教育部高职高专规划教材

Jiaoyubu Gaozhi Gaozhuan Guihua Jiaocai

线性代数

钱椿林　编

高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

教育部高职高专规划教材

线性代数

钱椿林 编

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/钱椿林编．—北京:高等教育出版社，
2000（2001 重印）
教育部高职高专规划教材
ISBN 7－04－008704－9

Ⅰ．线…　Ⅱ．钱…　Ⅲ．线性代数－高等学校:技术
学校－教材　Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 26400 号

线性代数
钱椿林　编

出版发行	高等教育出版社		
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	邮政编码	100009
电　　话	010－64054588	传　　真	010－64014048
网　　址	http://www.hep.edu.cn		
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	中国农业出版社印刷厂		
开　　本	850×1168　1/32	版　　次	2000 年 7 月第 1 版
印　　张	7.25	印　　次	2001 年 1 月第 2 次印刷
字　　数	170 000	定　　价	7.80 元

内容提要

本书是教育部高职高专规划教材，是根据教育部最新制定的《高职高专教育线性代数课程教学基本要求》而编写的．本书作者是享受政府特殊津贴的资深专家，长期从事线性代数的教学、科研工作．

本书从高职高专教育的特点和要求出发，以线性方程组为主线，以矩阵作为工具，使线性代数的基本概念、基本理论、基本方法围绕线性方程组而展开，突出重点，突出对学生计算能力的培养，并注重解题方法的归纳和总结．各章均配有典型的例题及习题，便于学生巩固所学内容．

全书内容包括行列式、矩阵、线性方程组、相似矩阵与二次型等．

本书可作为高等专科学校、高等职业学校、成人高等学校及本科院校举办的二级职业技术学院工科各专业线性代数课程的教材，也可供工程技术人员参考．

出版说明

教材建设工作是整个高职高专教育教学工作中的重要组成部分。改革开放以来，在各级教育行政部门、学校和有关出版社的共同努力下，各地已出版了一批高职高专教育教材。但从整体上看，具有高职高专教育特色的教材极其匮乏，不少院校尚在借用本科或中专教材，教材建设仍落后于高职高专教育的发展需要。为此，1999年教育部组织制定了《高职高专教育基础课程教学基本要求》（以下简称《基本要求》）和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》（以下简称《培养规格》），通过推荐、招标及遴选，组织了一批学术水平高、教学经验丰富、实践能力强的教师，成立了“教育部高职高专规划教材”编写队伍，并在有关出版社的积极配合下，推出一批“教育部高职高专规划教材”。

“教育部高职高专规划教材”计划出版500种，用5年左右时间完成。出版后的教材将覆盖高职高专教育的基础课程和主干专业课程。计划先用2～3年的时间，在继承原有高职、高专和成人高等学校教材建设成果的基础上，充分汲取近几年来各类学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验，解决好新形势下高职高专教育教材的有无问题；然后再用2～3年的时间，在《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上，通过研究、改革和建设，推出一大批教育部高职高专教育教材，从而形成优化配套的高职高专教育教材体系。

“教育部高职高专规划教材”是按照《基本要求》和《培养规格》的要求，充分汲取高职、高专和成人高等学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验和教学成果编写而成的，适用于

高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院和民办高校使用。

教育部高等教育司

2000 年 4 月 3 日

前　言

本书是教育部高职高专规划教材，是根据教育部“三教统筹”的精神，以最新制定的《高职高专教育线性代数课程教学基本要求》为依据编写而成的.

在本书编写过程中，作者结合多年从事线性代数课程教学、科研的体会，遵循高职高专教材的编写原则，以“必需、够用”为度，概念和结论的引入由具体到抽象、由特殊到一般，适当减少个别结论的推导与证明，力求通俗易懂，深入浅出；以线性方程组为主线，以矩阵作为工具，注重解题方法的归纳，突出重点，分散难点，使之易教易学；在讲清基本概念的基础上，引导学生进行归纳、对比和思考，突出对学生计算能力、逻辑思维能力和推理能力的培养. 全书内容可在 27 学时内授完.

书中带“ * ”号的内容，可不作为教学要求，学生可根据具体情况，自行选学.

本书由北华大学杜忠复教授主审.

本书在编写过程中，得到了有关方面的大力支持. 苏州广播电视大学的陈洁老师给予了大力协助和帮助. 高等教育出版社的编辑为本教材的编写出版付出了大量的时间和精力. 在此一并致谢.

由于编者水平有限，书中难免有不足之处，诚恳地希望读者批评指正.

编　者

2000 年 1 月于苏州

目　　录

第 1 章　行　列　式

在初等代数中，为便于求解二元和三元线性方程组，引进了二阶行列式和三阶行列式。为了研究一般的 n 元线性方程组，需要把二阶、三阶行列式加以推广。本章我们将讨论 n 阶行列式的概念、基本性质及其应用，还将介绍常用的几种计算 n 阶行列式的方法和用行列式解线性方程组的一种重要方法——克拉默法则。

1.1　n 阶行列式的定义

1.1.1　二阶和三阶行列式

在求解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1.1}$$

时，曾将 x_1 和 x_2 的 4 个系数组成的算式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 简记成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

即有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

这个符号称为**二阶行列式**，其中的数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为该行列式的元素，每个横排称为行列式的行，每个竖排称为行列式的列。此时，a_{ij} 的第 1 个下标 i 表示它位于自上而下的第 i 行，第 2 个下标 j 表示它位于从左到右的第 j 列，即 a_{ij} 是位于行列式第 i

行与第 j 列相交处的一个元素.

对于线性方程组(1.1.1),若分别记

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.1.2}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

其中(1.1.2)式等号右边的式子又称为**二阶行列式 Δ 的展开式**.则当 $\Delta \neq 0$ 时,易验证它的解为

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{1.1.3}$$

由此可见,二阶行列式就是对二元一次方程组中未知量 x_1,x_2 的系数和常数项这些元素之间的一种规定所得到的一个数值.

类似地,对于三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.1.4}$$

为了简单地表达它的解,我们引进三阶行列式的概念,三阶行列式的展开式规定为:

$$\begin{aligned} \Delta = & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ & = (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \\ & \quad (-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + \\
&\quad a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - \\
&\quad a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}
\end{aligned}
\tag{1.1.5}
$$

例 1 计算行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

解 利用展开式计算,得

$$
\begin{aligned}
\Delta &= (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\
&= (-1)[1\times 1 - 1\times(-1)] - 2[(-2)\times 1 - 1\times 3] + \\
&\quad 3[(-2)\times(-1) - 1\times 3] \\
&= -2 + 10 - 3 = 5
\end{aligned}
$$

所以,三阶行列式也是一个数值,它可以通过转化为二阶行列式的计算得到.

三阶行列式可以用来解三元一次方程组.若分别记三阶行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

如果方程组(1.1.4)的系数行列式 $\Delta \neq 0$,那么方程组有唯一解,其解同样可以简洁地表示为:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} \tag{1.1.6}$$

在方程组(1.1.4)的解的表达式(1.1.6)中，$x_i(i=1,2,3)$的分母均是(1.1.4)的系数行列式 Δ，x_i 的分子是把系数行列式Δ的第i列换成方程组(1.1.4)中的常数项，其余列不动所得到的行列式，可简记为 $\Delta_i(i=1,2,3)$.

例 2 解方程组

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

解 方程组的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -5 \neq 0$$

所以方程组的解为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -3 & 1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-5} = 1,\quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 7 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-5} = -2,$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -3 & 7 \\ 1 & 1 & -4 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-5} = 3$$

上面，我们介绍了在系数行列式不等于零时用二阶、三阶行列式解二元、三元线性方程组的方法.下面，我们将二阶、三阶行列式的概念推广到 n 阶行列式，并用 n 阶行列式来解 n 元线性方程组，其中 n 是任意的正整数.

1.1.2 n 阶行列式

我们定义了二阶、三阶行列式，又将三阶行列式转化为二阶行列式来计算. 一般地，可用递归法来定义 n 阶行列式.

定义 1 将 n^2 个数排列成 n 行 n 列(横的称行，竖的称列)，并在左、右两边各加一竖线的算式，即

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 **n 阶行列式**，它代表一个由确定的运算关系所得到的数. 当 $n=2$ 时，

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

当 $n>2$ 时，

$$D_n = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}$$

其中数 a_{ij} 称为第 i 行第 j 列的元素，

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

称为 a_{ij} 的**代数余子式**；M_{ij} 为由 D_n 划去第 i 行和第 j 列后余下元素构成的 $n-1$ 阶行列式，即

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称 M_{ij} 为 a_{ij} 的**余子式**.

例如,四阶行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 6 & 11 \\ -6 & 8 & -1 & 10 \\ 9 & -4 & -8 & 15 \\ -3 & -2 & 5 & 18 \end{vmatrix}$$

中,元素 a_{32}的余子式即为划去第 3 行和第 2 列元素后的三阶行列式

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 11 \\ -6 & -1 & 10 \\ -3 & 5 & 18 \end{vmatrix}$$

元素 a_{32}的代数余子式即为余子式 M_{32}前再加一符号因子

$$A_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = -\begin{vmatrix} 4 & 6 & 11 \\ -6 & -1 & 10 \\ -3 & 5 & 18 \end{vmatrix}$$

从定义 1 可以知道,一个 n 阶行列式代表一个数值,并且这个数值可按定义由第 1 行所有元素与其相应的代数余子式乘积之和而得到.我们常将这定义简称为 n 阶行列式按第 1 行展开.

例 1 计算三阶行列式

$$D_3 = \begin{vmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

解 由定义

$$D_3 = (-2)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + (-4)\cdot(-1)^{1+2}\cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 24 - 84 + 12 = -48$$

例 2 计算四阶行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & -5 \\ -4 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 5 & 7 & 0 \\ -3 & 4 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

解 由定义

$$D_4 = 3\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 7 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{vmatrix} + (-5)\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 7 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 3\left[1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}\right] +$$

$$5\left[(-4)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}\right]$$

$$= 3[-7 + 2(-10-28)] + 5[(-4)\cdot(-10-28) -$$

$$(-12+21)] = 466$$

通过此题的计算,我们体会到,第 1 行的零元素越多,按第 1 行展开时计算就越简便.

1.1.3 几种特殊的行列式

下面利用行列式的定义来计算几种特殊的 n 阶行列式.

只有在对角线上有非零元素的行列式称为**对角行列式**.

例 1 证明对角行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \qquad (1.1.7)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \tag{1.1.8}$$

其中行列式(1.1.7)主对角线上的元素是 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$,行列式(1.1.8)次对角线上的元素是 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$,其他元素都是零.

证 对行列式(1.1.7),利用 n 阶行列式的定义依次降低其阶数,则得

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix}$$

$$= \lambda_1\lambda_2(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \lambda_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix} = \cdots = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

对行列式(1.1.8),注意到降低阶数时,元素 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n-1}$,$\lambda_n$ 依次在第 $n,n-1,\cdots,2,1$ 列,故有

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \lambda_1(-1)^{1+n} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_3 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$