

西方 数学哲学

夏基松 郑毓信



西方数学哲学

夏基松 郑毓信

人民出版社

西方数学哲学
XIFANG SHUXUE ZHIXUE

夏基松 郑毓信

人民出版社出版 新华书店发行
中国铁道出版社印刷厂印刷

850 × 1168 毫米 32 开本 10.5 印张 249,000 字
1986 年 1 月第 1 版 1986 年 1 月北京第 1 次印刷

印数 0,001 — 5,300

书号 2001 · 297 定价: 2.10 元

目 录

导 言	1
第一章 西方数学哲学的早期研究	7
第一节 古希腊的数学哲学思想	7
一、毕达哥拉斯学派的“唯数论”	7
二、柏拉图的数学哲学思想	10
三、亚里士多德的数学哲学思想	13
第二节 十六——十八世纪的数学哲学研究	18
一、莱布尼兹的数学哲学思想	19
二、休谟的数学哲学思想	22
三、康德的数学哲学思想	24
第三节 非欧几何的建立与关于数学绝对真理性的信念的崩溃	34
一、非欧几何的建立	34
二、数学哲学研究的新发展	37
第二章 数学基础问题	39
第一节 数学的“算术化”	40
第二节 逻辑主义	45
一、前期的逻辑主义	48
二、后期的逻辑主义	53
三、一般评论	57

第三节 直觉主义	66
一、直觉主义对古典数学的批判	70
二、直觉主义数学的构造	76
三、一般评论	82
第四节 希尔伯特的形式主义	90
一、形式的公理化研究方法	90
二、希尔伯特规划	94
三、一般评论	105
第五节 关于数学基础研究的一般评论	115
一、理性主义的立场和思想上的形而上学性	116
二、关于数学基础研究的一般评论	118
第三章 悖论及其分析	129
第一节 悖论和数学的“基础危机”	129
一、“毕达哥拉斯悖论”和数学的第一次“危机”	130
二、贝克莱悖论和数学的第二次“危机”	134
三、集合论悖论和数学的第三次“危机”	136
第二节 西方的悖论研究	143
一、罗素对悖论的一般分析	143
二、罗素的“量性限制理论”和公理化集合论的研究	144
三、罗素的“非集合理论”和分支类型论	148
四、兰姆赛的简单类型论	151
五、其他的方案	153
六、塔斯基的语义学研究	157
七、悖论和对角线方法	162
第三节 悖论的定义、实质和解决的前景	167
一、悖论的定义	167
二、悖论的实质	170

三、悖论的不可避免性和相对性	188
四、悖论研究的意义	195
第四章 数学的本体论问题	201
第一节 数学的本体论问题及其争论焦点	201
一、历史的渊源	201
二、问题的提出	203
三、数学本体论问题的争论焦点	207
第二节 现代数学中的实在论	218
一、康托的柏拉图主义观点	219
二、哥德尔的客观主义观点	222
三、普特南的实在论观点	224
四、实在论对数学研究的意义	230
第三节 现代数学中的概念论	233
一、罗素的概念论及其“非集合理论”	234
二、直觉主义的概念论及其“构造性”要求	240
第四节 形式主义	244
一、形式主义的数学观	244
二、形式主义的不同类型	247
三、形式主义对数学研究的意义	248
四、形式主义和实在论的争论	249
第五节 反本体论和实用主义的观点	254
一、反本体论	254
二、实用主义的观点	257
第六节 数学对象的客观性和抽象性在实践中的统一	259
一、数学对象的辩证性	260
二、关于实在论的分析和评论	262
三、关于形式主义的分析 and 评论	264

四、数学对象的客观性和抽象性在实践中的统一	268
第五章 数学的真理性问题	270
第一节 数学的真理性及真理性问题的意义	271
一、数学的真理性及其可认识性	271
二、数学真理性问题的意义	277
第二节 数学真理的客观性	286
一、彭加莱的数学真理观	286
二、直觉主义的真理观	295
三、逻辑主义的真理观以及维特根斯坦关 于逻辑真理性的分析	296
四、分析真理论	300
五、数学真理的客观性	305
第三节 数学真理的经验性	312
一、狭隘经验论的真理观	313
二、现代数学哲学中的先验论观点	314
三、经验主义的“复兴”	316
结束语	321
后 记	329

导 言

数学哲学，简言之，就是对数学的哲学分析。本书围绕数学哲学的基本问题——数学基础问题、悖论问题、数学的本体论问题，以及数学的真理性问题——对西方的数学哲学，特别是现代西方的数学哲学的主要流派及其观点，作一个比较系统的介绍和分析；同时，也力图以辩证唯物主义的观点对这些问题作出评价。作者希望这对于加强我国的数学哲学的研究和现代西方哲学的研究能起一点促进作用。

和任何其他理论的发展一样，数学哲学也有自己的发展历史。在19世纪中期以前，人们普遍认为数学具有无可怀疑的真理性，因此，哲学家们都感到有必要对此作出解释，并从中引出一般的哲学结论。这样，数学哲学就作为一般哲学的一个侧面、或一个重要组成部分得到了一定的发展。了解数学哲学的这种早期发展是重要的。因为，在这种早期研究中包含了许多可以看成现代数学哲学观念萌芽的重要思想；而且，了解著名哲学家（如柏拉图、亚里士多德、笛卡尔、莱布尼兹、休谟、康德等）的数学哲学思想，也有助于深入研究他们的整个的哲学思想。因此，在第一章中我们首先对数学哲学的早期发展作一番回顾。

和早期的数学哲学研究相比，现代数学哲学研究的内容要丰富得多。数学哲学的这种发展在本质上是由数学自身的发展所决定的。具体地说，正是由于数学自身的发展，才直接导致了对于数学基础、悖论、本体论和真理性等问题的深入研究。

苏联著名数学家A·Д·亚历山大洛夫曾对数学的发展作过一个十分生动的比喻。他说：“正如一棵榉树在健壮的生长中，用新的树层使老枝变粗，长出新枝，枝叶往上长高，根又往下长深一样，数学在自己的发展过程中把新的材料添加到已经形成的领域之中，形成新的方向，升到新的抽象高度，并在基础方面更加深化。”（A·Д·亚历山大洛夫等著：《数学——它的内容、方法和意义》，第一卷，1958年，科学出版社，第71—72页。）今天，数学可以说已经长成一棵参天大树了；可是，什么是它的可靠基础呢？是数学外部的某种成分、还是数学内部的某种基本理论？又怎样才能把全部数学或至少是其大部分奠基在一个可靠的基础上呢？这就是数学基础研究所要解决的问题。

由于哲学观点的不同，西方数学哲学家提出了各种不同的数学基础理论。逻辑主义者认为，数学的基础在于逻辑，直觉主义者则认为数学的基础是人类所固有的直觉能力。逻辑主义和直觉主义的这两种观点可以分别追溯到莱布尼兹和康德；但是，只是经过了弗雷格、罗素及布鲁沃等人的努力，上述的一般哲学思想才被发展成为数学研究的具体规划，并最终形成了现代数学基础研究中的两个重要流派。由于逻辑主义和直觉主义的基础研究不仅是一种使数学奠基于“可靠”基础上的工作，而且也包含了对于已有数学工作的“批判”和“改造”，因此在数学家中就引起了很大的震动。其中，作为对于逻辑主义和直觉主义的反对，德国著名数学家希尔伯特也提出了自己的基础研究规划。希尔伯特认为，数学不需要任何附加的前提，因为数学本身就包含了绝对可靠的成分——有限的数学。因此，在希尔伯特看来，基础研究的主要任务就在于：通过给非有限的数学以形式的解释，把全部数学奠基于有限的数学——对此，我们称为“希尔伯特的形式主义”观点。

逻辑主义、直觉主义及希尔伯特的基础研究规划是他们的数学哲学思想的具体表现，但这种研究规划毕竟又不同于一般的哲学思考。揭示这两者的联系和区别，并进而对逻辑主义、直觉主义和希尔伯特的形式主义作出客观的、实事求是的分析和评价，就是本书第二章的内容。

严格性被人们公认为数学的一个主要特点，以致数学被说成是一种“冷而严肃的美”。罗素说：“数学，如果正确地看它，不但拥有真理，而且也具有至高的美，正象雕刻的美，是一种冷而严肃的美，这种美不是投合我们天性的微弱的方面，这种美没有绘画或音乐的那些华丽的装饰，它可以纯净到崇高的地步，能够达到严格的只有最伟大的艺术才能显示的那种完满的境地。”（罗素：《我的哲学的发展》，1982年，商务印书馆，第193页。）但是，如此完美无缺的数学竟然也有瑕疵，这就是悖论。

笼统地说，悖论是一种导致了矛盾的推理过程。由于悖论历来被认为是一种“文字游戏”，悖论在数学中的发现就使“严肃”的数学带上了揶揄的成分；又由于人们普遍地认为悖论是一种认识错误，悖论在数学中的发现也就被认为表明了数学并不是完全可靠的。因此，就难怪数学家们要为悖论的发现而感到烦恼、甚至产生沮丧的情绪了。如M·克莱因说：“作为逻辑结构的数学已处于一种悲惨的境地，数学家以向往的心情回顾这些矛盾（指悖论——引者注）被认识以前的美好时代。”（M·克莱因：《古今数学思想》第四册，1981年，上海科学技术出版社，第293页。）在西方的一些数学哲学家和数学史家看来，悖论在数学中的发现甚至就标志着数学的“危机”。

为了排除悖论对数学所造成的威胁，人们进行了大量的研究。由于这种研究的出发点是对悖论的哲学分析，因此，悖论的研究就构成了现代数学哲学的一个重要内容。在一些数学哲学家（如

H·普特南)看来,悖论甚至是数学哲学研究中最困难的问题。

(参见H·普特南:《数学、物质和方法》〔《Mathematics, Matter and Method》,1979,Cambridge,P.56.〕)

数学中究竟发现了哪些悖论?这些悖论怎样才能得到排除?数学悖论的问题能否得到彻底的解决?对这些问题的讨论是本书第三章的内容。其中,通过对悖论及西方的悖论研究的剖析,我们着重讨论了数学悖论的实质问题。我们认为,数学悖论实质上是客观实际和主观认识、特别是对对象本身的辩证性与思维方法的形而上学性及方法的形式特性(形式逻辑化)的矛盾的集中表现。因此,既没有绝对意义上的悖论,也不可能悖论问题在绝对意义上的彻底解决。

谁能见到“一”?我们只能见到某一个人、某一棵树,而决不能见到一个抽象的“一”。这一简单的事例就清楚地表明了数学的又一特性:抽象性。而与这种抽象性直接相联系的就是数学研究对象(如几何图形,数量,集合等)的实在性问题。即,数学的研究对象是否是一种真实的存在?如果是的话,这是什么意义下的存在?如果不是的话,又应当怎样来看待数学命题的意义?

上述的数学本体论问题可以看成是一般哲学研究中关于“共相”的实在性问题的研究的一个侧面。而且,现代西方在数学本体论问题上的两种主要观点(实在论和形式主义)也可以分别看成是中世纪的实在论和唯名论在数学领域内的继续和发展。实在论者认为,数学的研究对象是一种独立的、不依赖人类思维的客观存在;另外,形式主义者则认为,数学的研究对象只是一种无意义的符号,对此没有、也不必要作出解释。但是,这种关于数学本体论的现代研究已不是一种纯粹的哲学研究,它直接影响到了数学的发展。因为,现代数学哲学中关于本体论问题的研究集中在无限性对象的实在性问题上,而无限观的分歧则又直接影响

到数学家在自己的数学研究中所采取的立场和方法。如美国著名数理逻辑学家P·J·柯亨(P·J·Cohen)说:“对于无穷集合的态度始终是数学家之间的根本分界线所在。”(P·J·柯亨:《关于集合论基础的评论》[《Comments on the Foundations of Set Theory》],载《公理化集合论》《Axiomatic Set Theory》,red. by. D. S. Scott.])

一般地说,尽管西方的数学哲学家在数学的本体论问题上提出了各种不同的理论,数学家们也因为无限观的不同而区分为“实无限论者”、“潜无限论”和“方法论的实无限论者”,但所有这些理论和观点都具有严重的错误和缺陷。因此,正如著名数学家A·鲁滨逊(A·Robinson)所说:“这仍然是数学哲学的一个持久的任务,就是要获得关于无限的更深的理解。”(A·鲁滨逊:《形式主义 64》[《Formalism 64》],载《逻辑、方法论和科学哲学》[《Logic, Methodology and Philosophy of Science》,1964,ed. by Y. Bar hillel, North-Holland Pub. Co., P. 242.])以辩证唯物主义的观点对西方在数学本体论问题上的主要流派及其观点进行述评,并进而对问题本身作出分析,这就是本书第四章的内容。

数学真理性问题的研究是对数学真理的哲学分析。从数学哲学的历史发展来看,数学真理观曾经历了根本性的变化。在19世纪二十年代以前,数学真理普遍地被认为是一种绝对真理;然而,由于非欧几何的建立,这种关于数学绝对真理性的传统观念崩溃了。既然两种互不相容的几何理论都应当被看成是合理的数学理论,那数学命题当然就不具有什么绝对真理性。那么,应当怎样来认识数学的真理性呢?数学哲学家们不得不开始了新的思考,而这种真理观的变化则又直接导致了数学观的变化。这样,由于数学发展的直接促进,在非欧几何建立以后,数学哲学的研究就

进入了一个新的时期。

一般地说，现代西方关于数学真理性问题的研究主要是围绕着先天与经验、必然与偶然、分析与综合这样三对范畴进行的。其中，有的数学哲学家片面地夸大了数学的特殊性，以致认为数学真理是不包括事实内容的、先天的、绝对的，从而抹杀了真理和谬误、科学和迷信之间的界限；有的数学哲学家虽然肯定了数学真理的客观性、经验性和相对性，但却片面夸大了数学真理与其它科学真理的共同性，不懂得数学的特殊性，从而也就不能对数学的真理性问题作出正确的解释。

数学究竟是否具有真理性？如果有的话，又是一种什么样的真理性？集中地对上述问题进行分析，并对西方在数学真理性问题上的各种观点进行介绍和评论，就是本书第五章的内容。

在全书的讨论中，我们一般都先对西方的有关观点和理论进行介绍，然后，再对这些观点或理论及问题本身作出我们的评价和分析。一般地说，我们认为，尽管数学哲学的研究已经有了较长的历史，达到了一定的深度，并取得了不少的技术性成果，但就其所提出的基本理论而言，又都具有严重的错误和缺陷。西方数学哲学研究的这种局限性当然不是偶然的，而是由其错误的哲学立场所决定的。因此，本书的主要目的就在于：通过对西方数学哲学的理论分析，努力吸取其中的积极成果，批判其中的错误成分，以丰富和发展辩证唯物主义的数学观。

第一章 西方数学哲学的 早期研究

我们以非欧几何的建立（19世纪二十年代）为界来区分数学哲学的早期研究和现代研究。就数学哲学的早期研究而言，一个主要特点是对于数学绝对真理性的确认。例如，欧氏几何和算术理论在当时就分别被看成是关于空间和数量关系的绝对真理。由于哲学观点的不同，不同哲学家对数学绝对真理性的解释是各不相同的，因而在数学哲学中就形成了不同的理论和派别。下面我们分别对古希腊和16—18世纪的西方数学哲学作一个介绍。

第一节 古希腊的数学哲学思想

早在古希腊时期，哲学就开始了自己的历史发展。例如，围绕世界的本原问题，古希腊的哲学家们就提出了各种各样的唯物主义和唯心主义的哲学理论，并在相互之间展开了激烈的斗争。这种斗争在数学领域内也有直接的反映，这就是关于数学研究对象的实在性问题的讨论。古希腊最伟大的两位哲学家柏拉图和亚里士多德在这一问题上提出了截然相反的两种理论，而这事实上就是现代数学哲学中关于数学本体论问题的研究的最早渊源。

一、毕达哥拉斯学派的“唯数论”

为了弄清柏拉图或亚里士多德在数学本体论问题上的观点，

我们先来对毕达哥拉斯学派的“唯数论”观点作一简单的介绍。

毕达哥拉斯学派（其创始人毕达哥拉斯的鼎盛年约在公元前532—526年）特别重视事物的定量研究。因为，他们发现，很多事物和现象都可以从数量的方面来进行说明和解释。例如，毕达哥拉斯学派的成员发现，和声学就可以借助弦长的数量关系而得到说明。具体地说，产生各种谐音的弦的长度都成整数比。例如，当两根绷得一样紧的弦的长度的比是2比1时，就会产生相差八度的谐音；如果两根弦长的比为3比2，那么就会发出另一种谐音：短弦发出的音比长弦发出的音高五度；等等。据说，上述发现给毕达哥拉斯学派留下了极为深刻的印象。他们认为自己终于抓住了世界最终的奥秘，那就是：世界上的一切事物和现象都可以、并且只能通过数学得到解释。这也就是说，宇宙的本质就在于数的和谐性。

基于上述信念，毕达哥拉斯学派努力从事数的研究。亚里士多德说：“所谓毕达哥拉斯派曾经从事数学的研究，并且第一个推进了这一个知识部门。他们把全部时间用在这种研究上”。（《古希腊罗马哲学》1961年，商务印书馆，第37页。）但是，毕达哥拉斯学派的数学研究的主要目的并不在于发现各种具体的数学规律，而是希望能揭示出数学规律的“普遍涵义”，并由此而对世上的事物和现象作出解释。因此，毕达哥拉斯学派的数学研究就带有强烈的神秘色彩^①，而他们的哲学则可以说成是一种“唯数论”的哲学。

^① 例如，毕达哥拉斯学派曾从事“完全数”的研究（一个自然数称为是“完全的”，如果它的各个真因数的和，恰好就等于这个数本身。例如，28就是一个“完全数”，因为 $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$ ）。因为，在他们看来，这种数是具有一种特殊的神秘力量的。另外，“10”也被毕达哥拉斯学派看成是一个神奇的数目（因为它包含了其他的一切数字），因此，他们认为“天体的数目也应当是十个”，“但是只有九个是看得见的，于是他们就捏造出第十个天体，称之为‘对地’。”（《古希腊罗马哲学》，第37—38页。）

毕达哥拉斯学派不仅企图以数的和谐性来解释一切事物和现象(如公元前五世纪毕达哥拉斯学派的一位著名成员菲洛罗斯说：“如果没有数和数的性质，世界上任何事物或其与其它事物的关系都不能为人们所清楚地了解……你不仅可以在鬼神的事务上，而且可以在人间的一切行动和思想乃至一切行业和音乐中看到数的力量。”〔M·克莱因：《古今数学思想》第一册，1979年，上海科学技术出版社，第168页。〕)而且，作为这种理论的逻辑发展，他们还提出了“数是万物的本原”的思想。

众所周知，古希腊哲学从米利都学派开始，就提出了万物的本原的问题。所谓“本原”，就是指万物都由它构成，最初由它产生，最后又复归于它的那个东西。古希腊的哲学家们提出了各种不同的“本原说”。如泰利士认为宇宙的本原是水，阿那克西美尼说是气，赫拉克利特说是火，等等。但是，按照毕达哥拉斯学派的观点，世界的本原并不是这些物质的元素，而是抽象的“数”。如亚里士多德所说：“由于他们在数目中间见到了各种各类和谐的特性与比例，而一切其它事物就其整个本性说都是以数目为范例的，而数目本身则先于自然中的一切其他事物，所以他们从这一切进行推论，认为数目的基本元素就是一切存在物的基本元素。”（《古希腊罗马哲学》，第37页。）具体地说，毕达哥拉斯学派认为：“万物的始基是‘一元’。从‘一元’产生出‘二元’，‘二元’是从属于‘一元’的不定的质料，‘一元’则是原因。从完满的‘一元’与不定的‘二元’中产生出各种数目；从数目产生出点；从点产生出线；从线产生出平面；从平面产生出立体；从立体产生出感觉所及的一切物体，产生出四种元素：水、火、土、空气。这四种元素以各种不同的方式互相转化，于是创造出有生命的、精神的、球形的世界，……”（同上书，第34页。）这种“万物皆数”的观点，正是“唯数论”的核心。

毕达哥拉斯学派的这种唯数论哲学观的原始性是不言而喻的，但是它对后世的数学哲学研究却有很大的影响（一般地说，我们把那种认为数学规律是宇宙的本质的观点称为毕达哥拉斯主义），这种观点后来并在柏拉图那里得到了继承和进一步的发展。

二、柏拉图的数学哲学思想

1. 柏拉图的理念论

柏拉图（公元前429—347年）是古希腊唯心主义哲学的主要代表人物。柏拉图在哲学研究中的出发点是关于“共相”的实在性问题，即研究“共相”是否为一种真实的存在。例如，毕达哥拉斯是人，苏格拉底也是人，毕达哥拉斯和苏格拉底都是真实存在的，那么，我们能否说“人”——这是毕达哥拉斯和苏格拉底共同属性，也即所谓的“共相”——也是一种真实的存在呢？柏拉图对于上述问题的回答是肯定的，即认为共相是一种真实的存在。具体地说，这就是他的“理念论”：

① 有两种不同的存在，即经验的存在与理念的存在，前者是暂时的、变化的、复合的，后者则是永恒的、不变的、单纯的（“一”）。这里，柏拉图的“理念”，如善的理念、美的理念等，事实上就是上面所说的“共相”。柏拉图认为，这也是一种真实的存在，它们存在于永恒的、不变的世界——理念世界——之中。

② 理念高于相应的“经验对象”。具体地说，理念是一种原型，而经验的对象则是理念的“不完善的摹本（影子）”，它们“分有”相应的理念。例如，一个事物所以是“美的”，就是因为它“分有”了“美的理念”。

柏拉图的理念论是一种一般的哲学理论，但是，这一理论又与数学哲学的研究有着直接的联系。例如，有不少研究柏拉图哲