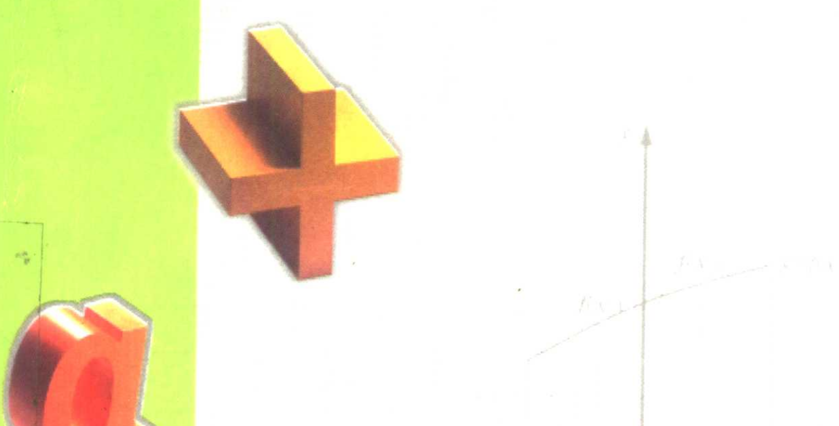
新编 高等数学全真试卷精解

XINBIAN GAODEN SHUXUE
QUANZHEN SHITI JINGJIE

刘后邗　曾育蓝　王国芬　高荣兴　马琳/编著

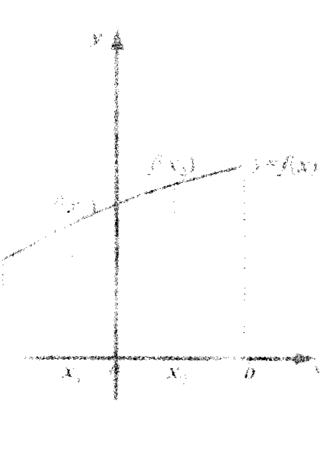


湖南科学技术出版社

新编高等数学
全真试卷精解

XINBIAN GAODEN SHUXUE
QUANZHEN SHITI JINGJIE

刘后邦 曾育蓝 王国芬 高荣兴 马琳 / 编著



湖南科学技术出版社

新编高等数学全真试卷精解

编　　著:刘后邗　曾育蓝　王国芬　高荣兴　马　琳

责任编辑:沙一飞

出版发行:湖南科学技术出版社

社　　址:长沙市展览馆路 66 号

http://www.hnstp.com

邮购联系:本社直销科　0731－4441720

印　　刷:湖南望城湘江印刷厂

(印装质量问题请直接与本厂联系)

厂　　址:望城县高塘岭镇郭亮路 69 号

邮　　编:410200

经　　销:湖南省新华书店

出版日期:2000 年 9 月第 1 版第 1 次

开　　本:850mm×1168mm　1/32

印　　张:15.5

字　　数:412000

印　　数:1～3560

书　　号:ISBN 7－5357－3062－0/O・191

定　　价:19.50 元

前 言

众所周知,高等数学是大学理工科学生(非数学专业)最重要的基础课,它的重要性还在于它是考评一个学校教学质量的重要指标,亦被列为全国研究生入学考试统考科目.

关于高等数学的考核,当前许多高校都采取了规范性命题,即试题库命题.编者深感现行教材的练习题与试题库的考题之间,无论是在形式上,还是在难度深度上都存在着一定的差距。换言之,学生在完成教材的习题后,在考试时还是会遇到这样那样的困难,为了弥补这种不足,我们编写了104套试卷.

本书特点是:

1.它是对现行教材习题的补充.通过对它的练习,读者能极大增强对考试的适应性.

2.每套试卷基本上都是按教材内容先后次序编排的,读者既可在总复习时整套进行练习,亦可在学习到某章节时,方便地从试卷中找出该章节所对应的试题进行练习,加之每套试卷的解答就附在其后,读者在练习后又可方便地对自己的练习进行核查.

3.每套试卷在时间上都定为2个小时,与通常考试规定时间一致.

4.普及与提高相结合.编者有意在试卷中加进了1987~2000年各届研究生入学试题的精典试题,这种试题在每份试题中所占的比重虽不大,但它命题形式的新颖,解题技巧的灵活,无疑将提高读者学习高等数学的兴趣.特别对有志报考研究生的读者,这种训练则是更为有益的.

在编写本书时,除利用了我们长期积累的资料外,还参阅了许多兄弟院校的资料,由于篇幅有限,不能一一列举,在此我们衷心向这些兄弟院校同行表示感谢.

编　者

2000年5月19日

目 录

高等数学全真试卷精解(上册)

高等数学全真试卷精解(下册)

高等数学全真
试卷精解(上册)

试 卷 1

一、试解下列各题：

1.（4 分） 已知 $F(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，在 $(-1,1)$ 内 $F'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，且 $F(1)=\dfrac{3\pi}{2}$，求 $F(x)$.

2.（4 分） 已知 $f'(3x-1)=e^x$，求 $f(x)$.

3.（4 分） 计算 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\ln\dfrac{1-x}{1+x}dx$.

二、试解下列各题：

1.（6 分） 计算 $\int_1^{\sqrt{3}}\dfrac{dx}{x^2(1+x^2)}$.

2.（6 分） 计算 $\int_1^2\dfrac{(x+1)(x^2-3)}{3x^3}dx$.

3.（6 分） 试求空间直线 $\begin{cases}x=2z+5,\\ y=6z-7\end{cases}$ 的对称式方程.

4.（6 分） 决定参数 k 的值，使原点到平面 $2x-y+kz=6$ 的距离等于 2.

三、（8 分） 一个圆形铝盘加热时，随着温度的升高而膨胀. 设该圆盘在温度为 t℃时，半径 $r=r_0(1+\alpha t)$，其中 α 为常数，求在 t_1℃时圆盘面积对温度 t 的变化率.

四、（10 分） 设 $f(x)$ 为二阶可导函数，$f(x)>0$，且曲线 $y=\sqrt{f(x)}$ 有拐点 P，试证 P 点的横坐标满足

$$[f'(x)]^2=2f(x)f''(x).$$

五、（6 分） 证明：$\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{1+x^4}=\int_0^{+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^4}dx$.

六、（7 分） 求极坐标系下曲线 $r=a\sin^3\dfrac{\theta}{3}$ 的全长（$a>0$）.

七、（7 分） 设向量 $(2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})$ 与 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$ 垂直，$(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})$ 与 $(\boldsymbol{a}-$

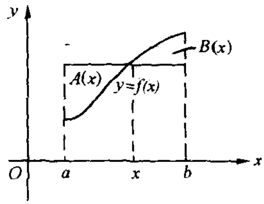
$5\boldsymbol{b}$)垂直,试求$(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})$.

八、(7 分) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+e^{ax})\cdot\ln(1+\frac{b}{x})$($a,b$ 为常数,且 $a>0$).

九、(7 分) 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$为连续函数,试确定 a 及 b.

十、(6 分) 求 $\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}$.

十一、(6 分) 设 $f(x)$在$[a,b]$上可导,且 $f'(x)>0$, $f(a)>0$,试证:对图中所示的两个面积 $A(x)$和 $B(x)$来说,存在惟一的 $\xi\in(a,b)$,使得$\frac{A(\xi)}{B(\xi)}=1990$.



十一题图

解 答 1

一、试解下列各题:

1. $F'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

$$F(x)=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C(-1<x<1).$$

因 $F(x)$在$[-1,1]$连续且 $F(1)=\frac{3\pi}{2}$,故 $\arcsin 1+C=\frac{3\pi}{2}$, $C=\pi$.

$$F(x)=\arcsin x+\pi(-1\leqslant x\leqslant 1).$$

2. 令$3x-1=t$, $x=\frac{t+1}{3}$,

$$f'(t)=e^{\frac{t+1}{3}}, f(t)=\int e^{\frac{t+1}{3}}dt=3e^{\frac{t+1}{3}}+C,$$

$$f(x)=3e^{\frac{x+1}{3}}+C.$$

3. 因被积函数为奇函数,且在对称于原点 O 的区间上积分,

故原式 $=0$.

二、试解下列各题:

1. 原式 $=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)}dx=$

$$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2}dx-\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}=1-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{12}.$$

2. 原式 $=\frac{1}{3}\int_1^2(1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}-\frac{3}{x^3})dx=$

$$\frac{1}{3}[x+\ln|x|+\frac{3}{x}+\frac{3}{2x^2}]_1^2=\frac{1}{3}(\ln 2-\frac{13}{8}).$$

3. 由 $\begin{cases}x=2z+5,\\ y=6z-7,\end{cases}$ 得 $\frac{x-5}{2}=z,\frac{y+7}{6}=z,$

故 $$\frac{x-5}{2}=\frac{y+7}{6}=\frac{z}{1}.$$

4. $d=\frac{|-6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+k^2}}=2$,解得 $k=\pm 2$.

三、设圆盘面积为 S,则 $S=\pi r^2=\pi r_0^2(1+\alpha t)^2$.

于是, $\frac{ds}{dt}=2\pi r_0^2\alpha(\alpha t+1),\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=t_1}=2\pi\alpha r_0^2(\alpha t_1+1).$

四、$y'=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}},y''=\frac{2f(x)f''(x)-[f'(x)]^2}{4[f(x)]^{\frac{3}{2}}}$,在拐点处 $y''=0$,故有 $[f'(x)]^2=2f(x)f''(x)$.

五、令 $t=\frac{1}{x},\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\int_{+\infty}^0\frac{-\frac{1}{t^2}}{1+\frac{1}{t^4}}dt=$

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}dt=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx.$$

六、$S=\int_0^{3\pi}\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta=$

$$\int_0^{3\pi}\sqrt{a^2\sin^6\frac{\theta}{3}+a^2\sin^4\frac{\theta}{3}\cos^2\frac{\theta}{3}}d\theta=$$

$$a\int_0^{3\pi}\sin^2\frac{\theta}{3}\mathrm{d}\theta=a\int_0^{3\pi}\frac{1-\cos\frac{2\theta}{3}}{2}\mathrm{d}\theta=$$

$$a\left[\frac{\theta}{2}-\frac{3}{4}\sin\frac{2\theta}{3}\right]_0^{3\pi}=\frac{3}{2}\pi a.$$

七、由 $(2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0,(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=0$,

有 $2\boldsymbol{a}^2+3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-5\boldsymbol{b}^2=0,2\boldsymbol{a}^2-7\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-15\boldsymbol{b}^2=0$,故 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}^2$,

$|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|,\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=-\dfrac{1}{2}$.故 $(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=\dfrac{2\pi}{3}$.

八、原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln[\mathrm{e}^{ax}(1+\mathrm{e}^{-ax})]\ln(1+\dfrac{b}{x})=$

$$\lim_{x\to+\infty}\left\{[\ln\mathrm{e}^{ax}\cdot\ln(1+\frac{b}{x})]+[\ln(1+\mathrm{e}^{-ax})\ln(1+\frac{b}{x})]\right\}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}[a\cdot\ln(1+\frac{b}{x})^{\frac{x}{b}\cdot b}+\ln(1+\mathrm{e}^{-ax})\ln(1+\frac{b}{x})]=$$

$$a\ln\mathrm{e}^b+0=ab.$$

九、由已知极限式求得

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & |x|>1,\\ ax^2+bx, & |x|<1,\\ \dfrac{a+b+1}{2}, & x=1,\\ \dfrac{a-b-1}{2}, & x=-1.\end{cases}$$

因 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=a+b$,所以 $a+b=1$;

又 $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=a-b$, $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=-1$,所以 $a-b=-1$.

解出 $a=0,b=1$.

十、原式 $=8\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}(2x)}{\sin^4 2x}=8\int\csc^4 2x\,\mathrm{d}(2x)=$

$$-8\int(\cot^2 2x+1)\mathrm{d}(\cot 2x)=$$

$$-\frac{8}{3}\cot^3 2x-8\cot 2x+C.$$

十一、$A(x)=\int_a^x[f(x)-f(t)]\mathrm{d}t$,

$B(x)=\int_x^b[f(t)-f(x)]\mathrm{d}t$,令

$F(x)=A(x)-1990B(x)$,它在$[a,b]$连续.

$A'(x)=f'(x)(x-a)>0$, $B'(x)=-f'(x)(b-x)<0$,得 $F'(x)=A'(x)-1990B'(x)>0 \quad x\in(a,b)$,故 $F(x)$在$[a,b]$上单调增加.

又 $F(a)<0$, $F(b)>0$,由介值定理,知存在惟一的 ξ,使 $F(\xi)=0$,即

$$\frac{A(\xi)}{B(\xi)}=1990,\ \xi\in(a,b).$$

试 卷 2

一、试解下列各题:

1.(5 分) 计算数列极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4+3n^3-4}-(n-1)(n+1)}{n}.$$

2.(5 分) 设 $y=x+\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x$,求 y'.

3.(5 分) 设 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 是可导函数,求函数 $y=\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$ 的导数[其中 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 不同时为零].

4.(5 分) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$.

二、试解下列各题:

1.(5 分) 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\sqrt[4]{\cot x}}$.

2.(5 分) 设 $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x$,求 $f(x)$.

3.(5 分) 设 $f(x)=\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\cos t\,\mathrm{d}t$,求 $f'(0)$ 与 $f''(0)$.

4.(5 分) 计算 $\displaystyle\int_0^5 |2x-4|\,\mathrm{d}x$.

三、试解下列各题:

1.(6 分) 计算 $\displaystyle\int_0^3\frac{x}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$.

2.(6 分) 计算 $\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} t\sin\omega t\ \mathrm{d}t$($\omega\neq 0$,常数).

3.(6 分) 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2(\mathrm{e}^x-1)}{\mathrm{e}^x-1}, & x>0,\\ 2, & x=0,\\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x\cos^2 t\ \mathrm{d}t, & x<0\end{cases}$ 的连续性.

4.(6 分) 已知点 $A(-3,1,6)$ 及点 $B(1,5,-2)$,试在 yOz

平面上求一点 P,使得$|AP|=|BP|$,且点 P 到 Oy, Oz 轴等距离.

四、(10分) 已知曲线 $xy=1$ 在第一象限中分支上有一定点 $P(a,\frac{1}{a})$,在给定曲线的第三象限中的分支上有一动点 Q,试求使线段 PQ 长度最短的 Q 点的坐标.

五、(10分) 求 $\int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}\mathrm{d}x$.

六、(9分) 证明曲线$\begin{cases}2x-12y-z+16=0,\\ x^2-4y^2=2z\end{cases}$是两相交直线,并求其对称式方程.

七、(7分) 某立体上下底面平行且与 x 轴垂直,若平行于底面的截面面积 $S(x)$是 x 的不高于二次的多项式,试证:该立体体积为 $V=\frac{h}{6}(B_1+4M+B_2)$,其中 h 为立体的高,B_1,B_2 分别是底面面积,M 为中截面面积.

解 答 2

一、试解下列各题:

1. 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4+3n^3-4-(n^4-2n^2+1)}{n[\sqrt{n^4+3n^3-4}+(n-1)(n+1)]}=$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+2n^2-5}{n^3\left[\sqrt{1+\frac{3}{n}-\frac{4}{n^4}}+(1-\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})\right]}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}-\frac{5}{n^3}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}-\frac{4}{n^4}}+(1-\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})}=\frac{3}{2}.$$

2. $y'=1+\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\arcsin x+\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=$

$2-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x$.

3. $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}}[2\varphi(x)\varphi'(x)+2\psi(x)\psi'(x)]=$
$\dfrac{\varphi(x)\varphi'(x)+\psi(x)\psi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}}$.

4. 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^3}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos x+x\sin x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot x}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$.

二、试解下列各题：

1. 原式 $=-\int(\cot x)^{-\frac{1}{4}}\mathrm{d}(\cot x)=-\dfrac{4}{3}(\cot x)^{\frac{3}{4}}+C$.

2. 令 $\sin^2 x=u,\cos^2 x=1-u,f'(u)=1-u$,

$f(u)=\int(1-u)\mathrm{d}u=u-\dfrac{u^2}{2}+C\quad(0\leqslant u\leqslant 1)$,

即 $f(x)=x-\dfrac{x^2}{2}+C(0\leqslant x\leqslant 1)$.(未注明 $f(x)$ 的定义区间不扣分)

3. $f'(0)=\mathrm{e}^{-x}\cos x\big|_{x=0}=1$,

$f''(0)=(-\mathrm{e}^{-x}\cos x-\mathrm{e}^{-x}\sin x)\big|_{x=0}=-1$.

4. 原式 $=\int_0^2(4-2x)\mathrm{d}x+\int_2^5(2x-4)\mathrm{d}x=13$.

三、试解下列各题：

1. 原式 $=\int_0^3\dfrac{(x+1)-1}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=$

$\int_0^3\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x-\int_0^3\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\dfrac{8}{3}$.

2. 原式 $=\dfrac{-1}{\omega}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}t\,\mathrm{d}\cos\omega t=$

$-\dfrac{1}{\omega}\left[t\cos\omega t\Big|_0^{\frac{2\pi}{\omega}}-\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\cos\omega t\,\mathrm{d}t\right]=\dfrac{-2\pi}{\omega^2}$.