

解析几何学辞典

问题解法

问题解法

解析几何学辞典

问 题 解 法
解 析 几 何 学 辞 典

〔日〕笹部貞市郎 编

关桐书 李开成 刘正一
董嘉礼 李开功 杨玉茹 译

上海教育出版社出版

(上海永福路123号)

新华书店上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷

开本850×1156 1/32 印张28 插页4 字数1,538,000

1985年11月第1版 1985年11月第1次印刷

印数1—60,000本

统一书号: 17150·12 定价: (精) 6.25元

出版说明

自明治维新以后,日本为了学习西方科学技术,在中小学数学教育上也刻意输入,大量地翻译了欧美有影响的课本。以后又自编教材和各种初等数学读物,逐渐地在初等数学教育的取材、编排、题选上形成了自己的特点。根据国内外的情况,日本数学教学也迭经改革,但仍然有着不同于欧美、苏联的地方。为了从一个方面了解这种特点,我们组织翻译了这一套题解辞典。

这几本辞典的题目及解答远不是数学教育的全部,但是由于它的写作年代较近,作者在编选题目时又比较注意立足日本中学数学教育所注重的东西。这些都可以供我国的数学教师了解借鉴。这几本辞典选择的题目有相当部分是初等数学所必需的基础训练题,当然更可以作为教学中的参考材料。

需要说明的是,这几本辞典卷帙浩大,各册各章的编写质量并不一致,错误、重复之处多有发现,我们在组织翻译时只纠正了发现的错误,删去了各册中的数学小史和一些数表,如对数表、三角函数表等,还删去了一些明显重复的题目,其他未作改动。希望读者能在使用中注意。

原 序

在本书问世之前,已经出版了《几何学辞典》、《代数学辞典》、《三角学辞典》、《微积分学辞典》以及《数学公式辞典》,本书是作为这些辞典的姊妹篇而编写的。数学不仅是科学文明之母,甚至日常生活之中也不可缺少数学,这都无须赘述;但是谈起数学时,总以为这门科学艰深难懂,不免敬而远之;即使偶尔有钻研数学的人,也往往在学习失去信心和兴趣,而止步不前。产生这些现象的原因是什么?

其实,从数学的发展历史可以看出,最初,在人类文化未开发的蒙昧时期,开始有了简单的计算,其取材也只限于身边的直观事物;后来随着人类知识积累的日益增长,经数千年的岁月,由许多学者的相继努力,才达到今日发展的高度,现阶段的数学仍在突飞猛进而无止境。因此,学习数学的唯一诀窍,就如攀登阶梯一样要循序渐进,由一阶到二阶,由二阶以至三、四阶,形成完整有系统的知识,切忌一蹴而就。

当然,解析几何的建立归功于笛卡儿,以后又经许多学者坚持不懈的研究,才取得了今天的成就,其范围涉及数学的全领域,程度也十分高深。但是,本书的主要读者对象是高中学生,特别是参加高考的学生。

此外,一般地说,解析几何中常需要初等几何知识,鉴于目前不少学生关于这方面的知识可能有所不足,因此在本书末增加了解析几何所需要的一章平面几何,供读者参考。

本书编写和校对时,曾得到畏友倉本熊雄先生的大力协助,在此谨深致谢忱。

作 者
1967年9月

目 录

第一章 绪 论

§ 1. 解析几何学的意义	1	§ 4. 线段的中点、内分、外分	3
§ 2. 坐标	1	§ 5. 坐标平面	6
§ 3. 直线坐标	1	§ 6. 两点间的距离	13

第二章 直 线

第一节 直线方程

§ 1. 直线 $y=ax+b$ 的斜率	19
§ 2. 直线 $y=ax+b$ 的截距	24
§ 3. 过原点的直线方程	27
§ 4. 直线的截距式方程	28
§ 5. 直线的点斜式方程	30
§ 6. 直线的两点式方程	33
§ 7. 过两直线交点的直线方程	35
§ 8. 表示两条直线的方程	37

第二节 直线的各种性质

§ 1. 三条直线交于一点的条件	41
§ 2. 两直线重合的条件	43
§ 3. 两直线平行的条件	44
§ 4. 垂直于定直线的直线	49
§ 5. 点到直线的距离	58
§ 6. 直线的法线式方程	60
§ 7. 两平行线间的距离	61
§ 8. 两直线的交角	62
§ 9. 角平分线	64

第三节 各种 问题

§ 1. 绝对值的某些问题	65
---------------------	----

§ 2. 高斯记号的某些问题	73
§ 3. 求未知数的值	75
§ 4. 区域	76
§ 5. 平行移动	89
(1) 沿 x 轴平行移动	89
(2) 沿 y 轴平行移动	90
(3) 沿定直线平行移动	92
§ 6. 对称移动	93
(1) 关于定点的对称移动	93
(2) 关于 x 轴的对称移动	94
(3) 关于 y 轴的对称移动	95
(4) 关于原点的对称移动	97
(5) 关于直线 $y=x$ 的对称移动	98
(6) 关于定直线的对称移动	98
§ 7. 面积	102
§ 8. 轨迹	111
(1) 直线形轨迹问题	111
(2) 非直线形轨迹问题	114
§ 9. 证明问题	117
§ 10. 其他	136

第三章 圆

第一节 基本事项

- § 1. 圆的方程(一)157
- § 2. 圆的方程(二)162
- § 3. 已知直径的圆165

第二节 圆与直线

- § 1. 两条直线的方程169
- § 2. 虚点、虚直线、虚圆170
- § 3. 二次齐次方程所表示的两条直线170
- § 4. 过两圆交点的圆或直线171
- § 5. 圆与直线173

第三节 切线与割线

- § 1. $x^2+y^2=r^2$ 的切线176

- § 2. 斜率为 m 的切线方程181
- § 3. $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 的切线184
- § 4. 切线长、根轴、根心189

第四节 图 形

第五节 区 域

第六节 轨 迹

第七节 杂 题

- § 1. 两圆的问题216
- § 2. 对称圆220
- § 3. 最大、最小值222
- § 4. 极和极线227
- § 5. 其他229

第四章 抛 物 线

第一节 基本事项

- § 1. 抛物线的定义247
- § 2. $y=ax^2$ 的图象247
- § 3. $y=(x+p)^2$ 型图象的变化249
- § 4. $y=ax^2+b$ 型图象的变化250
- § 5. $y=(x+p)^2+q$ 型图象的变化252
- § 6. 对称轴、顶点坐标253
- § 7. 无理函数的图象259
- § 8. 含绝对值符号的函数图象264
- § 9. 其他271

第二节 抛物线的移动

- § 1. 平行移动275
- § 2. 对称移动284

第三节 切线、法线

- § 1. 过 $y=ax^2$ 上一定点的切线289

- § 2. 过 $y=ax^2+bx+c$ 上一定点的切线292
- § 3. 过原点的切线293
- § 4. 与抛物线相切的直线293
- § 5. 切线的斜率299
- § 6. 公切线300
- § 7. 相切的抛物线301
- § 8. 两切线的夹角301
- § 9. 法线302
- § 10. 其他303

第四节 焦点、准线

第五节 最大、最小值

- § 1. 二次函数的最大、最小值323
- § 2. 应用问题341

第六节 区 域

第七节 轨 迹
第八节 求 方 程

第九节 面 积
第十节 杂 题

第五章 椭 圆

第一节 基 本 事 项

§ 1. 椭圆的标准方程	459
§ 2. 顶点、轴、长轴、短轴	461
§ 3. 焦点	464
§ 4. 椭圆位置的相互关系	468
§ 5. 无理函数所表示的椭圆	469
§ 6. 椭圆的参数方程	472

第二节 椭圆的方程、离心率、准线

§ 1. 椭圆的方程、离心率	473
----------------	-----

§ 2. 椭圆的准线	477
------------	-----

第三节 椭圆的切线

§ 1. 斜率为 m 的切线	483
§ 2. 在椭圆上点 (x_1, y_1) 处的切线	484

第四节 轨 迹

第五节 最大、最小值

第六节 其 他

§ 1. 区域	510
§ 2. 杂题	512

第六章 双 曲 线

第一节 基 本 事 项

§ 1. 双曲线的方程、顶点、轴、焦点	517
§ 2. 双曲线的基本矩形	518
§ 3. 平行移动	520

第二节 离 心 率、准 线

§ 1. 离心率	525
§ 2. 准线	526

第三节 渐 近 线

§ 1. 双曲线的渐近线的意义	529
§ 2. 渐近线	534

第四节 切线、法线

§ 1. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的切线、法线	536
§ 2. 应用微分法求切线、法线的方法	537
§ 3. 双曲线的准圆	540

§ 4. $xy = k$ 的切线	540
§ 5. 切线的射影、法线的射影	542
§ 6. 其他	542

第五节 各种类型的双曲线

§ 1. 等轴双曲线(一)	544
§ 2. 等轴双曲线(二)	546
§ 3. 正双曲线	547
§ 4. 共轭双曲线	547
§ 5. 分式函数所表示的双曲线	548
§ 6. 无理函数所表示的双曲线	552
§ 7. 含绝对值符号的双曲线	558
§ 8. 图象的合成	560

第六节 区 域

第七节 轨 迹

第八节 杂 题

第七章 各种函数及其图象

第一节 三角函数

§ 1. 基本事项	587
§ 2. 基本图象	595
§ 3. 图象的变形	600
§ 4. 方程、不等式	605
§ 5. 求角和线段	607
§ 6. 区域	613
§ 7. 最大、最小、极值	617

§ 8. 面积、体积	637
§ 9. 其他	643

第二节 分式函数、无理函数

§ 1. 分式函数	657
§ 2. 无理函数	668

第三节 对数函数、指数函数

第四节 高次函数

第八章 坐标变换、极坐标

第一节 直角坐标

§ 1. 坐标变换	707
§ 2. 平行移动	707
§ 3. 旋转移动	712

第二节 斜角坐标、坐标的一般变换

§ 1. 斜角坐标	718
§ 2. 直角坐标到斜角坐标的变换	719
§ 3. 斜角坐标到直角坐标的变换	719

§ 4. 斜角坐标到斜角坐标的变换、其他	720
§ 5. 坐标的一般变换	722
§ 6. 直角坐标的翻转	722

第三节 极坐标

§ 1. 极坐标	722
§ 2. 直角坐标和极坐标的关系	723
§ 3. 极坐标方程	724
§ 4. 直线的极坐标方程	726
§ 5. 圆的极坐标方程	727
§ 6. 一般二次曲线的极坐标方程	727

第九章 棣莫佛定理和复数

第一节 棣莫佛定理

§ 1. 基本事项	731
§ 2. 棣莫佛定理的一般性	731

第二节 复数

§ 1. 复平面(高斯平面)、复数的三角形

式	734
§ 2. 共轭复数	742
§ 3. 复数运算的几何表示	743
§ 4. 证明问题	745
§ 5. 其他	755

第十章 向 量

第一节 基 本 事 项

- § 1. 什么是向量773
- § 2. 向量的加法、减法774
- § 3. 力的合成775
- § 4. 向量的实数倍777

第二节 向量的分量、数量积

- § 1. 向量的分量表示781

- § 2. 向量的数量积786

第三节 向量的向量积

- § 1. 向量的向量积的意义796
- § 2. 向量积的分量797

第四节 几 何 应 用

- § 1. 其一799
- § 2. 其二807

第十一章 一般二次曲线

第一节 二 次 曲 线

- § 1. 二次曲线的基本性质823
- § 2. 二次曲线的种类823
- § 3. 二次曲线的判别式824
- § 4. 表示两直线的二次方程826

第二节 二次曲线的性质

- § 1. 二次曲线的中心830

- § 2. 双曲线的其他定义831
- § 3. 双曲线的参数方程832
- § 4. 有心二次曲线的共轭直径834
- § 5. 有心二次曲线的切线、法线、其他
.....835
- § 6. 作二次曲线的略图836
- § 7. 双曲线的渐近线837

第十二章 立体解析几何大意

第一节 空间的点、直线、平面

- § 1. 直角坐标、坐标平面839
- § 2. 柱面坐标、极坐标839

第二节 两点间的距离、直线的方向余弦

第三节 两直线的交角、直线方程

- § 1. 两直线的交角842
- § 2. 直线方程843

第四节 与直线和平面有关的问题

- § 1. 平面方程844
- § 2. 两直线平行(或垂直)的条件845
- § 3. 直线与平面垂直(或平行)的条件
.....845
- § 4. 两平面的交线845

第五节 二 次 曲 面

- § 1. 球面847
- § 2. 柱面、圆柱面847

§ 3. 锥面方程	848	§ 2. 二次方程表示的曲线	854
§ 4. 各种二次曲面	849	§ 3. 以共轭直径为坐标轴的椭圆、双曲线方程	855
§ 5. 单叶双曲面、双叶双曲面	849	§ 4. 以直径和过此直径一端的切线为坐标轴的抛物线方程	856
§ 6. 椭圆抛物面、双曲抛物面	850		
§ 7. 旋转曲面的方程	851		
§ 8. 二次曲面的分类	852		

第六节 斜交坐标系中的曲线方程

§ 1. 斜交坐标系中的直线方程	853
------------------------	-----

第十三章 平面几何常识

第一节 三角形的五心

§ 1. 重心	859
§ 2. 垂心	859
§ 3. 内心、旁心	860
§ 4. 外心	862

第二节 毕达哥拉斯定理及其应用

§ 1. 毕达哥拉斯定理	863
§ 2. 毕达哥拉斯定理的应用	864
§ 3. 平方和、平方差	865
§ 4. 帕普斯定理1的逆定理不成立	865
§ 5. 斯徒瓦尔特(Stewart)定理及卡诺(Carnot)定理	867

第三节 面积公式

§ 1. 海伦公式	868
§ 2. 海伦公式的应用	868
§ 3. 三角形的内切圆、旁切圆的半径	869

第四节 圆幂、根轴、根心

§ 1. 圆幂定理	870
§ 2. 根轴	871

§ 3. 根心	871
---------------	-----

第五节 比和比例

§ 1. 平行线	872
§ 2. 角的平分线、阿波罗尼斯(Apollonius)轨迹	873
§ 3. 直角三角形中的比例线段	875
§ 4. 关于圆的比例线段	876
§ 5. 面积的比	878

第六节 调和点列、黄金分割、托勒密(Ptolemy)定理

§ 1. 调和点列	879
§ 2. 黄金分割	880
§ 3. 托勒密定理	881

第七节 梅内劳斯(Menelaus)定理、塞瓦(Ceva)定理

§ 1. 梅内劳斯定理	882
§ 2. 塞瓦定理	882

第八节 空间图形的面积、体积公式

第一章 绪 论

§ 1. 解析几何学的意义

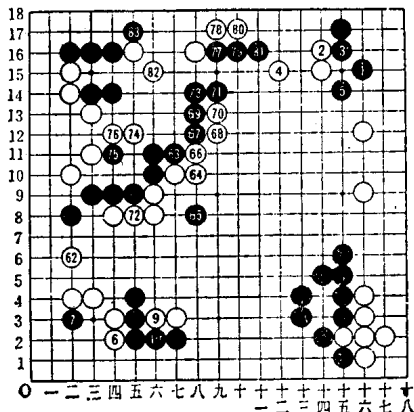
1. 解析几何学是一门什么学问?

解 依据坐标的思想, 定出平面或空间中点的位置, 由此, 利用代数、三角、微积分等研究图形的性质, 这门学问就叫做解析几何学或坐标几何学。从前认为, 以研究图形为主的几何学和以研究数式为主的代数学, 其性质不同, 因而各自发展起来。十七世纪时, 法国的著名学者笛卡儿首先用代数方法研究了几何图形的性质, 并且取得了成功。解析几何的出现是世界数学史上一项重大创造, 这一创造对其后微积分学的发展作出了非凡的贡献, 并且奠定了近世数学的基础。

坐标的概念以及笛卡儿的功绩以后再详述。

§ 2. 坐标

2. 什么是坐标?

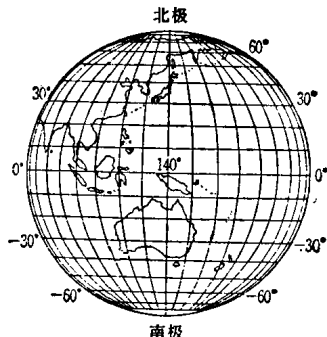


解 上图表示围棋比赛时的一个布局。

设围棋的目自左向右横数为 0、一、二、三、…, 自下向上数为 0、1、2、3、…, 则黑①

的位置就可以表示为(十六, 15), 仿此, 则白②的位置是(十四, 16), 黑⑦是(二, 3), 白⑩是(五, 12)。反之, 如果说(九, 13), 就是白⑩, 而(十, 16)就表示黑⑦。

把一个平面纵横等间隔划分, 并标出分度, 就能够在该平面上标出任意点的位置。



我们看到地球仪或地图上画有纵线和横线, 纵线叫经线, 横线叫纬线, 显然它是表示地球上各点位置的。如果说东经(或西经)几度几分, 北纬(或南纬)几度几分, 那么就能立刻知道该地所在的位置。

§ 3. 直线坐标

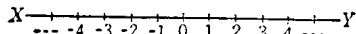
3. 什么是直线坐标?

解 在直线 XY 上以点 O 为基准, 向左右标上单位长相等的刻度:

向右: 1、2、3、4、…

向左: -1、-2、-3、-4、…

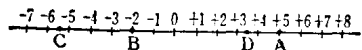
这样的直线叫做数轴。



数轴上, 点 P 所对应的刻度叫做点 P 的坐标, 这样的坐标叫做直线坐标。

4. (1) 指出下面数轴上点 A 、 B 、 C 、 D 的坐标。

另外, 原点的坐标应该是多少?



(2) 把满足下面条件的点, 用 $\bullet$ 标在数轴上:

(i) 自点 $P(+5)$ 沿负向取 -7 的点 P' ;

(ii) 距 $P(-4)$ 恰为 6 的点.

解 (1) $A(+5)$, $B(-2)$, $C(-5.5)$, $D(+3.5)$. 原点坐标是 0.

(2) (i) 沿负向位于 -7 的点就是沿正向取 7 的点, 故点 P' 的坐标是 $5+7=12$, 即 $P'(+12)$.

(ii) 从 -4 向左相距为 6 的点是 $-4-6=-10$, 向右相距为 6 的点是 $-4+6=+2$. 故所求点的坐标是 -10 , $+2$ 的两个点.

5. (1) 以下列各组的两点为端点作线段, 求线段中点坐标:

(i) $+2$, $+8$, (ii) -5 , -3 , (iii) $+8$, -6 ,

(iv) $-1\frac{1}{2}$, $-1\frac{1}{3}$, (v) $-2\frac{1}{3}$, $+3\frac{1}{6}$;

(2) 求以点 $P(a)$, $P(b)$ 为端点的线段的中点坐标;

(3) 以点 $P(+5)$, $Q(x)$ 为两端点的线段的中点坐标为 -4 , 求 x ;

(4) 求点 $P(+7)$, $Q(-4)$ 间的距离, 另外, 求点 $R(-3)$, $S(+5)$ 间的距离.

解 一般地说, 如果点 P , Q 的坐标分别为 a , b , 则线段 PQ 中点的坐标是 $\frac{a+b}{2}$, 因此得下列答案:

(1) (i) $+5$, (ii) -4 , (iii) $+1$, (iv) $-1\frac{5}{12}$, (v) $\frac{5}{12}$;

(2) $\frac{a+b}{2}$;

(3) 以点 $P(+5)$, $Q(x)$ 为端点的线段的中点坐标是 $\frac{5+x}{2}$, 因为它等于 -4 , 所以有下式

$$\frac{5+x}{2} = -4.$$

解之, 得 $x = -13$.

(4) P , Q 两点间距离为 11,

R , S 两点间距离为 8.

6. 以 $P(a)$, $Q(x)$ 为端点的线段的中点坐标为 b , 试求点 Q 的坐标.

解 因为点 Q 的坐标是 x , 所以线段 PQ 的中点坐标是 $\frac{a+x}{2}$. 又因它等于 b , 所以有

$$\frac{a+x}{2} = b.$$

解之, 得 $x = 2b - a$.

注意 如上所述, 以适当的实数(正数、负数或零)表示直线 l 上各点时, 这个实数叫做该点的坐标, l 叫做数轴, 0 所表示的点 O 叫做坐标原点.

如果点 P 的直线坐标为 a , 就记之为 $P(a)$. 设数轴上两点为 $P(p)$, $Q(q)$, 如果 $p < q$, 就把线段 PQ 看做是正线段; 如果 $p > q$, 就把 PQ 看做是负线段. 在许多情况下, 用 $q-p$ 表示线段 PQ 的值较为方便. 这种带有正负符号的线段 PQ 叫做有向线段. 设以点 $P(p)$, $Q(q)$ 为端点的有向线段 PQ , 其值为 d , 则

$$PQ = q - p = d,$$

$$QP = p - q = -(q - p) = -PQ = -d.$$

7. 点 A , B , C 在数轴上, 试证下面等式

$$AB + BC = AC$$

与 A , B , C 的顺序无关.

解 设三点的排列次序是 B , C , A , 现在证明

$$AB + BC = AC.$$

因为 BC , CA , BA 同向, 所以其符号相同.

$$\therefore BC + CA = BA. \quad \textcircled{1}$$

但因 $BA = -AB$, $CA = -AC$,

由 $\textcircled{1}$ 得 $BC - AC = -AB$,

$$\therefore AB + BC = AC.$$

三点按其他顺序排列时, 也可以一样证明. 例如排列次序为 C , A , B , 则因

$$CA + AB = CB, \quad \textcircled{2}$$

$$\begin{aligned} CB &= -BC, \\ CA &= -AC, \end{aligned}$$

由 $\textcircled{2}$ 得 $-AC + AB = -BC$.

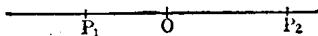
$$\therefore AB + BC = AC.$$

8. 设 O , P_1 , P_2 为一直线上的三点, 而且 $OP_1 = x_1$, $OP_2 = x_2$, 求证

$$P_1P_2 = x_2 - x_1.$$

(利用前题的结果)

解 设 O, P_1, P_2 的顺序如下:



由前题 $P_1O + OP_2 = P_1P_2$. ①

但是, $OP_2 = x_2$, 又从 $OP_1 = x_1$, 得 $P_1O = -x_1$, 代入①, 有

$$-x_1 + x_2 = P_1P_2,$$

$$\therefore P_1P_2 = x_2 - x_1.$$

不论 O, P_1, P_2 的顺序如何, 这个等式都成立.

9. 取数轴上四点 A, B, C, D , 并设下面的线段都是有向线段, 求证与四点的顺序无关, 下式恒成立:

$$(1) AB + BC + CA = 0;$$

$$(2) AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = 0.$$

解 设各点的坐标为 $A(a), B(b), C(c), D(d)$.

$$(1) AB + BC + CA = (b-a) + (c-b) + (a-c) = 0;$$

$$\begin{aligned} (2) AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC &= (b-a)(d-c) + (c-a)(b-d) \\ &\quad + (d-a)(c-b) \\ &= bd - ad - bc + ac + bc - ab - cd \\ &\quad + ad + dc - ac - bd + ab = 0. \end{aligned}$$

10. 设 $A(a), B(b)$ 为数轴上的两点, 试证 $|AB| = |b-a|$.

解 原点 O 与两点 A, B 的顺序无关, 恒有

$$AO + OB = AB, \therefore AB = OB - OA.$$

但因 $OA = a, OB = b$, 所以

$$AB = OB - OA = b - a.$$

又因数轴上两点 $A(a), B(b)$ 间的距离 $|AB|$ 是 AB (有向线段) 的绝对值,

$$\therefore |AB| = |b-a|.$$

§4. 线段的中点、内分、外分

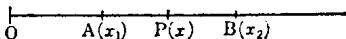
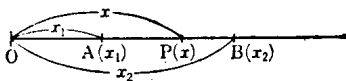
11. 设 $A(x_1), B(x_2)$ 为数轴上两点, 把线段按 $m:n (m>0, n>0)$ 内分, 求证内分点 P 的坐标 x 为

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n},$$

特别地, 如果 P 是线段 AB 的中点, 则

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

解 因为 P 内分线段 AB , 所以 AP 和 PB 同时为正, 或者同时为负,



因此 $AP:PB = m:n$.

但是 $AP = x - x_1, PB = x_2 - x$,

$$\therefore (x - x_1):(x_2 - x) = m:n,$$

即 $n(x - x_1) = m(x_2 - x)$.

解 x 的方程, 得

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}.$$

特别地, 当 P 是线段 AB 的中点时, 令 $m=n$ 代入上式, 得

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

注意 当 $A(-2), B(4)$ 时, 内分 AB 为 $2:1$ 的点 $P(x)$ 为

$$x = \frac{2 \times 4 + 1 \times (-2)}{2+1} = 2,$$

即 $P(2)$.

当 $A(7), B(31)$ 时, AB 的中点 $P(x)$ 为

$$x = \frac{7+31}{2} = 19,$$

即 $P(19)$.

12. 设 $A(x_1), B(x_2)$ 为数轴上两点, 把线段 AB 按 $m:n (m>0, n>0, m \neq n)$ 外分, 求证外分点 P 的坐标 x 为

$$x = \frac{mx_2 - nx_1}{m-n}.$$

解 因为 P 外分 AB , 所以 AP, BP 同向, 故有

$$\frac{AP}{BP} = \frac{m}{n},$$

$$\therefore -\frac{AP}{PB} = \frac{m}{n},$$

$$\text{即 } \frac{AP}{PB} = -\frac{m}{n}. \therefore \frac{x - x_1}{x_2 - x} = -\frac{m}{n}.$$

$$\therefore (m-n)x = mx_2 - nx_1.$$

* $|AB|$ 为 A, B 间距离。——译者

因 $m \neq n$, 两边同除以 $m-n$, 得

$$x = \frac{mx_2 - nx_1}{m-n}.$$

13. 设直线上两相异点的坐标为 $\frac{b}{a}, \frac{d}{c}$.

如果这两点的中点坐标为 $\frac{b+d}{a+c}$, 求证 $a=c$.

解 点 $\frac{b}{a}, \frac{d}{c}$ 的中点坐标为

$$\frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} + \frac{d}{c} \right) = \frac{bc+ad}{2ca}.$$

由题设

$$\frac{bc+ad}{2ca} = \frac{b+d}{a+c},$$

$$\therefore (c-a)(bc-ad) = 0.$$

但因 $\frac{b}{a} - \frac{d}{c} = \frac{bc-ad}{ca} \neq 0$,

$$\therefore bc-ad \neq 0.$$

$$\therefore c-a=0, a=c.$$

14. 把连结点 $A(-3)$ 、 $B(2)$ 的线段按 3:1 内、外分, 求内分点和外分点的坐标, 并求中点的坐标.

解 内分点的坐标 $= \frac{3 \times 2 + 1 \times (-3)}{3+1}$

$$= \frac{3}{4};$$

外分点的坐标 $= \frac{3 \times 2 - 1 \times (-3)}{3-1} = \frac{9}{2};$

中点的坐标 $= \frac{1}{2}(-3+2) = -\frac{1}{2}.$

15. 设把线段 AB 按 $m:n$ 的内分点为 C , 外分点为 D , 求证

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{2}{AB}.$$

解 设各点的坐标分别为 $A(0)$ 、 $B(b)$, $C(c)$ 、 $D(d)$. 由前题

$$c = \frac{mb}{m+n}, d = \frac{mb}{m-n},$$

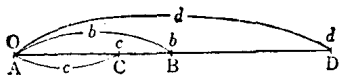
$$\therefore AC = c - 0 = \frac{mb}{m+n},$$

$$AD = d - 0 = \frac{mb}{m-n},$$

$$AB = b - 0 = b.$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} &= \frac{m+n}{mb} + \frac{m-n}{mb} \\ &= \frac{2m}{mb} = \frac{2}{b} = \frac{2}{AB}. \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{2}{AB}.$$



注意 1. 如果 C 、 D 分别按同比内分、外分线段 AB 时, 那么称 C 和 D “调和分割”线段 AB , 并把 A 、 B 、 C 、 D 叫做调和点列, 对 AB 而言, C (或者 D) 叫做 D (或者 C) 的调和共轭点.

2. 如果不考虑符号, 可按如下方法求内分点和外分点.

因为 $AB=b$, 所以 $AC=x$, $BC=b-x$ (不考虑符号), 而且 $\frac{b-x}{x} = \frac{n}{m}$, 由 $mb-mx=$

nx , 得

$$x = \frac{mb}{m+n}.$$

另外, $AD=y$, $BD=y-b$, 有

$$\frac{BD}{AD} = \frac{n}{m}, \therefore \frac{y-b}{y} = \frac{n}{m}.$$

再由 $my-mb=ny$, 得

$$y = \frac{mb}{m-n}.$$

16. 如果四点 $A(a)$ 、 $B(b)$ 、 $C(c)$ 、 $D(d)$ 是调和点列, 求证

$$(a+b)(c+d) = 2(ab+cd).$$

解 因为 A 、 B 、 C 、 D 成调和点列, 所以

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}.$$

但因

$$AC = c-a, CB = b-c,$$

$$AD = d-a, DB = b-d,$$

$$\therefore \frac{c-a}{b-c} = -\frac{d-a}{b-d},$$

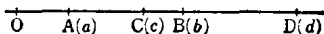
$$(c-a)(b-d) = -(d-a)(b-c).$$

去括号, 得

$$bc-ab-cd+ad+bd-ab-cd+ac=0,$$

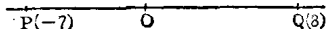
$$bc+ad+bd+ac=2ab+2cd,$$

$$\therefore (a+b)(c+d) = 2(ab+cd).$$



17. 两点为 $P(-7)$ 、 $Q(8)$, 5 等分线段 PQ , 求各分点的坐标.

解 线段 PQ 的长为 $7+8=15$. 设 AB 的 5 等分点为 A, B, C, D , 因 $|PA|=3$, 所以各分点坐标为 $A(-4), B(-1), C(2), D(5)$.



18. 设数轴上四点为 $A(0), B(b), C(c), D(d)$, 求证下列等式成立:

$$(1) AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = 0;$$

$$(2) AB^2 \cdot CD + AC^2 \cdot DB + AD^2 \cdot BC = BC \cdot BD \cdot CD.$$

解 四点是 $A(0), B(b), C(c), D(d)$, 因此

$$(1) AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = b(d-c) + c(b-d) + d(c-b) = bd - bc + bc - cd + cd - bd = 0;$$

$$(2) AB^2 \cdot CD + AC^2 \cdot DB + AD^2 \cdot BC = b^2(d-c) + c^2(b-d) + d^2(c-b) = b^2d - b^2c + bc^2 - c^2d + cd^2 - bd^2, \\ BC \cdot BD \cdot CD = (c-b)(d-b)(d-c) = b^2d - b^2c + bc^2 - c^2d + cd^2 - bd^2, \\ \therefore AB^2 \cdot CD + AC^2 \cdot DB + AD^2 \cdot BC = BC \cdot BD \cdot CD.$$

19. 设两点为 $A(0), B(b)$, $P(x)$ 为线段 AB 上一点, 如果 AB 的中点为 M , 求证下列等式成立:

$$(1) |AP|^2 + |BP|^2 = 2(|AM|^2 + |PM|^2);$$

$$(2) |AP|^2 \sim |BP|^2 = 4 \cdot |AM| \cdot |PM|. *$$

解 由题设 $A(0), B(b)$, 中点坐标为 $M(\frac{b}{2})$.

$$(1) |AP|^2 + |BP|^2 = x^2 + (x-b)^2 = 2x^2 - 2bx + b^2,$$

$$2(|AM|^2 + |PM|^2) = 2\left[\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - x\right)^2\right] = b^2 - 2bx + 2x^2,$$

$$\therefore |AP|^2 + |BP|^2 = 2(|AM|^2 + |PM|^2).$$

$$(2) |AP|^2 \sim |BP|^2 = |x^2 - (x-b)^2| = |2bx - b^2|,$$

$$4|AM| \cdot |PM| = 4 \times \left|\frac{b}{2}\right| \times \left|\frac{b}{2} - x\right| = |2bx - b^2|,$$

$$\therefore |AP|^2 \sim |BP|^2 = 4 \cdot |AM| \cdot |PM|.$$

20. 设六点 A, B, C, D, E, F 同一条直

线上, D, E, F 分别为线段 BC, AC, AB 的中点, 试证线段 AD 的中点与线段 EF 的中点重合.

解 设 $A(0), B(b), C(c)$, 则有

$$D\left(\frac{b+c}{2}\right), E\left(\frac{c}{2}\right), F\left(\frac{b}{2}\right).$$

因此, EF 的中点 M 的坐标是 $\frac{b+c}{4}$, AD 的中点 N 的坐标是 $\frac{b+c}{4}$, 于是 M 和 N 重合.

21. (1) $A(0), B(b), C(c)$ 为一直线上的三点, C 为线段 AB 上任意一点, 如果 M, N 分别为 AC, CB 的中点, 求证

$$MN = \frac{1}{2} AB;$$

(2) M 为线段 AB 的中点, P 为 MB 上任意一点, 求证

$$MP = AM - PB, MP = \frac{1}{2}(AP - PB).$$

解 (1) 由 $A(0), B(b), C(c)$, 得

$$M\left(\frac{c}{2}\right), N\left(\frac{b+c}{2}\right).$$

$$\therefore MN = \frac{b+c}{2} - \frac{c}{2} = \frac{b}{2},$$

$$\frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times b = \frac{b}{2},$$

$$\therefore MN = \frac{1}{2} AB.$$

(2) 由 $A(0), B(b)$ 得 $M(\frac{b}{2})$, 设 P 的坐标为 x , 则

$$AM - PB = \frac{b}{2} - (b - x) = x - \frac{b}{2} = MP,$$

$$\frac{1}{2}(AP - PB) = \frac{1}{2}[x - (b - x)]$$

$$= x - \frac{b}{2} = MP.$$

22. 在下列情况下, A, B 两点间距离是多少? 其次, 求线段 AB 的中点坐标, 并求以 3:2 内、外分线段 AB 的分点坐标:

$$(1) A(-3), B(6);$$

$$(2) A(0), B(-5);$$

$$(3) A(-4), B(-1);$$

$$(4) A(2.5), B(-1.5).$$

* “ $\sim$ ”的意义为: $\alpha \sim \beta = |\alpha - \beta|$.

解 (1) $|AB| = |6 - (-3)| = 9$,

中点坐标为 $\frac{-3+6}{2} = \frac{3}{2}$,

内分点 P 的坐标为

$$\frac{3 \times 6 + 2 \times (-3)}{3+2} = \frac{12}{5},$$

外分点 Q 的坐标为

$$\frac{3 \times 6 - 2 \times (-3)}{3-2} = 24.$$

注意 如果不利用公式,可如下计算:

$$AB=9, \text{ 所以 } AP = \frac{3 \times 9}{3+2} = \frac{27}{5},$$

$$AO = -3, \text{ 所以 } OP = \frac{27}{5} - 3 = \frac{12}{5},$$

$$AQ = \frac{3 \times 9}{3-2} = 27,$$

$$\therefore OQ = 27 - 3 = 24.$$

$$(2) \quad 5, -\frac{5}{2}, -3, -15;$$

$$(3) \quad 3, -\frac{5}{2}, -\frac{11}{5}, 5;$$

$$(4) \quad 4, 0.5, 0.1, -9.5.$$

§ 5. 坐标平面

23. 试述平面上坐标的求法.

解 利用数轴上确

定点的位置的方法, 就能够定出平面上任意一点的位置, 其方法如下:

设直线 xx' 、 yy'

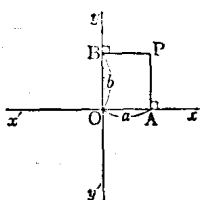
互相垂直, 交点为 O ,

从平面上一点 P 向 xx' 、 yy' 作垂线, 设其垂足分别为 A 、 B .

这时, 把横线叫做横轴, 或者 x 轴; 把纵线叫做纵轴, 或者 y 轴. 两直线的交点叫做坐标原点. 如果 x 轴上 A 的坐标为 a , y 轴上 B 的坐标为 b , 则点 P 的坐标是 (a, b) , 简记为点 $P(a, b)$.

并且, a 叫做点 P 的 x 坐标(或横坐标), b 叫做点 P 的 y 坐标(或者纵坐标). 确定 a 、 b 符号的方法如下:

以原点 O 为基点, 如果 A 、 B 分别在 Ox 、 Oy 上, 则坐标都设为正, 如果 A 、 B 在 Cx' 、



Oy' 上, 坐标都设为负. 这样, 若已知两个坐标就可以定出点 P 的位置.

x 轴、 y 轴合称为坐标轴, 显然原点的坐标是 $(0, 0)$.

如果一个平面上确

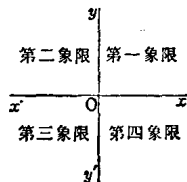
定了一组坐标轴, 就把它叫做坐标平面.

坐标平面被坐标轴分为四个部分, 每个部

分都叫做象限, 分别

叫做第一、第二、第三、第四象限(如图). 但是我们规定坐标轴上的点不属于任何象限.

各象限中点的坐标的符号, 以及坐标轴上点的坐标的符号如下表:



	第一象限	第二象限	第三象限	第四象限	x 轴	y 轴
x 坐标	+	-	-	+		0
y 坐标	+	+	-	-	0	

24. 线段 AB 的两端点为 $A(2, 5)$ 、 $B(6, 1)$, 求其中点 P 的坐标.

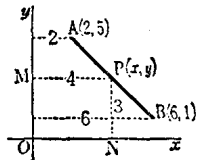
解 A 、 B 的 x 坐标

分别是 2、6, 所以中点 P

的 x 坐标是 $\frac{2+6}{2} = 4$;

A 、 B 的 y 坐标分别是

5、1, 所以 P 的 y 坐标是 $\frac{5+1}{2} = 3$. 故点 P 的坐标为 $(4, 3)$.



25. 作下列两点的连线, 求其中点坐标. 如果分比为 3:4, 试求内分点和外分点的坐标:

(1) $A(8, 1)$ 、 $B(1, 5)$;

(2) $C(6, -5)$ 、 $D(-1, 9)$.

解 (1) 设中点是 (x_1, y_1) , 则

$$x_1 = \frac{8+1}{2} = \frac{9}{2}, \quad y_1 = \frac{1+5}{2} = 3.$$

设按 3:4 内分、外分的点分别为 (x_2, y_2) 、 (x_3, y_3) , 则

$$x_2 = \frac{3 \times 1 + 4 \times 8}{3+4} = 5,$$

$$y_2 = \frac{3 \times 5 + 4 \times 1}{3+4} = \frac{19}{7};$$