高等数学

第三册

主　编　杜先能
副主编　顾荣宝　黄仿伦

安 徽 大 学 出 版 社

安徽大学重点建设课程教材

高等数学

（第三册）

主　编　杜先能
副主编　顾荣宝　黄仿伦
编　者　杜先能　顾荣宝
　　　　黄仿伦　雍锡琪
　　　　何江宏

安徽大学出版社

图书在版编目(CIP)数据
高等数学/杜先能主编．－合肥:安徽大学出版社,1999.9
ISBN 7-81052-276-0

Ⅰ.高…　Ⅱ.杜…　Ⅲ.高等数学－高等学校－教材　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 42581 号

高等数学(第三册)　　杜先能　主编

出版发行	安徽大学出版社 (合肥市肥西路3号　邮编230039)	印　刷	中国科技大学印刷厂
		开　本	850×1168　1/32
联系电话	总编室 0551－5107719	印　张	40.25
	发行部 0551－5107784	字　数	900千
责任编辑	杨　冬	版　次	1999年9月第1版
封面设计	孟献辉	印　次	1999年9月第1次印刷
经　销	新华书店	印　数	1—5100册

ISBN 7-81052-276-0/O·20　全四册总定价:52.40元(本册定价:13.00元)

内容提要

本书是综合性大学理工科非数学专业《高等数学》课程的通用教材，书中的内容系统、全面，定理的证明、公式的推导简洁、严谨。同时在每一章的最后，根据近几年的全国考研试题的类型与方向，精编了一部分综合习题作为提高之用。

全书分四册出版，第一册内容包括函数的极限与连续、一元函数微分学、积分学；第二册包括空间解析几何、多元函数微积分学；第三册包括无穷级数、线性代数；第四册包括常微分方程、概率论与数理统计。

本书可作理工科院校非数学专业或师范院校相关专业的教材或教学参考书，也可供具有一定数学基础的读者自学。

编者的话

随着安徽大学进入全国二十一世纪重点建设的100所高等院校，安徽大学对基础教学提出了更高的要求，把《高等数学》作为学校重点建设课程之一。本书就是我们根据全国高等院校理工科《高等数学教学大纲》，并参考了《1999年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》，为理工科院校非数学专业的学生而编写的。与国内、外同类教材相比，本书有如下特点：

1. 书中的内容系统、全面，书中定理的证明、公式的推导，我们总是尽可能地用最简洁、严谨的方法去证明，同时对于那些需要加深理解的概念及灵活掌握的方法，书中都配有大量的例题与习题。兼顾到一部分同学考研的需要，我们在每一章的最后，还根据近几年的全国考研试题的类型与方向，精编了一部分综合习题作为提高之用。初学时不必题题都做，更不要因为有几个题目做不出来而失去信心。

2. 我们把大多数理工科院校非数学专业《高等数学》五学期的课程（微积分（包括空间解析几何、常微分方程）三学期，线性代数、概率论与统计各一学期）压缩到四学期。本书分四册出版，每一学期讲授一册，第一册内容包括函数的极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学；第二册包括空间解析几何、多元函数微分学、积分学；第三册包括无穷级数、线性代数；第四册包括常微分方程、概率论与数理统计。

3. 由于基本初等函数及性质在中学教材里已作详细讨论，所以我们只是简单提及一下，不再重复。

4. 我们以“有上界的实数集必有上确界”为公理建立极限理论，所涉及的定理（如 Cauchy 收敛准则，闭区间连续函数的性质，可积函数类的讨论等）都给以严格的论证。我们认为这些定理证明的方法对理解《高等数学》的内容是很有帮助的。

5. 为了加强学生综合运用所学的知识分析和解决实际应用问题能力，所以书中配有大量应用问题的实例与习题。

6. 根据国家标准对数学符号的统一要求，书中的正切函数、余切函数、反正切函数和反余切函数分别用 $\tan x$、$\cot x$、$\arctan x$ 和 $\operatorname{arccot} x$ 表示。

7. 在第四册的附录中编写了常用数学软件《Mathematica》、《Maple》和《Phaser》。

参加本书编写工作的有杜先能、顾荣宝、黄仿伦、雍锡琪、何江宏等。第一册由黄仿伦编写，第二册由顾荣宝编写，第三册的第 7 章由黄仿伦编写、第 8 章由杜先能编写，其余各章由雍锡琪编写，第四册常微分方程部分由顾荣宝编写，概率论与数理统计部分由何江宏编写，最后由黄仿伦协调统稿。另外，感谢盛立人教授为我们编写了第四册的附录《常用数学软件》。胡舒合教授审阅了全书。在编写本书的过程中，得到了安徽大学教务处和数学系的大力支持，许多教师对本书的写作提出了宝贵的意见，安徽大学出版社为本书的出版作了大量的工作，作者谨在此对他们表示诚挚的感谢。

在编写本书的过程中，我们参考了国内外许多同类教材，在此恕不一一列名致谢。

由于编者水平有限，加上编写时间仓促，书中一定存在不妥之处，敬请读者批评、指正。

编　者

一九九九年七月

目　　次

第 7 章

无穷级数

§ 7.1 数项级数

1. 数项级数的概念及其基本性质

定义 1 设有数列$\{a_n\}$,$n\in\mathbf{N}$,我们把无穷和式

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

称为无穷级数(简称级数),记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$,其中 a_n 为级数的一般项或通项,级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots \tag{1.1}$$

的前 n 项的和

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n \tag{1.2}$$

称为这个级数的前 n 项部分和,若这个部分和所构成的数列$\{S_n\}$有有限的极限 S,即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$,则称级数(1.1)是收敛的,其和为 S,记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n=S$,若数列$\{S_n\}$没有有限的极限,则说级数(1.1)是发散的.

从上述定义可以看出,一个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是否收敛就是看它的

部分和数列$\{S_n\}$是否收敛；反之，从一个数列$\{S_n\}$，也可以作出一个级数，使这个级数的部分和数列就是$\{S_n\}$. 实际上，只要取

$$a_1=S_1,\ a_2=S_2-S_1,\ a_3=S_3-S_2,\cdots,$$
$$a_n=S_n-S_{n-1},\cdots$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 就是所要求的级数.

由此可见，我们能够应用已经知道的有关数列极限的知识来研究无穷级数.

例 1 考察级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n=1+q+q^2+q^3+\cdots+q^n+\cdots$$

的敛散性.

解 当$|q|\neq 1$时，部分和

$$S_n=1+q+q^2+q^3+\cdots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}$$

所以当$|q|<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{1-q}$，从而级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ 收敛，且 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n=\dfrac{1}{1-q}$.

当$|q|>1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$，从而级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q_n$ 是发散的.

当$q=1$时，$S_n=n\to\infty$，从而级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q_n$ 是发散的.

当$q=-1$时，$S_n=\begin{cases}0 & n\text{ 为偶数}\\ 1 & n\text{ 为奇数,}\end{cases}$ 当$n\to\infty$时，S_n的极限不存在.

综上所述，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q_n$ 只有当$|q|<1$时才是收敛的.

例 2 考察级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots$$

的敛散性.

解 由于

$$\frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{2}{2\sqrt{k}}>\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$
$$=2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) \qquad 1\leqslant k\leqslant n$$

所以

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\\&>2(\sqrt{2}-\sqrt{1})+2(\sqrt{3}-\sqrt{2})+2(\sqrt{4}-\sqrt{3})\\&\quad+\cdots+2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\\&=2\sqrt{n+1}-2\sqrt{1}\to+\infty \quad (n\to\infty)\end{aligned}$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散.

定理 1(级数收敛的必要条件) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

证明 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,所以部分和 $S_n\to S$,且 $S_{n-1}\to S \quad (n\to\infty)$,所以

$$a_n=S_n-S_{n-1}\to S-S=0 \quad (n\to\infty)$$

定理 1 告诉我们,当我们考察一个级数是否收敛时,首先应该考察当 $n\to\infty$ 时,这个级数的一般项 a_n 是否趋于 0,如果 a_n 不趋于 0,那么立即可以断言这个级数是发散的. 例如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n}$ 都是发散的. 但是通项 $a_n\to 0$ 只是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的

必要条件，并不是充分条件，也就是说，有这样的级数，即使通项 $a_n \to 0$，但级数仍可能是发散的，例如，例 2 中的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 是发散的，但它的通项 $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0,(n \to \infty)$.

定理 2 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (ca_n + db_n)$ 也收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} (ca_n + db_n) = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n + d \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

其中 c、$d \in \mathbf{R}$.

证明

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} (ca_n + db_n) &= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (ca_k + db_k) \\ &= \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} ca_k + \sum_{k=1}^{n} db_k \right) \\ &= c \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k + d \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} b_k \\ &= c \sum_{n=1}^{\infty} a_n + d \sum_{n=1}^{\infty} b_n\end{aligned}$$

例 3 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2^n}{3^{n+2}}$ 的和.

解 已知等比级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3} \right)^n = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{3} \right)} = \frac{3}{4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+2^n}{3^{n+2}}=\frac{1}{9}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}\right\}$$
$$=\frac{1}{9}\left(\frac{3}{4}+3\right)=\frac{5}{12}$$

定理 3 在级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 前面去掉有限项或加上有限项，不影响级数的敛散性.

证明 从级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 去掉前 m 项得级数

$$\sum_{k=m+1}^{\infty}a_k=a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots$$

记

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k,\quad S'_{n-m}=\sum_{k=m+1}^{n}a_k,$$

则

$$S_n-S'_{n-m}=a_1+\cdots+a_m$$

与 n 无关，故数列 $\{S_n\}$ 与 $\{S'_{n-m}\}$ 有相同的敛散性，从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{k=m+1}^{\infty}a_k$ 有相同的敛散性.

设 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k$ 是由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 加上有限项所得的级数，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 去掉有限项所得的级数，根据上面的证明，二者有相同的敛散性.

定理 4 收敛级数的项加括号而不改变其先后所得新的级数仍收敛，且其和不变.

证明 设原级数的部分和数列为 $\{S_n\}$，它有极限 S.

现将原级数的项加括号后得新的级数

$$(a_1+\cdots+a_{n_1})+(a_{n_1+1}+\cdots+a_{n_2})+\cdots+(a_{n_{k-1}+1}+\cdots+a_{n_k})+\cdots$$

它的部分和数列$\{S_{n_k}\}$是$\{S_n\}$的一个子列，从而有相同的极限S.

由定理4可知，若加括号后所成的级数发散，则原级数一定发散. 但是定理4的逆定理不成立，例如级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$是发散的，但把它的项两两结合，便得一收敛级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots=0$$

2. 正项级数敛散性的判别法

我们把级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,(a_n\geqslant 0),n\in\mathbf{N}$，称为正项级数，根据定理3，在讨论级数敛散性的时候，只有有限个负项的级数也可以看成正项级数来处理.

定理5 正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛的充分必要条件是其部分和数列$\{S_n\}$有界.

证明 必要性是显然的.

现假定$\{S_n\}$有界，因为$\{S_n\}$是递增数列，由“单调有界数列必有极限”定理，故$\{S_n\}$有极限，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

注：由于$\{S_n\}$是递增的，所以如果正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散，只能发散于$+\infty$，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=+\infty$.

例1 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\quad(p>0)$$

的敛散性.

解 由于$\dfrac{1}{(k+1)^p}\leqslant\int_k^{k+1}\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x\leqslant\dfrac{1}{k^p}\quad k\in\mathbf{N}$

将上述不等式对k从1到n求和，有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^p}\leqslant\int_1^{n+1}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}$$

当 $p>1$ 时，广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x<+\infty$，从而

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^p}\leqslant\int_1^{n+1}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x\leqslant\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x<+\infty$$

由定理 5，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^p}$ 收敛，从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛.

当 $0<p\leqslant 1$ 时，

$$+\infty=\lim_{n\to\infty}\int_1^{n+1}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}$$

从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散.

定理 6（比较判别法） 设两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 满足：从某项开始有不等式

$$a_n\leqslant b_n\quad(n>N)$$

那么 (1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散.

证明 不妨设 $a_n\leqslant b_n, n\in\mathbf{N}$. 设

$$A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k,\quad B_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$$

则有

$$A_n\leqslant B_n$$

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则 B_n 有界，从而 A_n 有界，故 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则 A_n 无界，从而 B_n 无界，故 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散.

例 2 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ 收敛.

证明 因为

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!}=\frac{n!}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}$$
$$=\frac{1}{(1+n)\left(1+\frac{n}{2}\right)\left(1+\frac{n}{3}\right)\cdots(1+1)}\leqslant\frac{1}{2^n}$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛,所以原级数收敛.

例 3 证明级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ 是发散的.

证明 因为当 $n\geqslant 2$ 时,有

$$\ln n<n$$

所以

$$\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$$

但级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散的,故原级数发散.

推广比较判别法,得到下面更为适用的比较判别法的极限形式.

定理 6′(比较判别法的极限形式) 设有正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ $(b_n\neq 0)$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l$,那么

(1) 若 $0<l<+\infty$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 具有相同的敛散性;

(2) 若 $l=0$,则当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛;

(3) 若 $l=+\infty$,则当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也发散.