

中国科学院地球物理研究所

动力气象学论文集

顧震潮等著

科学出版社

中国科学院地球物理研究所

动力气象学论文集

顧震潮等著

科学出版社

1961

內 容 簡 介

本論文集是由中国科学院地球物理研究所数值預报小組在 1958—1959 年所进行的一部分工作的研究报告彙集而成。

論文集的第一部分包括三篇論文，前二篇运用控制論的观点，討論了气象学中的一些問題。第一篇論文把大气看成是在太阳辐射的輸入下經常自动調整的系統的情况下，研究了大气的一些过程。第二篇运用在自动調整理論中的传递函数分析方法，对一个长期数值預报的綫性模式进行了分析，并討論了大气的不同情况对太阳辐射扰源的响应問題。第三篇运用了 A.M. 李雅普諾夫 (Ляпунов) 稳定性理論，討論了大尺度天气过程的不稳定問題。

論文集的第二部分是包括有关大气加热过程和长期数值預报問題的四篇論文。第一篇利用热力学方程和月平均气候資料，計算了北半球范围对流层下半部热源分布的年变，并討論了它們和环流年变的关系；在第二篇論文中，利用同样方法計算了 1956 年和 1957 年冬季的加热情况，了解了个别年份大气加热情况和平均情况的差別及其和流場的关系；第三篇論文利用綫性化的两层模式，討論了固定热源扰动对于流場作用的非定常問題。最后一篇提出了一个考虑辐射等加热过程、摩擦作用和大气运动相互影响的动力模式，并用綫性化方法作了一些討論。

本論文集可供气象研究工作者、气象业务工作者以及气象院校教师参考。

动力气象学论文集

顧震潮等著

*

科学出版社出版 (北京朝阳門大街 117 号)

北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷 新华书店总經售

*

1961 年 12 月 第 一 版

书号：2451 字数：140,000

1961 年 12 月 第一次印刷

开本：787×1092 1/16

(京) 0001—4,300

印张：7

定价：0.86 元

目 录

前言.....	1
大气过程的控制观.....	顧震潮 2
在长期数值预报的一个綫性模式中大气对太阳实际直接輻射的响应.....	陈雄山 17
李雅普諾夫运动稳定性理論在气象学中的应用.....	巢紀平 32
北半球热源、热汇的年变和大气环流的年变.....	朱抱真 刘瑞芝 紀立人 38
个别年份冬季的大气加热場及其与环流演变的关系.....	紀立人 刘瑞芝 65
二层綫性模式里长期天气过程的一些計算.....	巢紀平 許有丰 90
考虑輻射和运动相互調整的一个长期预报数值模式.....	朱抱真 王宗皓 赵明哲 96

前 言

大气过程有着很复杂的制约关系,无论对数值预报还是对大气环流的研究,都必须注意这些制约关系。并且应该指出,这些制约关系还是高度自动调整的。但是过去对这些制约关系缺少从自动调整的角度去加以分析和讨论。本论文集前二篇论文即应用了控制论的观点和方法,把大气看成是在太阳辐射的输入下经常自动调整的系统的情况下,来探讨大气过程的制约关系。并运用了自动调整理论中的传递函数分析方法,提出了长期天气数值预报线性模式的合理设计问题和解决方法;讨论了大气的不同情况对太阳辐射扰源的响应问题。但在这里仅分析了线性系统的情况,对非线性系统还必须作进一步深入的分析 and 研究。

第三篇论文运用了利雅普诺夫(Ляпунов)稳定性理论,讨论了大尺度天气过程的不稳定问题,它可以不用微扰动的假定,因此在讨论时更为合理。这个理论运用在气象学上也得到很有意义的结果。

大气不断地运动,不能不考虑对大气的实际加热情况。因此,为了探索长期天气预报和大气环流机制,必需研究加热作用。本论文集第二部分即研究了利用热力学方程和月平均气候资料计算北半球常年逐月 500 毫巴上热源分布、它的年变化的特点和对环流年变化的关系。并就个别年份的冬季热源分布对环流异常和流场关系进行了分析,得到了一些新的了解。此外,利用线性化的两层模式讨论了固定热源扰动对于流场作用的非定常问题。最后提出了一个考虑辐射等加热过程、摩擦作用和大气运动相互影响的动力模式,并用线性化方法作了一些探讨。

大气过程的控制观

顧震潮

(中国科学院地球物理研究所)

提 要

大气可以看成是在太阳辐射的输入下,经常自动调整的系统。根据这个观点,作者提出了从控制论的角度来处理大气过程的方法。这样,人们对大气过程的线性和非线性的反馈过程和响应情况就得到了新的了解。经初步的一些研究说明在太阳辐射输入下,对北半球纬圈平均的 500 毫巴高度、气温的年变化和地面温度年变化这些输出来说,大气可以看成是准线性系统;而对 3—10 天的中期变化来说,它是太阳辐射的异步激发,因而是非线性响应。这样对某些天气现象的长期预报模式线性化提供了理论基础。根据自动调整理论还可以由大气模式的传递函数简便地直接了解模式的基本性能和本质,选定用某些线性模式描写大气的最适合的参数数值,可以免除试验线性模式的繁重计算。根据传递函数直接进行电模拟,也为利用简单的模拟计算机来帮助制作某些长期预报和大气环流的一些问题提供了可能。

一、引 言

大家知道,大气过程是复杂的。为了模拟大气过程数值预报和大气环流工作中提出了各种各样的模式。这些模式有的是线性的,有的是非线性的。有的在非线性模式下求得的结果与线性的结果大有不同(如文献[1]),而有的却与线性的几乎没有根本的差别(如文献[2]与[3])。的确,一般说来,对于所研究的大气过程究竟是线性的还是非线性的,从本质上来分析是比较不够的。因此,选定线性或非线性模式的理由也就不够充分。无怪人们常常怀疑在这方面是否把一些模式不必要的复杂化,或者过分的简单化了(例如,对线性模式预报价值的怀疑^[4])。

对数值预报来说,近年来模式是不少的,但以线性模式来说,对各种模式的性能和本质一般不曾有充分的分析,以致在试用以前,对这些模式对外界输入的响应过程与大气过程相似到什么程度,了解得很是不够。固然,通过对实例的计算,可以逐渐对模式的性能与本质有所了解,但即使以线性模式来说,计算工作也已经是十分繁重的了,因此这决不是多快好省的办法。

此外,在模式确定下来后,如何选定模式中参数数值,使得所取的模式,在模式基本性能和本质所允许的范围內,最接近于大气过程的实际情况,也还是个问题。大家知道,到现在为止,这些参数具体数值的取定在很大的程度上是任意的[例如菲列普斯 (Phillips)^[5]

取的大尺度交换系数就比 A. 德芬 (Defant) 的小 40 倍!]。只是因为我们对模式的性能并不十分清楚, 才使这样选定的参数数值竟没有使我们明显地看出它的合理性或不合理性。

要很好的解决这个问题, 用控制论或者自动调整理论来帮助解决是十分有利和必要的。大家知道大气过程相互之间的制约关系是十分密切的。它就象一个自动调整系统。而大气中各个单独的物理因子就象这机械系统的元件。我们的任务是摸清这个系统的底, 并且用已有的元件组成为某种目的而选定的一些特定性能的系统。控制论所研究的正是如何把元件组合成稳定而有特定性能的系统^[6-8]。因此前面所谈的问题应该是控制论范畴内的问题, 应该是属于大气过程的控制论方面的新问题。这里我们就想尝试从控制论的观点来讨论一下某些大气过程的性质和模式设计问题。作为一种边界科学, 这方面的发展可能有它的特殊意义的。

二、大气对外界输入的調整性能

大气这个自动系统最后输入的是太阳辐射。各种气象要素都是输出。在太阳辐射输入下大气不断的在自动调整。然而大家知道, 大气却始终是没有达到它的“平衡状态”。它是一种“有差系统”, 调整得并不那么好。同时, 整个说来大气过程的问题是如何调整的问题, 不是稳定不稳定的问题。因为一个不稳定的系统就根本谈不上自动调整。

正象一般的自动调整系统一样, 大气这个自动调整系统也可以按它的动态性质, 即对输入与输出的依赖关系划分成各种元件。这些元件常常是方程式中的某一项或某几项。它常常代表一种物理因子或者这因子的一部分作用。值得提出的是这些元件中绝大部分是线性的。例如在一般形式的运动方程中局地加速项 $\partial u / \partial t$ 就是一种线性元件, 它单独来说其实起着积分元件的作用。而湍流输送, 地转偏向是一种线性稳定装置。对于大尺度准水平运动来说 $\frac{1}{\rho}$ 的变化很小, 这时气压梯度力 $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ 等也可看成是一种线性元件。但是也有许多元件象平流、垂直输送、压缩加热 ($p \operatorname{div} \mathbf{v}$) 以及辐射中的 η , 或 $E (= \sigma T^4)$ 等*, 就显然不是线性元件。一般说来这些项起的作用愈大, 整个大气过程对太阳辐射的非线性响应也愈明显。

作为例子, 这里特别值得稍为讨论一下的是凝结加热这个元件。

另外凝结降水显然也是一种非线性元件。凝结加热作用通常可以写成

$$\epsilon_2 = \frac{\alpha L}{c_p T} \frac{dq}{dt}, \quad \alpha = \begin{cases} 0 & q \leq q_s \\ 1 & q > q_s \end{cases}$$

q_s 是饱和比湿。因此, 从 α 的性质看来凝结加热就象继电器开关一样, 是非线性元件, 更不必说发生作用后和 $\frac{dq}{dt}$ 的联系了。但是降水对热量总的来说, 在长时间内起的是扩散

* 符号依据文献[9]。

传送的作用,因此在綫性模式中,可以适当扩大湍流系数来考虑它的作用。从另一方面看,凝結对大气过程起着負反饋的作用。这对大气起稳定的作用,特别是对高頻扰动^[10]。在这方面也是与湍流作用相近似的。按照平衡情况,这只要把湍流系数扩大6倍就可以了,而各模式中湍流系数所取数值大有出入,远不止差6倍。所以一些綫性模式不考虑降水而把温度計算得比較准确^[11]也不是沒有道理的。

現在我們来看几种特殊的大气运动,看看它对太阳輻射响应的性質。首先是行星波运动。大家知道中緯度上的行星波頻率 $\omega = \sqrt{\beta u} \approx 10^{-3} \text{ 秒}^{-1}$ 这数值与自然周期^[12] 也比较符合,然而太阳輻射中輸入並沒有明显持久的相应頻率。由此可見,这是一种异步激发,典型的非綫性响应。所以我們要想由太阳輻射輸入用綫性模式来作行星波的研究是毫无希望的。大家知道行星波和中期預报的关系是十分密切的。由此可見,想由太阳輻射輸入出发用綫性模式来作中期預报是不可能的。

大气中的季节轉移有着比較突然的变化^[13],这种变化比太阳輻射来得更急。大家知道,一个周期变化愈突然,它在傅里叶表示式中的高頻部分就更多。因此在綫性模式中,即使假定太阳輻射中有这种高頻成分的話,季节轉移中气象要素的急变也意味着大气对高頻輸入的放大比低頻輸入更大,在第三节中可以見到,即使把大气看作綫性系統的話,它也并不具备这种性能。由此可見,想用綫性模式在平坦地面由太阳輻射計算出季节突变是不可能的。

此外,在太阳輻射变动对地球气象要素影响的一些研究中,常常看到位相轉移^[14]也是典型的非綫性現象。韵律的变化也可以看做太阳輻射輸入年变頻率 ω_1 的 $\omega_1/2$ 及 $\omega_1/4$ 两种超調和非綫性响应的交替。大气气压的半日波也可以看成輻射輸入日变化的异步激发。

也有一些輸出是大气对太阳輻射輸入綫性响应的結果。大家知道,在綫性系統下輸出的頻率与輸入的相同,輸出的振幅与輸入的成正比,并且頻率的单值函数系統的稳定性也与外界輸入的頻率和振幅无关,而只由系統本身来决定。这些特征是工程上最便于檢驗綫性系統的依据。我們先来看一下月平均温度的緯圈平均值。根据米兰科維契(Milankovitch)^[15] 所給的太阳輻射量,我們作了輻射日总量的月平均值,定出了日射年变化在各緯度的較差 ΔW (最大—最小),然后我們把各緯度上月平均地面气温7月—1月的較差(参見文献[16]) ΔT ,点画在图上(图1)。从图上可以看出,在北半球它們大致成綫性关系,不但輸出与輸入頻率基本相同,并且除高緯度地区以外,振幅大致成正比。这說明在北半球我們不难用某种綫性模式,由太阳輻射輸入求出地面气温輸出。相反的,对南半球來說 ΔT 与 ΔW 显然不成綫性正比,也就是說地面气温对輻射輸入的响应不是綫性的,因此,我們不能靠一个綫性系統由輻射輸入得出正确的地面温度。事实上也正是如此。根据馬什科維奇(Машкович)^[17] 用綫性模式从太阳輻射分布,計算所得的地面气温緯圈分布可以看出,对于北半球來說冬夏都比較符合,而对于南半球就比較差(图見文献[17]原文)。把馬什科維奇計算所得的 ΔT 对 ΔW 点画出来,可以看出(图2),它

們之間除了高緯度以外，的確是大致成正比的。由此可見，不論如何選取模式的參變數，只要仍然用綫性模式，是无法由太陽輻射求出南半球地面氣溫的緯圈分布和它的年變化來的。

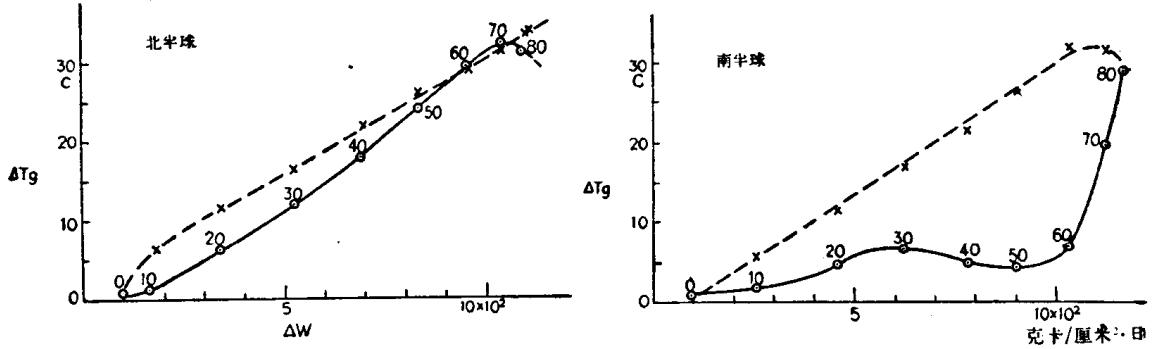


图1 緯圈平均地面氣溫年較差 ΔT (7月—1月) 与輻射年較差 ΔW (最大月—最小月) 的关系
实綫为測得值(取自文献[16])虛綫为算得值(取自文献[17])

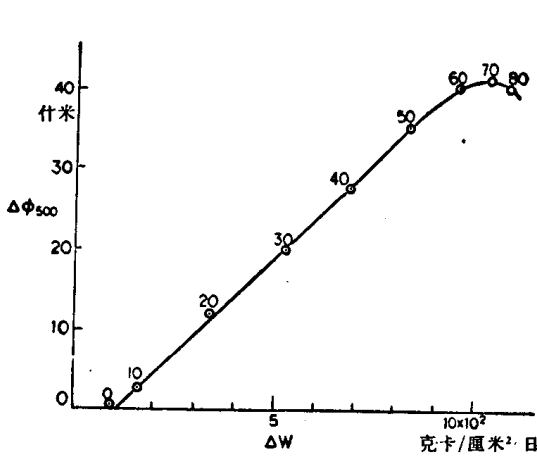


图2 北半球緯圈平均500毫巴高度測得年較差 $\Delta \phi_{500}$ (7月—1月), 与 ΔW 的关系
(高度值取自文献[18])

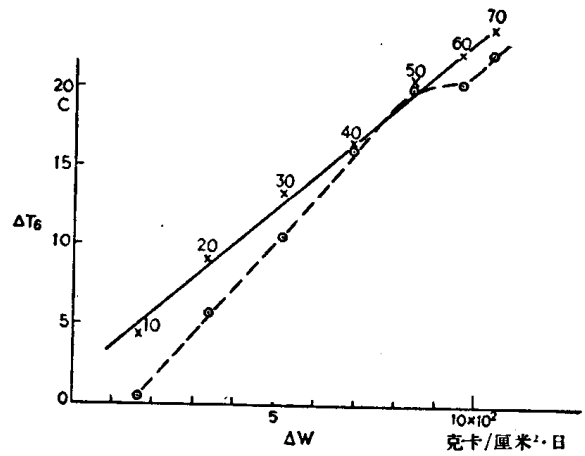


图3 北半球緯圈平均6千米上氣溫年較差 ΔT_6 (1月—7月) 对 ΔW 的关系
(T_6 取自文献[16])虛綫是馬什科維奇的算得值

这个事实和我們一般的概念頗有一个距离。一般認為南半球西风气流比較強，西风波动比較平淺，應該更适合于用綫性模式来处理。但是正由于风速較大，大尺度乱流較小，結果非綫性的作用就比綫性項的作用相对的大了不少，以至即使对緯圈平均的地面氣溫來說都对輻射有明显的非綫性响应。

除了地面氣溫以外，北半球高空500毫巴上的高度緯圈平均和6千米上的溫度緯圈平均的年較差，除了极区以外，也大致与 ΔW 成正比(图2, 3)，因此是可以綫性模式由太陽輻射輸入來求的。象馬什科維奇計算出來的6千米上的溫度年較差也大致与 ΔW 成正比，与实况接近。而象緯圈平均地面气压、降水、高空风等(图4—6)的年較差就不是如此，非綫性很显著，因此用綫性模式从太陽輻射來求是不合适的。馬什科維奇所求出的

西风风速分布, 因此不是很合适的。计算所得的 Δu 与 ΔW 的线性关系与实际情况相差是相当远的。

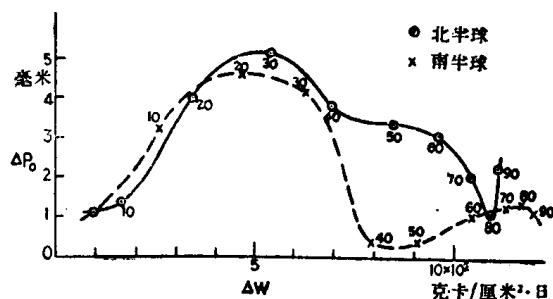


图4 緯圈平均地面气压年较差 ΔP_0 (7月—1月) 与 ΔW 的关系
(P_0 取自文献[19])

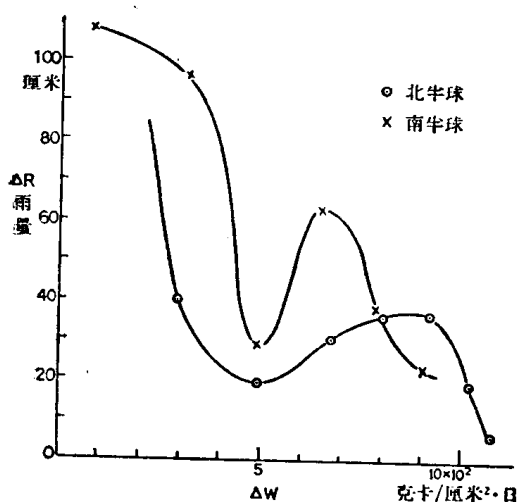


图5 緯圈平均降水量年较差 ΔR (最大月—最小月) 与 ΔW 的关系
(R 取自文献[20])

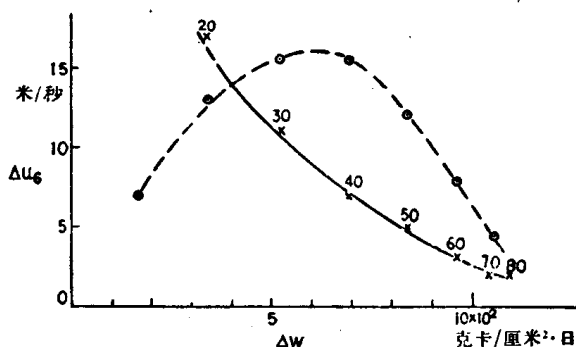


图6 北半球平均6千米高空风年较差 Δu_6
(7月—8月) 与 ΔW 的关系
(资料取自文献[17], 实线是馬什科維奇的算得值^[16])

同样, 我們可以看一北半球多年月平均500毫巴高度和温度分布是否也能用线性模式由太阳辐射输入算出来。图7是东經140°, 东經10°与西經80°的7月平均500毫巴高度年差对 ΔW 的分布。图8是东經140°与西經80°上500毫巴月平均气温年差与 ΔW 的分布。从图上可見在北緯50°—60°以南20°以北, 这些输出都对太阳辐射作线性响应。由此可見, 有希望可以根据线性模式, 由太阳辐射来算出北半球中緯度月平均500毫巴气温和高度的年变。

从这里也可以得到另一个結論。既然凝結蒸发是非线性过程, 而月平均温度对太阳辐射是线性响应, 那么对于月平均温度來說(可能热带地区除外), 蒸发、凝結(降水)对它的作用不大, 或者在比較长的時間間隔中只起了线性的作用, 这是上面所提出的观点得到另一个印証。

对各別年份, 这些气象要素月平均值也对太阳辐射作线性响应。我們可以看一这些气象要素各年月平均值变化的頻譜。根据气候学上的一些研究^[24], 可以知道在中緯度各

地的地面气温月平均值变化的周期图上最主要的频率仍是年变化的频率 ω_1 ，只有地面温度的年振幅占绝对优势，它比周期一年以上的成分大 10 倍到 20 倍。但是对降水和气压

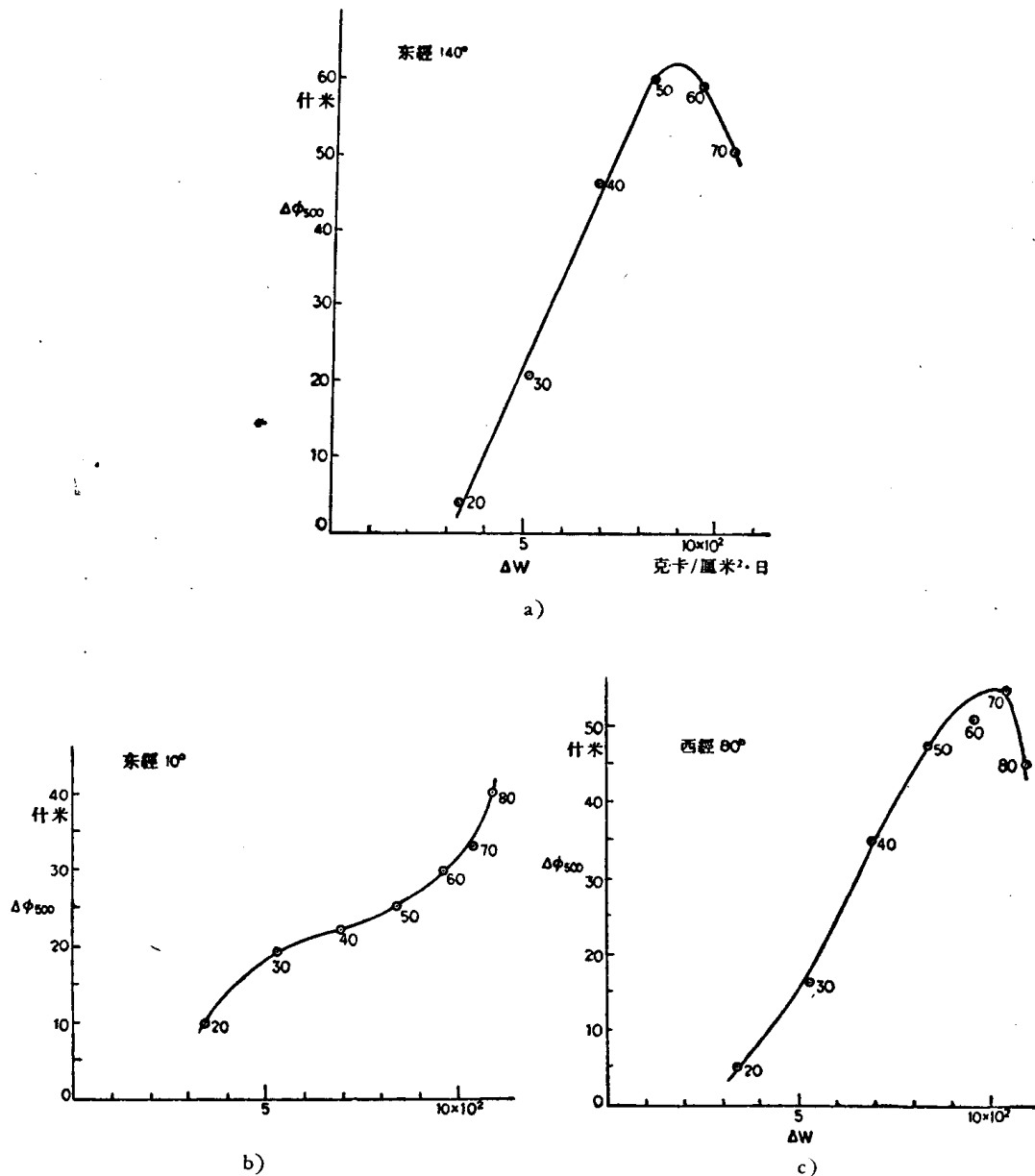


图 7 北半球 500 毫巴月平均高度年较差 $\Delta\phi_{500}$ (7 月—1 月) 与 ΔW 的关系
(ϕ_{500} 取自文献[21]) a) 沿东经 140° b) 沿东经 10° c) 沿西经 80°

来说，年变化与更低频成分的振幅比例是 3:1 到 3:2。因此，降水月总量的变化非线性是很强的(图 9)。对于温度月平均值来说，它的高频部分(周期小于一年)也是不大的，例如在我国^[25] 和日本^[26]，在热带以外地区频率 $2\omega_1$ 的振幅是 ω_1 的 1/10—1/20 频率， $3\omega_1$ 也大致如此^[26]。

大家知道，长期天气过程终究不能脱离热量的变换，因而离不了太阳辐射。但是由于温度对辐射的准线性响应，对中纬度来说，我们完全可以用线性模式来处理它。

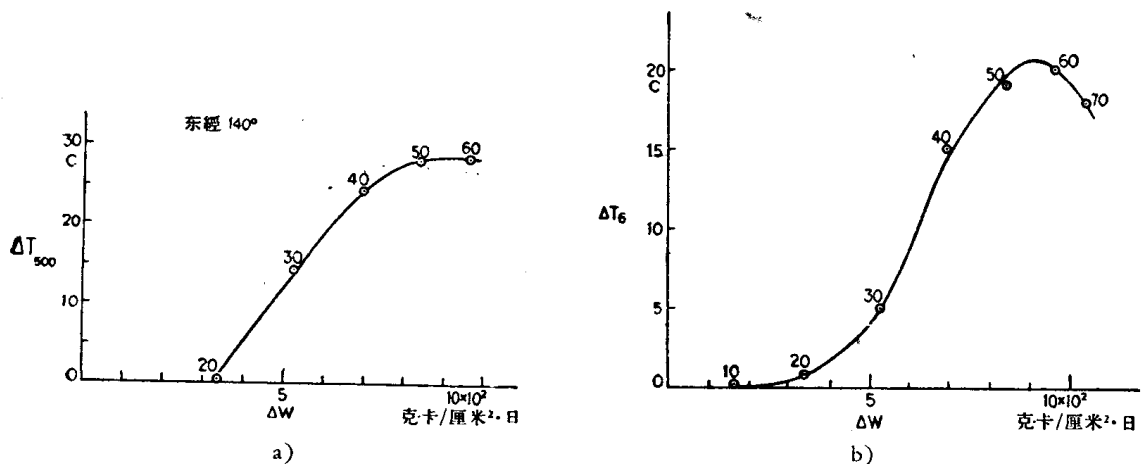


图 8 北半球 500 毫巴月平均气温年较差 ΔT_{500} (7 月—1 月) 与 ΔW 的关系

a) 沿东经 140° T_{500} 取自文献[22] b) 沿西经 80° T_6 取自文献[23]

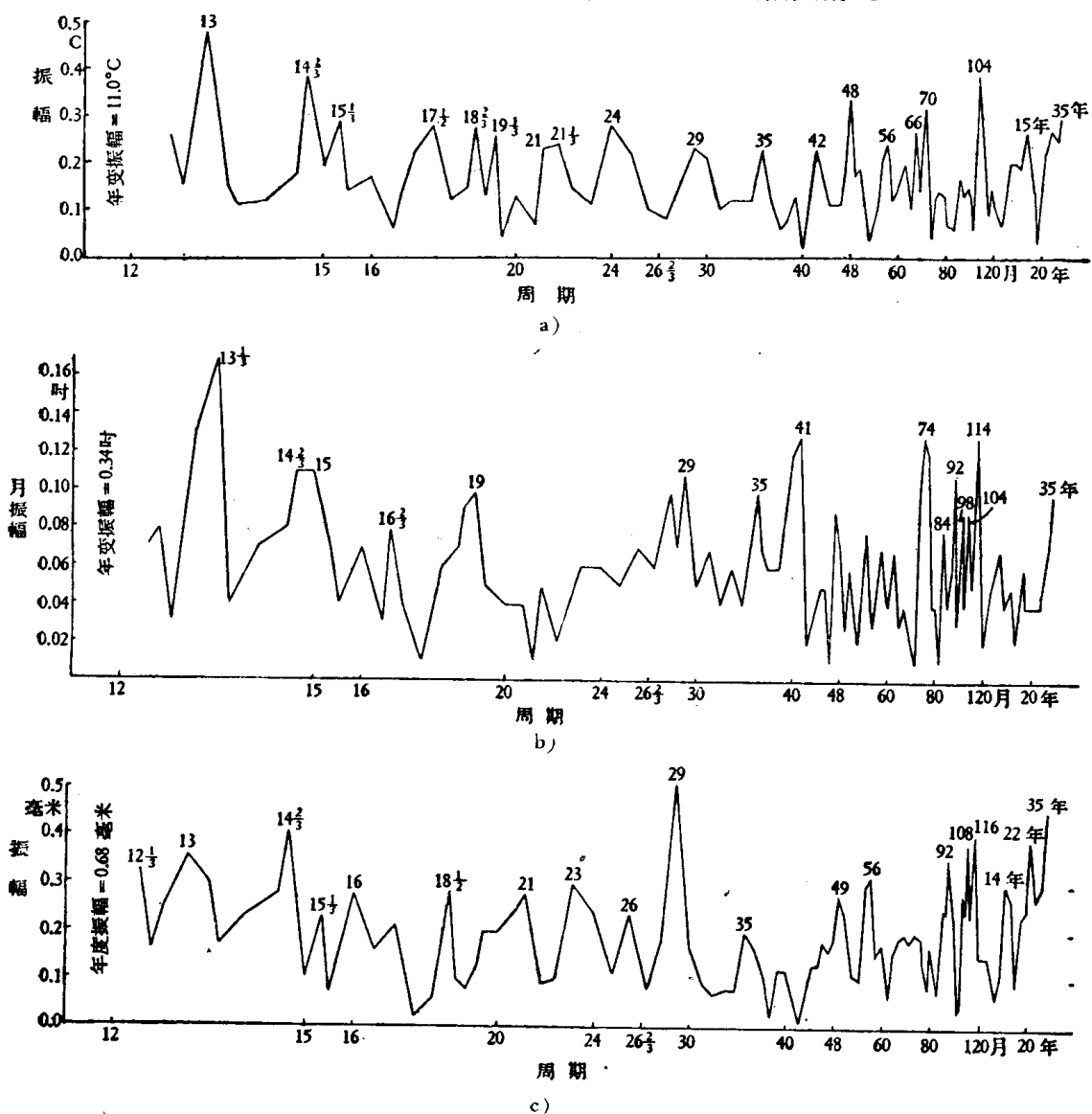


图 9 中纬度气象要素的周期图

a) 斯德哥尔摩气温 b) 伦敦雨量 c) 巴黎气压(取自文献[24])

在这里我們所討論的只是大气作为开环系統对最后的輸入即太阳輻射的响应。但是在研究中也把近似的閉环系統来代替。例如可以用大气实际受热量作为輸入，来研究大气对它的响应。对某些特殊問題(例如，短期預报問題)，还可以用閉环系統来表示大气系統，研究几个元件之間的相互影响。例如大气实际所接受的太阳总輻射是大气影响的結果，也可以作为輸入来考虑。但是根据別尔良德(Берлянд)^[27]的材料，它对米兰科維希所算出的理想的太阳輻射分布的关系，它們之間的綫性响应并不太好(图 10)。

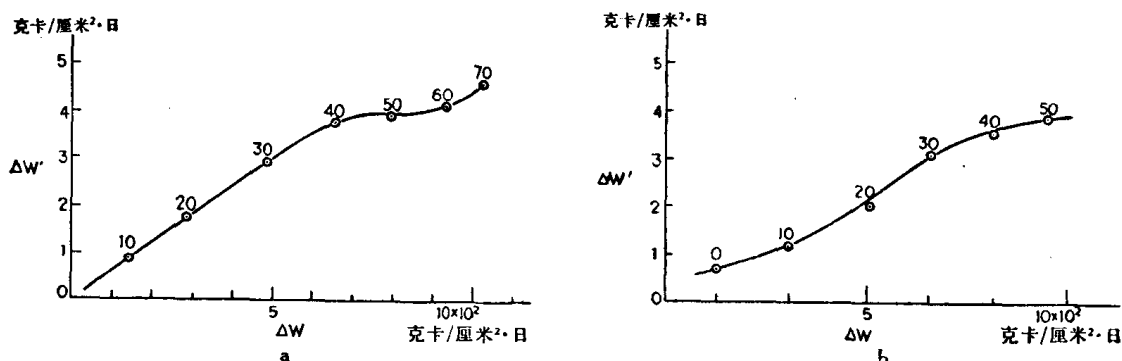


图 10 緯圈平均的地面太阳总輻射量年較差 $\Delta W'$ 与 ΔW 的关系
a) 沿东經 140° b) 沿西經 80°

主要的是，弄清楚大气自动調整的实际性能和大气响应的实际情况，然后，按照这些資料来設計我們的模式。就象在自动調整理論中只确定系統的运轉性能，再确定所需要的元件和它們組合的方式一样。这可以使我們的模式容易接近实际得多。

这样我們有必要了解一下大气响应的实际情况。严格說来大气过程是非綫性的，因此它的頻率特性曲綫要按外来輸入的振幅和頻率而定，所得到的应是一个曲綫族。但是太阳(可見)輻射輸入的振幅与頻率基本上不变。对大尺度大气过程的平均情况來說，我們姑且把大气看作綫性系統。但就地面温度來說，年变化成分的响应由图 1 可知，位相落后是一个月，中緯度日变化成分的响应大致是 $7^\circ\text{C}/\text{卡} \cdot \text{分}^{-2} \cdot \text{厘米}^{-2}$ ，位相落后大致是一小时。更高的頻率的变化只有日蝕时最明显。根据观测^[28]，响应大致有 $4^\circ\text{C}/\text{卡} \cdot \text{分}^{-2} \cdot \text{厘米}^{-2}$ 位相落后，時間約 15 分鐘(全蝕始末共約二小

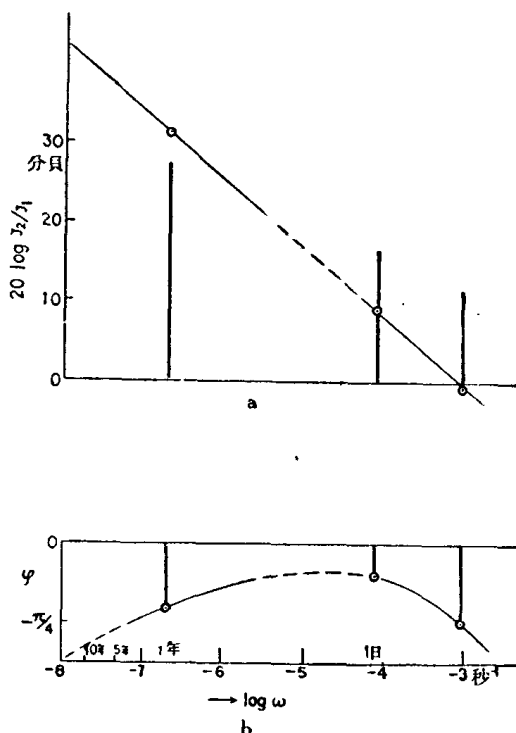


图 11 地面气温与太阳輻射輸入的頻率特性
a) 对数振幅特性 b) 相位特性

时)。这样我們大致有图 11 上的三个譜綫。明显的是地面温度对太阳辐射的响应,在頻率愈低时,放大愈厉害。对于 500 毫巴高度和温度來說情形也很类似*。

这就是設計开环模式的基本資料。至于如何进行設計,我們将在下节討論。

三、綫性模式設計問題

一般說来,大气过程的非綫性是經常的、普遍的、无条件的,綫性是暫时的、局部的、有条件的。然而,非綫性响应也可以綫性化。在动力气象学中用的对西风基本气流的扰动法,不是其中最簡單的一个。对于月平均温度的年变化等來說,象苏联作者^[30]那样采用气候平均量的場作为基本場效果更好,也許用天体力学^[31]中使运动参数(如振幅頻率)作微小变化也是一个办法。

对于行星波來說,在两种情形下可以考虑綫性問題,一是研究它的自由振蕩;根本不用太阳辐射輸入。另外一个是对論它的定常振蕩(由地形等形成),即是作为对边界条件或預先給定的能造成行星波的定常加热場(沿緯圈上各地不同)的响应。

也可以研究模仿电子学上的办法,对大气系統加上一个高频大振幅輸入^[6]而把非綫性問題变成綫性問題来考虑**。

仅仅是小振幅并不能总保証它是綫性的。只有研究自由振蕩时,小振幅才可以說是綫性的。如果考虑外界某种輸入,而輸出的振幅虽然不大,但頻率与輸入完全不同(例如次調和頻率),那末总不能把这大气过程看成是綫性的。

現在我們来討論綫性化后的长期預报模式,仍从渦度方程出发。因为現在还没有具体理由說明渦度方程的完全形式,不适合于长期預报。無論如何对大尺度长时期的运动,由尺度理論来看輻散总比渦度小好得多。不同的是在目前看来,大气加热場这个能源还得加以考虑,因此模式就必须是阻尼的***。

自动調整理論中的方法,基本上就是根据系統的實驗頻率特性或由系統运动方程得来的传递函数对調整系統作定性分析,它的优点就是不用先具体求出系統的运动方程的完全解,也不用作實驗問題(如单波解),就可以定出系統稳态輸出的放大性質、相位性質、調整过程中的超調性質以及系統的穩定性和各个参数对这些性質的作用。因此可以为設計模式提供有效的方法。大家知道在工程中不先充分設計好,而来試造实际系統,就会造成极大的浪費。

* 順便指出,韦克斯勒(Wexler)^[29]曾实质上假定了大气平均温度場对太阳辐射的綫性响应,但他的图 8 实际上不能用来找出大气温度对太阳辐射的真正响应放大。此外,他計算沿經綫的平均温度时,所取的緯度間隔包括了高緯度地带,这些地方的温度还不一定对太阳辐射作綫性响应。因此,他所提出的数字是有疑問的。他也不曾注意到对不同頻率的响应,放大系数可能有所不同。

** 平滑化在这里并不能起所希望的綫性化作用,因为象次調和頻率的波动是长周期的。它在平滑化后反而更为突出,也就是非綫性更为突出。

*** 关于长期过程的可預报性也是一个有意思的問題。这里只想提出,不論每天的运动扰动如何多,大气如何不稳定,长期的統观过程还是可以报的。正象小尺度系統很多,发展很快而 24 小时預报基本上仍是可以做出一样的。

現在我們来分析一个描写长期过程的两层模式，模式中假定热源是固定的，不受运动的影响。但这一点沒有原則性的限制，在后面可以看到，在常系数的綫性系統里，运动对輻射等加热的反饋并不能引起系統結構原則上的改变。

我們在这里作为例子，暫取对緯圈环流作小扰动的綫性化。按气压把大气作四个間隔（如图 12），在 1—3 层上渦度方程为：

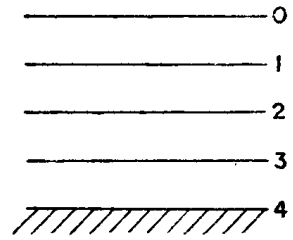


图 12 二层模式中大气的分层

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_1 \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial \phi_1}{\partial x} - f_0^2 \frac{\omega_2}{p_2} = 0, \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_2 \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + f_0 \frac{\omega_2}{p_2} = 0, \quad (2)$$

其中 ϕ_1, ϕ_3 是扰动高度場， $\beta \equiv \partial f / \partial y$ ， f_0 是取定的地轉参数值， $\omega \equiv dp/dt$ 。取 2 层上的热量輸入方程，

$$\frac{f_0^2}{p_2} \omega_2 = \lambda^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_1 \frac{\partial}{\partial x}\right) (\phi_1 - \phi_3) + \lambda^2 (u_1 - u_3) \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\lambda^2 R}{c_p} Q_1(x, t), \quad (3)$$

其中 $Q \equiv \frac{dq}{dt}$ 是热源， $\lambda^2 = \frac{\theta_2}{\theta_1 - \theta_3} \frac{f_0^2}{\phi_1 - \phi_3}$ 是参数， θ 是位温。暫且取 $t = 0$ 时， $\phi_1 = \phi_3 = 0$ ，因为这不影响問題的普遍性。不难看出，如果不取这条件，只需在解中加上一項，而这項又很快地随時間而減小。把以上各式消去 ω_2 ，用拉普拉斯变换，并假定

$$Q = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Q_m(t) e^{imx}, \quad \phi = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \phi_m(t) e^{imx}, \quad (4)$$

$$(p + \alpha'_1) \bar{\phi}_{1m} - (\alpha p + \alpha''_1) \bar{\phi}_{3m} = \frac{R\lambda^2}{c_p} \frac{1}{m^2 + \lambda^2} \bar{Q}_m, \quad (5)$$

$$(\alpha p + \alpha'_3) \bar{\phi}_{1m} - (p + \alpha'_3) \bar{\phi}_{3m} = \frac{R\lambda^2}{c_p} \frac{1}{m^2 + \lambda^2} \bar{Q}_m, \quad (6)$$

其中带“—”的是原来的量的拉氏变换。各 α 是常数，由此解出

$$\bar{\phi}_{jm} = \frac{R\lambda^2}{c_p(1 - \beta_m^2)(m^2 + \lambda^2)} \frac{\mu p - is_{jm}}{p^2 + 2ia_m p + b_m^2} \bar{Q}_m, \quad j = 1, 3, \quad (7)$$

其中

$$\beta_m = \lambda^2 / (\lambda^2 + m^2), \quad \mu_m = 1 - \beta_m,$$

$$s_{1m} = (\beta + \lambda^2 u_3) \frac{m^2}{m^2 + \lambda^2} - m u_3,$$

$$s_{3m} = (\beta + \lambda^2 u_1) \frac{m^2}{m^2 + \lambda^2} - m u_1,$$

$$a_m = m \bar{u} \left[1 - \frac{\beta}{\bar{u}} \frac{m^2 + \lambda^2}{m^4 + 2\lambda^2 m^2} \right],$$

$$b_m^2 = \frac{(\beta^2 - \lambda^2 u_T^2) \left(\frac{m^2}{m^2 + \lambda^2} \right)^2 - (2\beta\bar{u} + \lambda^2 u_T^2) \frac{m^2}{m^2 + \lambda^2} - u_1 u_3 m^2 \left[\left(\frac{\lambda^2}{m^2 + \lambda^2} \right)^2 - 1 \right]}{\left(\frac{\lambda^2}{m^2 + \lambda^2} \right)^2 - 1},$$

这里 $\bar{u} = (u_1 + u_2)$ 。

现在我们来研究 ϕ 对 Q 的响应。为此, 我们需要研究传递函数

$$F_j(p) = \frac{R\lambda^2}{c_p(1 - \beta_m^2)(m^2 + \lambda^2)} \cdot \frac{\mu_m - i s_{jm}}{p^2 + 2i a_m p + b_m^2}. \quad (8)$$

作为例子, 取 $m = 3$ (全球三个波), $\varphi = 45^\circ$, $u_1 = 20$ 米/秒, $u_3 = 10$ 米/秒, $\lambda^2 = 30.43$ 弧度 $^{-2}$, $\beta = 6.28$ 弧度 $^{-1} \cdot \text{日}^{-1}$, $R\lambda^2/c_p = 8.69$ 时,

$$\mu_m = 0.228, \quad s_{1m} = 0.344 \text{ 日}^{-1}, \quad s_{3m} = 0.213 \text{ 日}^{-1}, \quad \beta_m = 0.772$$

$$a_m = -0.322 \text{ 日}^{-1}, \quad b_m^2 = 1.934 \text{ 日}^{-1}, \quad (1 - \beta_m^2)^{-1}(m^2 + \lambda^2)^{-1} = 0.0627.$$

先看稳定性, 容易看出, 由于 $a_m < 0$, $F_j(p)$ 方程式没有实数根, 它的极点是在 $-i(a_m \pm \sqrt{a_m^2 + b_m^2})$, 因此这输出是稳定的。

再看放大性质。我们先把 $i\omega$ 代替 $F(p)$ 里的 p , 即考虑输入是等幅周期函数, 而研究稳态输入量。取 $F(i\omega) = Ae^{i\varphi}$, 这里 A 就是放大系数, 而 φ 就是输出对输入的相角。这样

$$F_j(i\omega) = \frac{R\lambda^2}{c_p(1 - \beta_m^2)(m^2 + \lambda^2)} \frac{i(\mu_m\omega - s_{jm})}{b_m^2 - 2a_m\omega - \omega^2}. \quad (9)$$

而放大系数是:

$$|F_j(i\omega)| = \frac{R\lambda^2}{c_p(1 - \beta_m^2)(m^2 + \lambda^2)} \frac{\mu_m\omega - s_{jm}}{b_m^2 - 2a_m\omega - \omega^2}. \quad (10)$$

在长期预报所关心的年变化输入 $\omega_1 = 1.71 \times 10^{-2} \text{ 日}^{-1}$, 对第一层的长期变化

$$|F_1(i\omega_1)| = 6 \text{ 什米/卡} \cdot \text{厘米}^{-2} \cdot \text{分}^{-1},$$

而

$$|F_3(i\omega_1)| = 4 \text{ 什米/卡} \cdot \text{厘米}^{-2} \cdot \text{分}^{-1},$$

又现在 $\mu\omega_1 - s_{jm} < 0$, 故 $\varphi = -\pi/2$, 即落后三个月。

对 500 毫巴层来说取 $|F_1(i\omega_1)|$ 与 $|F_3(i\omega_1)|$ 的平均得放大系数为 5 什米/卡·厘米 $^{-2} \cdot \text{分}^{-1}$ 。在实际大气中根据已知材料^[33], 500 毫巴高度对冷热源的响应是 60 什米/卡·厘米 $^{-2} \cdot \text{分}^{-1}$, 相差约十倍*, φ 大约落后一个月(注意, 冷热源不是指太阳辐射)。由此可见, 这模式的响应情况不符合大气实际情况。

容易看出, 由于 $F(p)$ 的构造, 我们虽可以改变极大系数, 但无法用改变参数的方法来改变相位角。

也可以看出, 由于 $F(p)$ 的零点在 is_{jm}/μ_m 的地方, 对周期 $T_1 = 2\pi\mu_m/s_{1m} = 4$ 日的

* 用这模式由巢纪平等^[32]计算过一个特解, 这个方程对时间一个月后计算得的放大系数是 8 什米/卡·厘米 $^{-2} \cdot \text{分}^{-1}$ 。

輸入,輸出 ϕ_1 就沒有响应。而对日变 $\omega_2 = 6.28 \text{ 日}^{-1}$ 來說

$$|F_1(i\omega_2)| = 1 \text{ 什米/卡} \cdot \text{厘米}^{-2} \cdot \text{分}^{-1},$$

这还是接近实际情况的。但总的來說,这模式是不合式的。

上面的分析,如果直接解原来的方程組进行計算来了解,要費事得多。

現在我們引进外来的太阳輻射 W 作为輸入,考虑輻射过程、渦度和热量的湍流輸送、地面摩擦等。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left[\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} - \lambda^2 (\phi_1 - \phi_3) \right] + \beta_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} - A\nu \frac{\partial^4 \phi_1}{\partial x^4} + \\ + \lambda^2 A_r \frac{\partial^2 (\phi_1 - \phi_3)}{\partial x^2} + \frac{4\lambda^2 \lambda_1 \bar{T}^3}{R} (\phi_1 - \phi_3) = -\lambda^2 \lambda_1 W', \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_3 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left[\frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x^2} + \lambda^2 (\phi_1 - \phi_3) \right] + \beta_3 \frac{\partial \phi_3}{\partial x} - A\nu \frac{\partial^4 \phi_3}{\partial x^4} + \frac{3}{2} k \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x^2} - \\ - \frac{k}{2} \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x^2} - \lambda^2 A_r \frac{\partial^2 (\phi_1 - \phi_3)}{\partial x^2} - \frac{4\lambda^2 \lambda_2 \bar{T}^3}{R} (\phi_1 - \phi_3) = \lambda^2 \lambda_1 W'. \end{aligned} \quad (12)$$

初始条件暫且仍取

$$t = 0, \quad \phi_1 = \phi_3 = 0, \quad \beta_1 = \beta + \lambda^2(u_1 - u_3), \quad \beta_3 = \beta - \lambda^2(u_1 - u_3),$$

λ_1 是常数。由此

$$\frac{d\phi_{1m}}{dt} - \beta_1 \frac{d\phi_{3m}}{dt} + \alpha'_1 \phi_{1m} - \alpha''_1 \phi_{3m} = \lambda_1 \beta W_m, \quad (13)$$

$$\frac{d\phi_{3m}}{dt} - \beta_3 \frac{d\phi_{1m}}{dt} + \alpha'_3 \phi_{3m} - \alpha''_3 \phi_{1m} = -\lambda_1 \beta W_m, \quad (14)$$

其中 $\beta = \lambda^2/\lambda^2 + m^2$, 各 α 中含有 A_r , λ^2 , m , λ_2 , λ_1 , $\bar{T}$, k , u_1 , u_3 等参数。

$$\bar{\phi}_{im} = \frac{\lambda_1}{1 - \alpha^2} \frac{\mu_m p + s_1}{p^2 + Ap + B} \bar{W}_n, \quad (15)$$

其中 $\mu_m = 1 - \beta_m$, s_1 , A , B 都是复数。这个方程在結構上与朱抱真同志考虑輻射的綫性模式^[33]是一样的。对边界条件的传递函数也有相似的构造。

由于公式中 s_1 , A , B 都是复数, 稳定輸出 ϕ_1 的相角就不一定是 $-\pi/2$, 因而这模式更能接近实际大气。

在放大系数方面,我們有更多的参变数可以調节,使它更合于实际情况,在这里我們需要提出的是,應該放弃过去那种先取参数值,再解出方程,大量試算例子的办法来逐步改进参数和模式。相反的,我們應該由传递函数直接研究它在这种构造下使模式頻率特性与大气响应性質最接近的参数值是什么,也就是說我們不采取理論工作中的分析办法,而象工程上那样配合实验数据,求参数的經驗数值。这好象数学中用低次多項式在自变数的某个間隔中作一个复杂的函数最优逼近一样,最优逼近多項式的系数自然不是原来函数幂級数展开式里的系数。在我們的模式中这些系数完全可以由所給的頻率特性(各个輸入頻率下的放大系数及相角)来决定。