试教育而提倡素质教育．数学建模竞赛也是在“应试”，但这样的“应试”所产生的效果，至少在目前看来，是大有利于学生素质的培养和提高的．这说明，问题不在于是不是有考试这个指挥棒，而在于这个指挥棒指向何方．除了对学生的锻炼和培养外，通过数学建模竞赛，在全国各高校还都形成了一支教练队伍，他们成为推动数学走向应用的一支生力军．比如，本书的作者们就是这样．他们是解放军后勤工程学院的一批年轻教员，他们开设数学建模课程，从 1994 年起开始带领本校学生参加全国大学生数学建模竞赛，并取得了优异的成绩．他们既培养了学生，也提高了自己，在数学教育和应用方面积累起了丰富的经验．本书就是这一经验的结晶．本书的前身是数学建模与数学实验讲义，1997 年由后勤工程学院出版，沿用至今，效果良好．经过进一步修改加工成为本书．

本书的题目是“数学建模与数学实验”. 数学实验是近几年才在我国大学中新开设的一门课程,对于它的宗旨和具体做法,大家都处于摸索阶段,还没有形成一个统一的模式. 我以为,不应当过早形成统一的模式,而应当鼓励各种不同模式进行试点和探索. 但大体统一的是:数学实验既然是实验,就不应当由老师传授知识为主,而应当以学生自己动手为主. 还有一点,数学实验的主要实验“仪器”是计算机,数学实验就是要让学生利用计算机来学习和应用数学. 本书的特点是将数学知识、数学实验与数学建模结合起来,在数学实验中强调如何利用计算机及其软件来求解数学模型. 书中既简要介绍一些最常用的解决实际问题的应用数学知识,又联系实例介绍应用相应的数学知识建立数学模型,并用合适的数学软件包(主要是 MATLAB 软件包)进行求解. 在大多数章的最后一节,结合相应知识和软件包介绍一个大型的、综合的数学建模案例,这些案例主要取材于最近几年全国大学生数学建模竞赛题. 这样的选材和组织,使本书很实用,既适用于作为工科院校数学建模课、数学实验课和数学建模竞赛培训教材,也可作为应用数学知识及软件使用方面的易于入门的参考书.

李尚志
中国科学技术大学数学系
2000 年 11 月

前　言

在面向21世纪的工科数学教学改革中，许多高校对工科数学的教学内容和课程体系进行了一系列的改革尝试，并开设了数学建模课．全国大学生数学建模竞赛活动也开展了多年．随着改革的深入，数学实验的重要性日益显著．在全国高等学校工科数学课程指导委员会的关于工科数学系列课程教学改革的建议中，指出微积分、几何与代数、概率与统计、数学实验是21世纪高级人才应该普遍具备的数学基础．

数学实验就是运用现代计算机技术和软件包来进行数学模型的求解．数学实验课应该是数学建模教学过程中必不可少的一个实践性环节，开设数学实验课是工科数学教学改革的进一步深入和延续，对于推进高等院校数学课程教学内容和课程体系的改革，培养学生具有跨世纪的解决实际问题的能力和创造精神，均会起到积极的作用．

本书集应用数学知识、数学建模和数学实验为一体．既简要介绍一些最常用的解决实际问题的应用数学知识，又联系实例介绍应用相应的数学知识建立数学模型，并用合适的数学软件包（本书主要用MATLAB软件包）来求解模型．在大多数章的最后一节，结合相应知识和软件包介绍一个大型的数学建模案例，这些案例主要取材于最近几年全国大学生数学建模竞赛题．与其他数学建模教材和数学实验课教材相比，本教材更注重应用数学知识以及软件的使用．

本书的作者均是解放军后勤工程学院数学建模教练，他们从1994年开始带领学生参加全国大学生数学建模竞赛，取得了优秀的成绩，积累了丰富的经验．他们将这些年来在数学建模培训中的讲稿经过不断的补充和完善，并编写成了讲义数学建模与数学实验，在解放军后勤工程学院和重庆市一些高校一直使用至今，取得了很好的教学效果，教练员和学生反映良好．本书是在原讲义的基础上进一步修改而成的．本书编写的具体分工如下：赵静撰写第9、11、13、15章及全书MATLAB编程；但琦撰写第7、8章；严尚安撰写第14章；杨秀文撰写第10、12章；蒋银华撰写第1章及附录；余建民撰写第2、5章；付诗禄撰写第3、4、16章；蒋继宏撰写第6章．赵静、严尚安负责全书质量把关；但琦、杨秀文负责组织协调工作．

本书由重庆交通学院汪达成副教授担任主审．解放军后勤工程学院马凡珂副教授、数学教研室许多同事提出了宝贵意见，在此深表谢意．

本书可作为工科院校本科学生数学建模课、数学实验课或数学建模竞赛培训的教材，也可作为应用数学知识方面的参考书．

编　者

2000年11月

目 录

第 1 章　线性规划

优化问题，一般是指用“最好”的方式，使用或分配有限的资源，即劳动力、原材料、机器、资金等，使得费用最小或者利润最大.

建立优化问题的数学模型，首先要确定问题的决策变量，用 n 维向量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 表示，然后构造模型的目标函数 $f(x)$ 和允许取值的范围 $x \in \Omega$，Ω 称可行域，常用一组不等式(或等式)$g_i(x) \leqslant 0(i = 1,2,\cdots,m)$ 来界定，称为**约束条件**. 一般地，这类模型可表述为如下形式：

$$\min_{x} \ z = f(x) \tag{1}$$

$$s.t. \ g_i(x) \leqslant 0 \ (i = 1,2,\cdots,m) \tag{2}$$

由(1)、(2) 组成的模型属于**约束优化**，若只有(1) 式就是**无约束优化**. $f(x)$ 称为**目标函数**，$g_i(x) \leqslant 0$ 称为**约束条件**.

在优化模型中，如果目标函数 $f(x)$ 和约束条件中的 $g_i(x)$ 都是线性函数，则该模型称为**线性规划**.

1.1　线性规划模型

建立线性规划模型有三个基本步骤：

第一步，找出待定的未知变量(决策变量)，并用代数符号表示它们.

第二步，找出问题中所有的限制或约束，写出未知变量的线性方程或线性不等式.

第三步，找到模型的目标或判据，写成决策变量的线性函数，以便求出其最大值或最小值.

例 1　生产炊事用具需要两种资源 —— 劳动力和原材料，某公司制定生产计划，生产三种不同产品，生产管理部门提供的数据如下：

	A	B	C
劳动力(h/件)	7	3	6
原材料(kg/件)	4	4	5
利润(元/件)	4	2	3

每天供应原材料 200 kg，每天可供使用的劳动力为 150 h. 建立线性规划模型，使总收益最大，并求各种产品的日产量.

解　第一步，确定决策变量. 要求的未知变量是三个产品的日产量，用代数符号表示它们，即用 x_A, x_B, x_C 分别表示 A, B, C 三种产品的日产量.

第二步，确定约束条件. 在这个问题中，约束条件是可用劳动力和原材料的限制.

$$原材料：4x_A + 4x_B + 5x_C < 200$$

$$劳动力：7x_A + 3x_B + 6x_C < 150$$

第三步，确定目标函数. 本问题的目标是使整个销售利润

$$Z = 4x_A + 2x_B + 3x_C$$

最大.根据以上三步可知,这个生产组合问题的线性规划为:

$$\max Z = 4x_A + 2x_B + 3x_C$$
$$s.t.\ 4x_A + 4x_B + 5x_C < 200$$
$$7x_A + 3x_B + 6x_C < 150$$

例2　一家广告公司想在电视、广播上做广告,其目的是尽可能多地招徕顾客.下面是市场调查结果:

	电视		无线电广播	杂志
	白天	最佳时间		
一次广告费用(千元)	40	75	30	15
受每次广告影响的顾客数(千人)	400	900	500	200
受每次广告影响的女顾客数(千人)	300	400	200	100

这家公司希望广告费用不超过 800(千元),还要求:(1) 至少要有二百万妇女收看广告;(2) 电视广告费用不超过 500(千元);(3) 电视广告白天至少播出 3 次,最佳时间至少播出 2 次;(4) 通过广播、杂志做的广告要重复 5 到 10 次.

解　令 x_1, x_2, x_3, x_4 分别表示白天电视、最佳时间电视、广播、杂志广告的次数.则:广告经费的约束条件为:

$$40x_1 + 75x_2 + 30x_3 + 15x_4 < 800$$

受广告影响的女顾客数的约束条件为:

$$300x_1 + 400x_2 + 200x_3 + 100x_4 > 2000$$

电视广告的约束条件为:

$$40x_1 + 75x_2 < 500, \quad x_1 > 3, x_2 > 2$$

由于广播和杂志广告的次数都在 5 到 10 之间,于是

$$5 < x_3 < 10, \quad 5 < x_4 < 10$$

潜在的顾客数:$Z = 400x_1 + 900x_2 + 500x_3 + 200x_4$.故完整的线性规划如下:

$$\begin{aligned}
\max Z = {} & 400x_1 + 900x_2 + 500x_3 + 200x_4 \\
s.t.\ & 40x_1 + 75x_2 + 30x_3 + 15x_4 < 800 \\
& 300x_1 + 400x_2 + 200x_3 + 100x_4 > 2000 \\
& 40x_1 + 75x_2 < 500 \\
& x_1 > 3 \\
& x_2 > 2 \\
& x_3 > 5 \\
& x_3 < 10 \\
& x_4 > 5 \\
& x_4 < 10
\end{aligned}$$

1.2 单纯形算法

1.2.1 标准型线性规划

下面是具有 m 个约束条件、n 个变量的线性规划问题的标准形式：

$$
\begin{aligned}
\min f &= c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
s.t.\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0
\end{aligned} \tag{1}
$$

这种标准形式的主要特点是：

1. 目标函数取最小值；
2. 全部约束都用等式表示；
3. 全部变量非负.

用矩阵向量符号，可更简洁地表示标准线性规划问题：

$$
\begin{aligned}
\min\quad & f = cx \\
s.t.\ & Ax = b \\
& x \geqslant 0
\end{aligned} \tag{2}
$$

这里 A 是 $(m \times n)$ 矩阵，x 是 $(n \times 1)$ 列向量，b 是 $m \times 1$ 列向量，c 是 $(1 \times n)$ 行向量. 即：

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}
$$

$$c = [c_1, c_2, \cdots, c_n]$$

称 A 为该线性规划的**系数矩阵**，x 为**决策向量**，b 为**利润(费用)向量**.

任何一般线性规划，通过形式变换和添加松弛变量，都可以化为标准型线性规划，因而可以基于标准型线性规划进行讨论.

1.2.2 用单纯形法解线性规划问题

1. 基本概念

规划(1)、(2) 对应方程组

$$Ax = b, x \geqslant 0 \tag{3}$$

方程组(3) 的解称为(1) 的**可行解**，显然，(1) 也可表为：

$$\min f = \{cx \mid Ax = b, x \geqslant 0\}$$

现在暂时不考虑 $x \geqslant 0$，只考虑方程

$$Ax = b \tag{4}$$

假定方程(4) 没有多余的方程,即 A 的秩为 $m(m < n)$. 用 P_j 表示矩阵 A 的第 j 列,那么方程(3) 也可写成:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j P_j = b \tag{5}$$

设 $x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{im}$ 是(5) 的 m 个变量,且它们对应的 m 个列向量 $P_{i1}, P_{i2}, \cdots, P_{im}$ 线性无关,则称它们是线性规划的一组**基**. 在选定了一组基 $x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{im}$ 后,属于基的变量称为**基变量**,其它的则称为**非基变量**,称 $B = (P_{i1}, P_{i2}, \cdots, P_{im})$ 为**基阵**.

如果在方程(5) 中,选定了一组基 $x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{im}$ 后,令所有的非基变量的值都取零,则(5) 成为:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} P_{ij} = b \tag{6}$$

由线性方程组的理论,可知(6) 有唯一解 $(x_{i1}^0, x_{i2}^0, \cdots, x_{im}^0)$, 显然, $x_{i1} = x_{i1}^0, x_{i2} = x_{i2}^0, \cdots, x_{im} = x_{im}^0, x_j = 0, j \neq j_1 \cdots, j_m$, 是方程组(5) 的一组解,称之为由基 $x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{im}$ 对应的**基解**,若它的所有变量的值都非负,则称其为**基可行解**,此时,称基 $x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{im}$ 为**可行基**.

2. 最优基解的存在性定理

定理 1 如果线性规划(1) 有可行解,那么一定有基可行解.

定理 2 如果线性规划(1) 有最优解,那么一定存在一个基可行解是最优解.

以上定理说明了如果所给规划(1) 有最优解,只要从基可行解中找最优解就行了. 因为基可行解的个数是有限的,只要把所有的基可行解一一检查,就可以在有限次以后确定最优解或者断定无解. 但是要检查所有的基可行解计算量太大,单纯形法是先设法找出一组可行基,如果是最优解,则问题已经解决;如果不是,就设法转到另一组更好些的可行基(即它对应的基可行解使目标函数取更小的值),……,这样做下去,直到得到问题的答案为止.

3. 基可行解是最优解的判定准则

记 $A = (B, N)$,其中 $B = (P_1, P_2, \cdots, P_m)$ 是基阵, $N = (P_{m+1}, P_{m+2}, \cdots, P_n)$,向量 x 和 c 也相应地分成两段 $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$, $c = (c_B, c_N)$,则标准线性规划可变为:

$$\begin{aligned} &\min f \\ &s.t. f - c_B x_B - c_N x_N = 0 \\ &\quad\ B x_B + N x_N = b \\ &\quad\ x \geqslant 0 \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} &\min f \\ &s.t. x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b \\ &\quad\ f + 0 \cdot x_B + (c_B B^{-1} N - c_N) x_N = c_B B^{-1} b \\ &\quad\ x \geqslant 0 \end{aligned} \tag{7}$$

令

$$B^{-1}b=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_m\end{bmatrix},\quad B^{-1}N=\begin{bmatrix}\beta_{1,m+1} & \beta_{1,m+2} & \cdots & \beta_{1,n}\\ \beta_{2,m+1} & \beta_{2,m+2} & \cdots & \beta_{2,n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \beta_{m,m+1} & \beta_{m,m+2} & \cdots & \beta_{m,n}\end{bmatrix}$$

那么(7)式可写成

$$\min f$$
$$s.t.\begin{cases}x_1=\alpha_1-\beta_{1,m+1}x_{m+1}-\cdots-\beta_{1,n}x_n\\ x_2=\alpha_2-\beta_{2,m+1}x_{m+1}-\cdots-\beta_{2,n}x_n\\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots\\ x_m=\alpha_m-\beta_{m,m+1}x_{m+1}-\cdots-\beta_{m,n}x_n\end{cases}\tag{7'}$$
$$f+0\cdot x_B+(c_BB^{-1}N-c_N)x_N=c_BB^{-1}b$$
$$x\geqslant 0$$

令 $\lambda_j=c_BB^{-1}P_j-c_j,j=m+1,m+2,\cdots,n$,则(7)可写成

$$\begin{aligned}&\min f\\ &s.t.\,x_B+B^{-1}Nx_N=B^{-1}b\\ &\quad f+0\cdot x_B+\sum_{j=m+1}^{n}\lambda_jx_j=c_BB^{-1}b\\ &\quad x\geqslant 0\end{aligned}\tag{8}$$

或

$$\begin{aligned}&\min f\\ &s.t.\,x_i+\sum_{j=m+1}^{n}\beta_{ij}x_j=\alpha_i\quad i=1,2,\cdots,m\\ &\quad f+0\cdot x_B+\sum_{j=m+1}^{n}\lambda_jx_j=c_BB^{-1}b\\ &\quad x\geqslant 0\end{aligned}\tag{8'}$$

(8)和(8′)式称为(1)式的典式.

定理3 设$(x_1,x_2,\cdots,x_m)$是规划(1)的一个可行基,B是它对应的基阵,(8′)是它的典式,如果(8)中的$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$都不大于零,即有对应$\lambda_{m+1}\leqslant 0,\lambda_{m+2}\leqslant 0,\cdots,\lambda_n\leqslant 0$,则基$(x_1,x_2,\cdots,x_m)$对应的基可行解$X^0=\begin{bmatrix}B^{-1}b\\ 0\end{bmatrix}$是最优解.

4.基可行解的改进

定理4 设$(x_1,x_2,\cdots,x_m)$是规划(1)的一个可行基,B是它对应的基阵,(8′)是它的典式,如果存在$\lambda_{m+k}>0$,使

(1)$\beta_{1,m+k},\beta_{2,m+k},\cdots,\beta_{m,m+k}$中至少有一个大于零;

(2)所有的$\alpha_i>0,i=1,2,\cdots,m$,

则一定存在另一个可行基,它对应的基可行解代入目标函数所得的值更小(也就是说,新的基可行解比基$(x_1,x_2,\cdots,x_m)$对应的基可行解更“好”).此时,新的基与原有的基有$(m-1)$个

变量是一样的，只有一个变量不同.

令 $\theta_0 = \min\limits_{\beta_{i,m+k}>0}\left\{\dfrac{\alpha_i}{\beta_{i,m+k}}\right\} = \dfrac{\alpha_l}{\beta_{l,m+k}}$，则把 x_l 从原有的基中取出来，把 x_{m+k} 加进后得到的

$$(x_1, x_2, \cdots, x_l, x_{m+k}, x_{l+1}, \cdots, x_m)$$

仍是基，即是所要找的新基.

例 1 用单纯形法解线性规划

$$\begin{aligned}
\min \quad & f = x_1 - 2x_2 + x_3 \\
s.t. \quad & x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 10 \\
& 2x_1 - x_2 + 4x_3 \leqslant 8 \\
& -x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leqslant 4 \\
& x_i \geqslant 0, i = 1,2,3,4
\end{aligned}$$

解 (1) 引入松驰变量化为标准形

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \qquad\qquad &= 10 \\
2x_1 - x_2 + 4x_3 \qquad + x_5 \qquad &= 8 \\
-x_1 + 2x_2 - 4x_3 \qquad\qquad + x_6 &= 4 \\
x_i \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,6 &
\end{aligned}$$

$$f = x_1 - 2x_2 + x_3, \quad 或 \quad f - x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

以 x_4, x_5, x_6 为基，基解为(0,0,0,10,8,4)，显然为基可行解，上式即为其典式.

(2) 在 x_4, x_5, x_6 的典式中，$\lambda_2 = 2 > 0$，故选 x_2 入基，且

$$\theta_0 = \min_{\beta_{i,m+k}>0}\left\{\frac{\alpha_i}{\beta_{i,m+k}}\right\} = \min\left\{\frac{10}{1}, \frac{4}{2}\right\} = \frac{4}{2}$$

故选 x_6 出基，且此时 x_2 应取 $x_2 = 2$，即新的基是(x_4, x_5, x_2).

将上述典式的第三个方程乘以$\dfrac{1}{2}$，再用它消去其它方程中的 x_2，可得新的基(x_4, x_5, x_2)典式：

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4 \qquad - \frac{1}{2}x_6 &= 8 \\
\frac{3}{2}x_1 + 0x_2 + 2x_3 \qquad + x_5 + \frac{1}{2}x_6 &= 10 \\
-\frac{1}{2}x_1 + x_2 - 2x_3 \qquad\qquad + \frac{1}{2}x_6 &= 2 \\
f + 0x_1 + 0x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 - x_6 &= -4
\end{aligned}$$

(3) 在 x_4, x_5, x_2 的典式中，$\lambda_3 = 3 > 0$，故选 x_3 入基，且

$$\theta_0 = \min_{\beta_{i,m+k}>0}\left\{\frac{\alpha_i}{\beta_{i,m+k}}\right\} = \min\left\{\frac{10}{2}\right\} = \frac{10}{2} = 5$$

故选 x_5 出基，且此时 x_3 应取 $x_3 = 5$，即新的基是(x_4, x_3, x_2).

将上述典式的第二个方程乘以$\dfrac{1}{2}$，再用它消去其它方程中的 x_3，可得新的基(x_4, x_3, x_2)典式：

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}x_1+0x_2+0x_3+\ \ x_4\qquad\quad -\frac{1}{2}x_6 &= \ 8\\
\frac{3}{4}x_1+0x_2+\ \ x_3\qquad\quad +\frac{1}{2}x_5+\frac{1}{4}x_6 &= \ 5\\
x_1+\ \ x_2+0x_3\qquad\quad +\ \ x_5+\ \ x_6 &= 12\\
f-\frac{9}{4}x_1+0x_2+0x_3+0x_4-\frac{3}{2}x_5-\frac{7}{4}x_6 &= -19
\end{aligned}$$

此时,$\lambda_1=-\frac{9}{4}x_1,\lambda_2=0,\lambda_3=0,\lambda_4=0,\lambda_5=-\frac{3}{2},\lambda_6=-\frac{7}{4}$,故$(x_4,x_3,x_2)$为最优基,最优解为(0,12,5,8,0,0),最优值为 - 19.

1.2.3 两阶段法找第一个初始可行解

单纯形法是从一个基可行解开始寻找最优解,如果没有初始的基可行解,就不能建立初始单纯形表.有时,给出的线性规划有明显的初始基可行解,但实际情况并非如此,这就需要首先求初始基可行解.下面将要介绍的方法是二阶段法.

考虑标准线性规划(1),即:

$$\min f=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

$$s.t.\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\tag{9}$$

$$x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,\cdots,x_n\geqslant 0$$

加入人造变量 $x_{n+1},x_{n+2},\cdots,x_{n+m}$,构造新规划:

$$\min z=x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{n+m}$$

$$s.t.\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+x_{n+1}=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+x_{n+2}=b_2\\ \qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n+x_{n+m}=b_m\end{cases}\tag{10}$$

显然,若规划(9)有可行解 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,则规划(10)有最优解 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,0,\cdots,0)$,且此时规划(10)的最优值为0,反之亦然.故找到(10)的最优解即得规划(9)的基可行解.这就是所谓的"**二阶段法**":第一阶段通过构造的新规划找到一个原问题的基可行解,第二阶段找原问题的最优解.

例 2 解线性规划

$$\min f=5x_1+21x_3$$

$$s.t.\begin{cases}x_1-x_2+6x_3-x_4=2\\ x_1+x_2+2x_3-x_5=1\end{cases}$$

$$x_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,5$$

解 加入人造变量,得

$$\min z = x_6 + x_7 = 3 - 2x_1 - 8x_3 + x_4 + x_5$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 \quad + x_6 \quad = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \quad - x_5 \quad + x_7 = 1 \end{cases}$$

由此可得单纯形表：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_6	1	-1	6	-1	0	1	0	2
x_7	1	1	2	0	-1	0	1	1
z	2	0	8	-1	-1	0	0	3
f	-5	0	-21	0	0	0	0	0

这张表比普通单纯表多了一行，就是它既有与目标函数 z 对应的一行，又有与原目标函数 f 对应的行. 我们规定，在进行单纯形迭代变换时，这两行都要进行变换. 这样做的好处是，当找到了(10)的基可行解(即找到了原问题的基可行解)时，把表中与 z 对应的行及人造变量对应的列划去，紧接着就可以往下计算，不必再重新求典式.

经迭代得单纯形表：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_3	$\frac{1}{4}$	0	1	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
Z	0	0	0	0	0	0	0	0
f	$\frac{1}{4}$	0	0	$-\frac{21}{8}$	$-\frac{21}{8}$	0	0	$\frac{63}{8}$

此时，已得新规划的最优解$\left(0,\frac{1}{4},\frac{3}{8},0,0,0,0\right)$(最优值为0)，同时，得到原规划的第一个可行基 x_2,x_3 和相应的基本可行解. 去掉 z 所在的行和人造变量 x_6,x_7 所在的列后进入第二阶段，可得原规划的第一个单纯形表为：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	$\frac{1}{4}$	0	1	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
f	$\frac{1}{4}$	0	0	$-\frac{21}{8}$	$-\frac{21}{8}$	$\frac{63}{8}$

经用单纯形法迭代得：最优解$\left(0,\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$，最优值 $f_{\min} = \frac{31}{4}$.