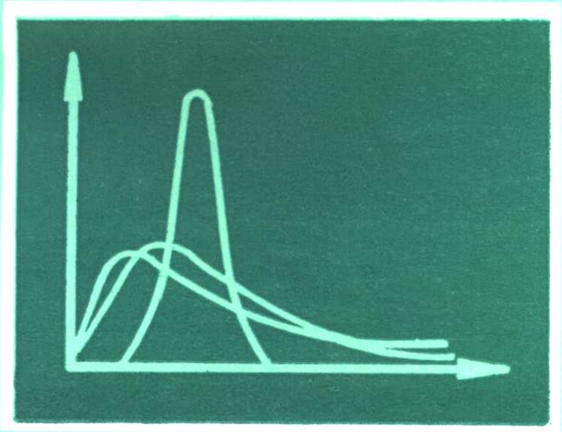
吴声钟 主编

概率论
内容方法与练习

GAILULUNNEIRONG
FANGFA YU
LIANXI



北京经济学院出版社

概率论内容方法与练习

吴声钟　主编

北京经济学院出版社

1992·北京

（京）新登字211号

概率论内容方法与练习

Gailulun Neirong Fangfa Yu Lianxi

吴声钟　主编

北京经济学院出版社出版

（北京市朝阳区红庙）

北京密云卫新印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

787×1092毫米　32开本　9.875　印张　214　千字

1992年5月第1版　　1992年5月第1版第1次印刷

印数：00 001—5 000

ISBN 7-5638-0279-7/O·5

定价：5.50　元

编 者 的 话

在实现四个现代化的过程中，科学技术与经济管理的各个领域都在广泛地运用许多新的数学方法。“概率论与数理统计”就是其中重要工具之一。目前高等工科院校、财经院校、电大、夜大、各类职工大学的教学计划都将这部分内容列为必修的课程，许多工程技术人员、自学青年也都在学习此课程。要学好此课程首先要学好其基础部分—概率论。而概率论是从数量侧面研究随机现象规律性的数学分支，对初学者时常感到困难较大，因它的规律性不易掌握，特别是做某些习题时感到无从下手。为了帮助初学者及其他读者克服学习过程中的困难，本书试图通过对每节内容简要连贯的叙述，编写出较多的例题和习题，注意分析和小结典型题的解题思路与方法，帮助读者系统地理解内容及有关难点，以达到较熟练地掌握基本知识、计算技能技巧，提高分析问题和解决问题能力的目的。全书共有例题230余道，习题180多道供读者练习。

本书由吴声钟主编。全书由（以编写章节先后为序）吴声钟（第一、二章及第三章§3.1与§3.2）、魏凤荣（第三章§3.3至§3.5及第五章）、李雪（第四章）等编写。在编写本书的过程中，曾学习、参考了兄弟院校许多老师编写的有关书籍，我们谨在此表示衷心的感谢。限于编者水平与经验，书中定有很多不足、不妥、甚至错误之处，恳请读者批评指正。

编 者1990.4.18

内 容 简 介

本书共分五章：随机事件与概率、随机变量与概率分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理。每章在较详细地介绍主要内容时，还穿插介绍典型例题并给予分析与小结，以求指导思路，培养分析问题与解决问题的能力，每节末有练习题并附习题答案。全书的例题230余道，习题180多道。

本书在安排上由浅入深，由易到难，力求使它既适用于初学者，也适用于学过概率论的读者作为复习及进一步提高的参考书。

读者对象：高等工科院校、财经院校、电大、夜大、职大师生，自学青年和科技人员并可供报考研究生人员复习时参考。

目 录

第一章　随机事件与概率

§1.0　概率论研究的对象

一　两类现象—确定现象与不确定现象

先从实例来看自然界和社会上存在着两类不同的现象。

例1　水在一个大气压力下，加热到100°C就沸腾。

例2　向上抛掷一个五分硬币，往下掉。

例3　太阳从东方升起。

例4　一个大气压力下，20°C的水结冰。

例1、例2、例3是必然发生的，而例4是必然不发生的。

这类现象是在一定条件下必然发生或必然不发生（即它有一个确切结果）称之为**确定性现象**或**必然现象**。微积分，线性代数等就是研究必然现象的数学工具。与此同时，在自然界和人类社会中，人们还发现具有不同性质的另一类现象，先看下面实例。

例5　用大炮轰击某一目标，可能击中，也可能击不中。

例6　在相同的条件下，抛一枚质地均匀的硬币，其结果可能是正面（我们常把有币值的一面称作正面）朝上，也可能是反面朝上。

例7　次品率为50%的产品，任取一个可能是正品，也可能是次品。

例8 次品率为1%的产品，任取一个可能是正品，也可能是次品。

例5～例8这类现象归纳起来可以看作在相同条件下一系列的试验或观察，而每次试验或观察的可能结果不止一个，在每次试验或观察之前无法预知确切结果，即呈现出不确定性（即这些现象的结果事先不能完全确定），这一类型现象我们称之为**不确定性现象**或**偶然现象**，也称为**随机现象**。

二 统计规律性、概率论研究的对象

对于不确定性现象，人们经过长时期的观察或实践的结果表明，这些现象并非是杂乱无章的，而是有规律可寻的。例如，大量重复抛一枚硬币，得正面朝上的次数与正面朝下的次数大致都是抛掷总次数的一半。在大量地重复试验或观察中所呈现出的固有规律性，就是我们以后所说的统计规律性。而概率论正是研究这种随机（偶然）现象，寻找它们的内在的统计规律性的一门数学学科。

概率论是数理统计的基础，由于随机现象的普遍性，使得概率与数理统计具有极其广泛的应用。另一方面，广泛的应用也促进概率论有了极大的发展。

§1.1 随机事件和样本空间

一 随机试验

对随机现象进行的试验或观察称为**随机试验**，简称**试验**，它具有下列特性（征）：

（1）试验可以在相同条件下重复进行；

（2）试验的所有可能结果是明确可知的，并且不止一个；

(3) 每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个，但在一次试验之前却不能肯定这次试验会出现哪一个结果。

随机试验记为E。

例1 E_1：投掷一枚硬币，观察正反面朝上的情况。

它有两种可能的结果就是“正面朝上”或“反面朝上”，投掷之前不能预言那一个结果出现，且这个试验可以在相同的条件下重复进行，所以E_1是一个随机试验。

例2 E_2：掷一颗骰子，观察出现的点数。

它有6种可能的结果就是“出现1点”，“出现2点”，…，“出现6点”。但在投掷之前不能预言那一个结果出现，且这个试验可以在相同的条件下重复进行，所以E_2是一个随机试验。

例3 E_3：在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命。

我们知道灯泡的寿命（以小时计）$t\geqslant 0$，但在测试之前不能确定它的寿命有多长，这一试验也可以在相同的条件下重复进行，所以E_3是一个随机试验。

二 随机事件和样本空间

对随机试验我们感兴趣的是试验结果。随机试验E的每一个可能的结果，称为**基本事件**，它是不能再分的最简单的事件。因为随机试验的所有结果是明确的，从而所有的基本事件也是明确的，我们把随机试验E的所有基本事件所组成的集合（全体）叫做试验E的**样本空间**，通常用字母Ω表示，Ω中的点，即基本事件，有时也称作**样本点**，常用ω表示。

例4 试验E_1：投掷一枚硬币。

“正面朝上”和“反面朝上”是E_1的基本事件，所以样本空间$\Omega=\{正，反\}$。

例5 试验E_2：掷一颗骰子。

令i表示“出现i点”。($i=1, 2, \cdots, 6$)，是E_2的基本事件。所以样本空间$\Omega=\{1, 2, \cdots, 6\}$。

例6 试验E_3：测试灯泡寿命。

令t表示“测得灯泡寿命为t小时”，则$0 \leqslant t < +\infty$是E_3的基本事件，所以$\Omega=\{t \mid 0 \leqslant t < +\infty\}$。

例7 一个盒子中有十个相同的球，但5个是白色的，另外5个是黑色的，搅匀后从中任意摸取一球。

令 $\omega_1=$ {取得白球}，$\omega_2=$ {取得黑球}

则 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2\}$

例8 试验E_4：将一硬币抛掷两次。

则$\Omega=$ {(正，正)，(正，反)，(反，正)，(反，反)}。其中(正，正)表示“第一次正面朝上，第二次正面朝上”，余类推。

例9 一个盒子中有十个完全相同的球，分别标以号码1，2，…，10，从中任取一球，令$i=$ {取得球的标号为i}

则 $\Omega=\{1, 2, \cdots, 10\}$。

在随机试验中，有时关心的是带有某些特征的基本事件是否发生。如在例5中E_2试验，我们可以研究

A表示“出现2点” 即$A=$ {出现2点}

B表示“出现偶数点”

C表示“出现的点数$\leqslant 4$”

这些结果是否发生？

在例9中，我们可以研究

$D=$ {球的标号$=6$}

$E=$ {球的标号是偶数}

$F=$ {球的标号$\leqslant 5$}

这些结果是否发生？

其中A是一个基本事件，而B是由｛出现2点｝，｛出现4点｝和｛出现6点｝这三个基本事件组成的，当且仅当这三个基本事件中有一个发生，B发生。所以B，C，E，F是由若干个有某些特征的基本事件所组成的，相对于基本事件，就称它们是**复合事件**。无论是基本事件还是复合事件，它们在试验中可能发生，也可能不发生，也就是说，它们在试验中发生与否，都带有随机性，所以都叫**随机事件**或简称**事件**。今后我们常用大写字母A，B，C等表示事件。

我们已经知道样本空间Ω包含了全体基本事件，而任一随机事件不过是有某些特征的基本事件所组成，所以从集合论的观点来看，任一随机事件不过是样本空间Ω的一个子集而已，而且事件发生，当且仅当子集中的一个样本点发生。如在例5中，随机事件A、B、C都是Ω的子集，它们可以简单地表示为

$$\Omega=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

$$A=\{2\},\ B=\{2,\ 4,\ 6\}$$

$$C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$$

在例9中

$$\Omega=\{1,\ 2,\ \cdots,\ 10\}$$

$$D=\{6\},\ E=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$$

$$F=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$$

事件D只含一个试验结果，而在事件E和F中各含5个可能的试验结果。所以我们也可以这样说，只包含一个试验结果的事件为基本事件，由两个或两个以上基本事件复合而成的事件为复合事件。

在试验E中必然会发生的事情叫**必然事件**，不可能发生

的事情叫**不可能事件**。例如例5E_2中“点数不大于6”是必然事件，“点数大于6”是不可能事件。因为Ω是所有基本事件所组成的，因而在任一次试验中，必然要出现Ω中的某一基本事件ω，即$\omega\in\Omega$。也就是在试验中，Ω必然会发生，所以今后用Ω来代表必然事件，类似地，空集ϕ可以看作是Ω的子集，它在任一次试验中都不会发生，所以ϕ是不可能事件。必然事件和不可能事件的发生与否，已经失去了“不确定性”，因而本质上它们不是随机事件，但为了今后研究的方便，我们把它们当作一种特殊的随机事件。

小结　将随机事件表示成由样本点组成的集合，就可以将事件间的关系和运算归结为集合之间的关系和运算，这不仅对研究事件的关系和运算是方便的，而且对研究随机事件发生的可能性大小的数量指标—概率的运算也是非常有益的。

三　事件之间的关系和运算

一个样本空间Ω中，可以有很多的随机事件。概率论的任务之一，是研究随机事件的规律，通过对简单事件规律的研究去掌握更复杂事件的规律。为此，下面我们引进事件之间的一些重要关系和运算，通过研究事件间的各种关系，进而研究事件间的概率的各种关系，就有可能利用较简单事件的概率去推算较复杂的事件的概率。

在以下的叙述中，设试验E的样本空间为Ω，还给了Ω中的一些事件，如A、B、A_K（K＝1，2，…）等等。

（一）事件的包含及相等

如果事件A的发生必然导致事件B的发生，则称**事件B包含事件A**，或称事件A是事件B的**特款（子事件）**，记作$A\subset B$或$B\supset A$。比如在例5中，A＝｛2｝，B＝｛2，4，6｝，

显然$A\subset B$。

如果将事件用集合表示，则A是B的子事件即为A是B的子集合(B包含集合A)。用图1.1（a）给包含关系一个直观的几何解释：设样本空间Ω是一个正方形，园A与园B分别表示事件A与事件B，由于A中的点全在B中，所以事件B包含事件A。

由此可知，事件$A\subset B$的含意与集合论中的意义是一致的。

如果有$A\subset B$且$B\subset A$，则称**事件A与事件B相等**，记作$A=B$。易知,相等的两个事件A、B,总是同时发生或同时不发生，亦即$A=B$等价于它们是由相同的试验结果构成的。

如在例9中，若A＝｛球的标号为偶数｝，B＝｛球的标号为2、4、6、8、10｝，则显然有$A=B$，所谓$A=B$，就是A、B中含有相同的样本点。

对任一事件A，有$\phi\subset A\subset\Omega$。

（二）事件的和（并）

“二事件A与B中至少有一个事件发生”，这样的一个事件叫做事件A与B的**和**（或**并**），记作$A\cup B$（或$A+B$)。

$A\cup B$是由所有包含在A中的或包含在B中的试验结果构成。

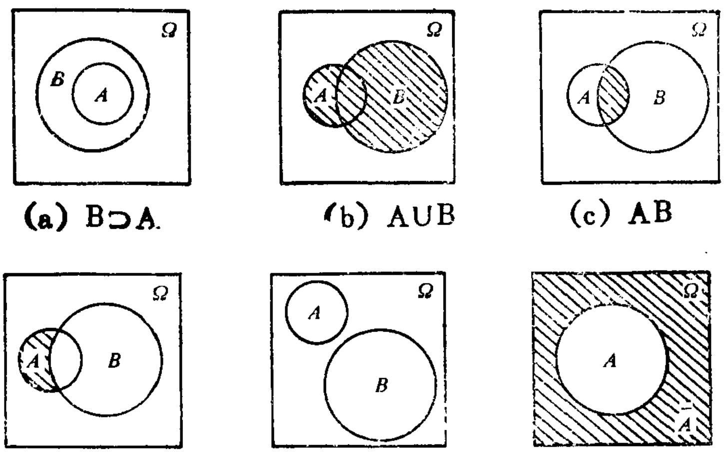
如果将事件用集合表示，则事件A与B的和事件$A\cup B$即为集合A与B的并。如图1.1（b）所示。

如在例5中，A＝｛2，4，6｝，B＝｛1，2，3，4｝则$C=A\cup B=$｛1，2，3，4，6｝。

事件的和可推广到有限多个事件和可列（数）无穷多个事件的情形。

用$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$或$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$表示$A_1$，$A_2$，…，$A_n$中至少发生其一这一事件；用$A_1 \cup A_2 \cup \cdots$或$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$表示$A_1$，$A_2$…中至少发生其一这一事件。

（三）事件的积（交）



(a) $B \supset A$　(b) $A \cup B$　(c) AB

(d) $A-B$　(e) A、B互不相容　(f) $\bar{A}$

图1·1

“二事件A与B同时发生”这样的事件称作**事件A与B的积(或交)**，记作$A \cap B$或AB。AB是由既包含在A中又包含在B中的试验结果构成，它对应于图1.1(c)中的阴影部分。

如在例5中，$A=\{2, 4, 6\}$，$B=\{1, 2, 3, 4\}$，则

$$C=A \cap B=\{2, 4\}$$

如果将事件用集合表示，则事件A与B的积事件C即为集合A与B的交。

类似地，也可以将事件的积推广到有限多个和可列(数)无穷多个事件的情况。

用$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$或$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$表示$A_1$，$A_2$，…，$A_n$同时发生这一事件；用$A_1\cap A_2\cap\cdots$或$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$表示$A_1$，$A_2$，…同时发生的事件。

（四）事件的差

“事件A发生而事件B不发生”这样的事件称为**事件A与B的差**，记作$A-B$。$A-B$是由所有包含在A中而不包含在B中的试验结果构成，它对应于图1.1（d）中的阴影部分。

比如例5中，$A=\{2,4,6\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，则

$$C=A-B=\{6\}$$

由事件的差的定义可知，对于任意的事件A，有

$$A-A=\phi,\ A-\phi=A,\ A-\Omega=\phi。$$

（五）事件的互不相容

如果事件A与事件B不能同时发生，也就是说AB是一个不可能事件，即$AB=\phi$，则称二事件A与B是**互不相容**的（或**互斥**的）。A，B互不相容等价于它们不包含相同的试验结果。互不相容事件A与B没有公共的样本点，如图1.1（e）所示。

若用集合表示事件，则A，B互不相容即为A与B是不交的。

如果n个事件A_1，A_2，…，A_n中，任意两个事件不可能同时发生，即

$$A_iA_j=\phi\ (1\leqslant i<j\leqslant n)$$

则称这n个事件A_1，A_2，…A_n是互不相容的（或互斥的）。

在任意一个随机试验中基本事件都是互不相容的。还容易看出，事件A与B—A是互不相容的。

（六）对立事件

若A是一个事件，令$\bar{A}=\Omega-A$，称$\bar{A}$是A的**对立事件**或**逆事件**。容易知道，在一次试验中，若A发生，则$\bar{A}$必不发生（反之亦然），即A与$\bar{A}$中必然有一个发生，且仅有一个发生，即事件A与$\bar{A}$满足条件

$$A\bar{A}=\phi,\ A\cup\bar{A}=\Omega。$$

$\bar{A}$是由所有不包含在A中的试验结果构成，图1.1（f）中阴影部分表示$\bar{A}$。

比如例5中，A＝｛2，4，6｝，B＝｛1，3，5｝，则$\bar{A}=B$，$\bar{B}=A$，所以A，B互为对立事件。必然事件与不可能事件也是互为对立事件。

若A，B二事件是互为对立事件，则A，B必互不相容，但反之不真。

由事件关系的定义看出，它与集合的关系是一致的，因此集合的运算性质对事件的运算也都适用。

事件的运算法则：

1° 交换律

$$A\cup B=B\cup A,\ AB=BA。$$

2° 结合律

$$A\cup B\cup C=A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$$

$$ABC=(AB)C=A(BC)$$

3° 分配律

$$A(B\cup C)=AB\cup AC$$

$$A\cup BC=(A\cup B)(A\cup C)$$

4° 对偶性