解析几何学辞典

问题解法

问题解法　解析几何学辞典

问 题 解 法

解析几何学辞典

〔日〕笹部貞市郎 编

关桐书 李开成 刘正一
董嘉礼 李开功 杨玉茹 译

上海教育出版社出版
（上海永福路 123 号）

新华书店上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 28 插页 4 字数 1,538,000

1985 年 11 月第 1 版 1985 年 11 月第 1 次印刷

印数 1—60,000 本

统一书号：17150·12 定价：(精) 6.25 元

出版说明

自明治维新以后，日本为了学习西方科学技术，在中小学数学教育上也刻意输入，大量地翻译了欧美有影响的课本．以后又自编教材和各种初等数学读物，逐渐地在初等数学教育的取材、编排、题选上形成了自己的特点．根据国内外的情况，日本数学教学也迭经改革，但仍然有着不同于欧美、苏联的地方．为了从一个方面了解这种特点，我们组织翻译了这一套题解辞典．

这几本辞典的题目及解答远不是数学教育的全部，但是由于它的写作年代较近，作者在编选题目时又比较注意立足日本中学数学教育所注重的东西．这些都可以供我国的数学教师了解借鉴．这几本辞典选择的题目有相当部分是初等数学所必需的基础训练题，当然更可以作为教学中的参考材料．

需要说明的是，这几本辞典卷帙浩大，各册各章的编写质量并不一致，错误、重复之处多有发现，我们在组织翻译时只纠正了发现的错误，删去了各册中的数学小史和一些数表，如对数表、三角函数表等，还删去了一些明显重复的题目，其他未作改动．希望读者能在使用中注意．

原　　序

在本书问世之前，已经出版了《几何学辞典》、《代数学辞典》、《三角学辞典》、《微积分学辞典》以及《数学公式辞典》，本书是作为这些辞典的姊妹篇而编写的．数学不仅是科学文明之母，甚至日常生活之中也不可缺少数学，这都无须赘述；但是谈起数学时，总以为这门科学艰深难懂，不免敬而远之；即使偶尔有钻研数学的人，也往往在学习中失去信心和兴趣，而止步不前．产生这些现象的原因是什么？

其实，从数学的发展历史可以看出，最初，在人类文化未开发的蒙昧时期，开始有了简单的计算，其取材也只限于身边的直观事物；后来随着人类知识积累的日益增长，经数千年的岁月，由许多学者的相继努力，才达到今日发展的高度，现阶段的数学仍在突飞猛进而无止境．因此，学习数学的唯一诀窍，就如攀登阶梯一样要循序渐进，由一阶到二阶，由二阶以至三、四阶，形成完整有系统的知识，切忌一蹴而就．

当然，解析几何的建立归功于笛卡儿，以后又经许多学者坚持不懈的研究，才取得了今天的成就，其范围涉及数学的全领域，程度也十分高深．但是，本书的主要读者对象是高中学生，特别是参加高考的学生．

此外，一般地说，解析几何中常需要初等几何知识，鉴于目前不少学生关于这方面的知识可能有所不足，因此在本书末增加了解析几何所需要的一章平面几何，供读者参考．

本书编写和校对时，曾得到畏友倉本熊雄先生的大力协助，在此谨深致谢忱．

作　　者

1967 年 9 月

目　　录

第一章　绪　　论

第二章　直　　线

第一节　直 线 方 程

第二节　直线的各种性质

第三节　各 种 问 题

第三章 圆

第四章 抛 物 线

第五章　椭　圆

第六章　双曲线

三

第七章　各种函数及其图象

第一节　三 角 函 数

第二节　分式函数、无理函数

第三节　对数函数、指数函数

第四节　高 次 函 数

第八章　坐标变换、极坐标

第一节　直 角 坐 标

第二节　斜角坐标、坐标的一般变换

第三节　极　坐　标

第九章　棣莫佛定理和复数

第一节　棣 莫 佛 定 理

第二节　复　　数

第十章　向　　量

第十一章　一般二次曲线

第十二章　立体解析几何大意

第六节　斜交坐标系中的曲线方程

第十三章　平面几何常识

第一节　三角形的五心

第二节　毕达哥拉斯定理及其应用

第三节　面积公式

第四节　圆幂、根轴、根心

第五节　比和比例

第六节　调和点列、黄金分割、托勒密(Ptolemy)定理

第七节　梅内劳斯(Menelaus)定理、塞瓦(Ceva)定理

第八节　空间图形的面积、体积公式

第一章　绪　论

§1. 解析几何学的意义

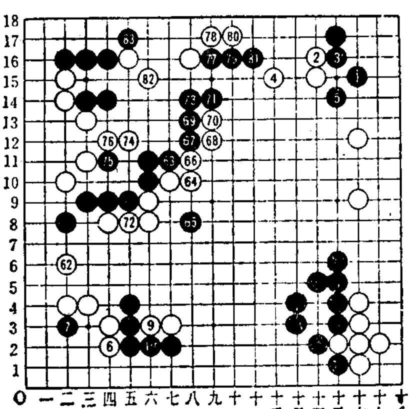
1. 解析几何学是一门什么学问？

解　依据坐标的思想，定出平面或空间中点的位置，由此，利用代数、三角、微积分等研究图形的性质，这门学问就叫做解析几何学或坐标几何学．从前认为，以研究图形为主的几何学和以研究数式为主的代数学，其性质不同，因而各自发展起来．十七世纪时，法国的著名学者笛卡儿首先用代数方法研究了几何图形的性质，并且取得了成功．解析几何的出现是世界数学史上一项重大创造，这一创造对其后微积分学的发展作出了非凡的贡献，并且奠定了近世数学的基础．

坐标的概念以及笛卡儿的功绩以后再详述．

§2. 坐标

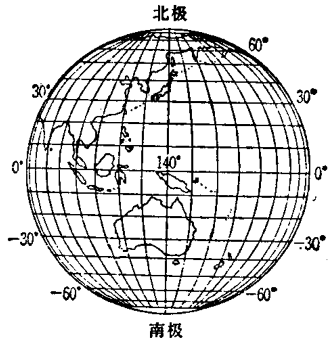
2. 什么是坐标？



解　上图表示围棋比赛时的一个布局．

设围棋的目自左向右横数为 0、一、二、三、…，自下向上数为 0、1、2、3、…，则黑①的位置就可以表示为(十六, 15)，仿此，则白②的位置是(十四, 16)，黑⑦是(二, 3)，白⑭是(五, 12)．反之，如果说(九, 13)，就是白⑳，而(十, 16)就表示黑⑲．

把一个平面纵横等间隔划分，并标出分度，就能够在该平面上标出任意点的位置．



我们看到地球仪或地图上画有纵线和横线，纵线叫经线，横线叫纬线，显然它是表示地球上各点位置的．如果说东经(或西经)几度几分，北纬(或南纬)几度几分，那么就能立刻知道该地所在的位置．

§3. 直线坐标

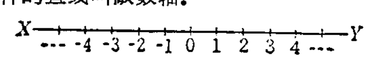
3. 什么是直线坐标？

解　在直线 XY 上以点 O 为基准，向左右标上单位长相等的刻度：

向右：1、2、3、4、…

向左：−1、−2、−3、−4、…

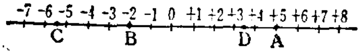
这样的直线叫做数轴．



数轴上，点 P 所对应的刻度叫做点 P 的坐标，这样的坐标叫做直线坐标．

4. (1) 指出下面数轴上点 A、B、C、D 的坐标．

另外，原点的坐标应该是多少？



(2) 把满足下面条件的点，用·标在数轴上:

(i) 自点 $P(+5)$ 沿负向取 -7 的点 P';

(ii) 距 $P(-4)$ 恰为 6 的点。

解 (1) $A(+5)$、$B(-2)$、$C(-5.5)$、$D(+3.5)$。原点坐标是 0.

(2) (i) 沿负向位于 -7 的点就是沿正向取 7 的点，故点 P' 的坐标是 $5+7=12$，即 $P'(+12)$。

(ii) 从 -4 向左相距为 6 的点是 $-4-6=-10$，向右相距为 6 的点是 $-4+6=+2$. 故所求点的坐标是 -10、$+2$ 的两个点。

5. (1) 以下列各组的两点为端点作线段，求线段中点坐标:

(i) $+2, +8$，(ii) $-5, -3$，(iii) $+8, -6$，(iv) $-1\frac{1}{2}, -1\frac{1}{3}$，(v) $-2\frac{1}{3}, +3\frac{1}{6}$;

(2) 求以点 $P(a)$、$P(b)$ 为端点的线段的中点坐标;

(3) 以点 $P(+5)$、$Q(x)$ 为两端点的线段的中点坐标为 -4，求 x;

(4) 求点 $P(+7)$、$Q(-4)$ 间的距离，另外，求点 $R(-3)$、$S(+5)$ 间的距离。

解 一般地说，如果点 P、Q 的坐标分别为 a、b，则线段 PQ 中点的坐标是 $\frac{a+b}{2}$，因此得下列答案:

(1) (i) $+5$，(ii) -4，(iii) $+1$，(iv) $-1\frac{5}{12}$，(v) $\frac{5}{12}$;

(2) $\frac{a+b}{2}$;

(3) 以点 $P(+5)$、$Q(x)$ 为端点的线段的中点坐标是 $\frac{5+x}{2}$，因为它等于 -4，所以有下式

$$\frac{5+x}{2}=-4.$$

解之，得 $\quad x=-13.$

(4) P、Q 两点间距离为 11,

R、S 两点间距离为 8.

6. 以 $P(a)$、$Q(x)$ 为端点的线段的中点坐标为 b，试求点 Q 的坐标。

解 因为点 Q 的坐标是 x，所以线段 PQ 的中点坐标是 $\frac{a+x}{2}$. 又因它等于 b，所以有

$$\frac{a+x}{2}=b.$$

解之，得 $\quad x=2b-a.$

注意 如上所述，以适当的实数(正数、负数或零)表示直线 l 上各点时，这个实数叫做该点的坐标，l 叫做数轴，0 所表示的点 O 叫做坐标原点。

如果点 P 的直线坐标为 a，就记之为 $P(a)$。设数轴上两点为 $P(p)$、$Q(q)$，如果 $p<q$，就把线段 PQ 看做是正线段；如果 $p>q$，就把 PQ 看作是负线段。在许多情况下，用 $q-p$ 表示线段 PQ 的值较为方便. 这种带有正负符号的线段 PQ 叫做有向线段. 设以点 $P(p)$、$Q(q)$ 为端点的有向线段 PQ，其值为 d，则

$$PQ=q-p=d,$$
$$QP=p-q=-(q-p)=-PQ=-d.$$

7. 点 A、B、C 在数轴上，试证下面等式

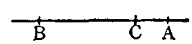
$$AB+BC=AC$$

与 A、B、C 的顺序无关。

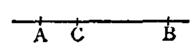
解 设三点的排列次序是 B、C、A，现在证明

$$AB+BC=AC.$$

因为 BC、CA、BA 同向，所以其符号相同.



$\therefore \quad BC+CA=BA.$ ①



但因 $BA=-AB, CA=-AC$,

由 ① 得 $\quad BC-AC=-AB$,

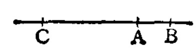
$\therefore \quad AB+BC=AC.$

三点按其他顺序排列时，也可以一样证明. 例如排列次序为 C、A、B，则因

$$CA+AB=CB, \qquad ②$$

$CB=-BC$,

$CA=-AC$,



由 ② 得 $\quad -AC+AB=-BC.$

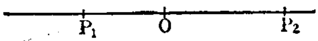
$\therefore \quad AB+BC=AC.$

8. 设 O、P_1、P_2 为一直线上的三点，而且 $OP_1=x_1$、$OP_2=x_2$，求证

$$P_1P_2=x_2-x_1.$$

(利用前题的结果)

解 设 O、P_1、P_2 的顺序如下:



由前题 $P_1O+OP_2=P_1P_2$. ①

但是,$OP_2=x_2$,又从 $OP_1=x_1$,得 $P_1O=-x_1$,代入①,有

$$-x_1+x_2=P_1P_2,$$

$$\therefore\quad P_1P_2=x_2-x_1.$$

不论 O、P_1、P_2 的顺序如何, 这个等式都成立。

9. 取数轴上四点 A、B、C、D,并设下面的线段都是有向线段,求证与四点的顺序无关,下式恒成立:

(1) $AB+BC+CA=0$;

(2) $AB\cdot CD+AC\cdot DB+AD\cdot BC=0$.

解 设各点的坐标为 $A(a)$、$B(b)$、$C(c)$、$D(d)$.

(1) $AB+BC+CA=(b-a)+(c-b)+(a-c)=0$;

(2)
$$\begin{aligned}&AB\cdot CD+AC\cdot DB+AD\cdot BC\\&=(b-a)(d-c)+(c-a)(b-d)\\&\quad+(d-a)(c-b)\\&=bd-ad-bc+ac+bc-ab-cd\\&\quad+ad+dc-ac-bd+ab=0.\end{aligned}$$

10. 设 $A(a)$、$B(b)$ 为数轴上的两点,试证

$$|AB|^*=|b-a|.$$

解 原点 O 与两点 A、B 的顺序无关, 恒有

$$AO+OB=AB,\quad\therefore\quad AB=OB-OA.$$

但因 $OA=a$、$OB=b$,所以

$$AB=OB-OA=b-a.$$

又因数轴上两点 $A(a)$、$B(b)$ 间的距离 $|AB|$ 是 AB(有向线段)的绝对值,

$$\therefore\quad |AB|=|b-a|.$$

§4. 线段的中点、内分、外分

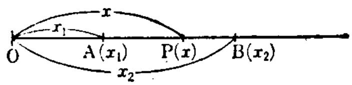
11. 设 $A(x_1)$、$B(x_2)$ 为数轴上两点, 把线段按 $m:n\,(m>0、n>0)$ 内分,求证内分点 P 的坐标 x 为

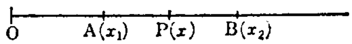
$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n},$$

特别地,如果 P 是线段 AB 的中点,则

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}.$$

解 因为 P 内分线段 AB,所以 AP 和 PB 同时为正,或者同时为负,





因此 $AP:PB=m:n$.

但是 $AP=x-x_1$、$PB=x_2-x$,

$$\therefore\quad (x-x_1):(x_2-x)=m:n,$$

即 $n(x-x_1)=m(x_2-x)$.

解 x 的方程,得

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}.$$

特别地,当 P 是线段 AB 的中点时,令 $m=n$ 代入上式,得

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}.$$

注意 当 $A(-2)$、$B(4)$ 时, 内分 AB 为 $2:1$ 的点 $P(x)$ 为

$$x=\frac{2\times4+1\times(-2)}{2+1}=2,$$

即 $P(2)$.

当 $A(7)$、$B(31)$ 时,AB 的中点 $P(x)$ 为

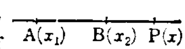
$$x=\frac{7+31}{2}=19,$$

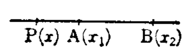
即 $P(19)$.

12. 设 $A(x_1)$、$B(x_2)$ 为数轴上两点, 把线段 AB 按 $m:n\ (m>0、n>0、m\neq n)$ 外分, 求证外分点 P 的坐标 x 为

$$x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}.$$

解 因为 P 外分 AB,所以 AP、BP 同向,故有





$$\frac{AP}{BP}=\frac{m}{n},$$

$$\therefore\quad -\frac{AP}{PB}=\frac{m}{n},$$

即 $\dfrac{AP}{PB}=-\dfrac{m}{n}$. $\quad\therefore\quad \dfrac{x-x_1}{x_2-x}=-\dfrac{m}{n}$.

$$\therefore\quad (m-n)x=mx_2-nx_1.$$

* $|AB|$ 为 A、B 间距离。——译者

因 $m\neq n$，两边同除以 $m-n$，得

$$x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}.$$

13. 设直线上两相异点的坐标为 $\frac{b}{a}$、$\frac{d}{c}$。如果这两点的中点坐标为 $\frac{b+d}{a+c}$，求证 $a=c$。

解 点 $\frac{b}{a}$、$\frac{d}{c}$ 的中点坐标为

$$\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}+\frac{d}{c}\right)=\frac{bc+ad}{2ca}.$$

由题设 $$\frac{bc+ad}{2ca}=\frac{b+d}{a+c},$$

$$\therefore\quad (c-a)(bc-ad)=0.$$

但因 $$\frac{b}{a}-\frac{d}{c}=\frac{bc-ad}{ca}\neq 0,$$

$$\therefore\quad bc-ad\neq 0.$$

$$\therefore\quad c-a=0, a=c.$$

14. 把连结点 $A(-3)$、$B(2)$ 的线段按 3:1 内、外分，求内分点和外分点的坐标，并且求中点的坐标。

解 内分点的坐标 $=\frac{3\times 2+1\times(-3)}{3+1}$

$$=\frac{3}{4};$$

外分点的坐标 $=\frac{3\times 2-1\times(-3)}{3-1}=\frac{9}{2}$；

中点的坐标 $=\frac{1}{2}(-3+2)=-\frac{1}{2}$。

15. 设把线段 AB 按 $m:n$ 的内分点为 C，外分点为 D，求证

$$\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AB}.$$

解 设各点的坐标分别为 $A(0)$、$B(b)$、$C(c)$、$D(d)$。由前题

$$c=\frac{mb}{m+n},\quad d=\frac{mb}{m-n},$$

$$\therefore\quad AC=c-0=\frac{mb}{m+n},$$

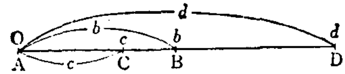
$$AD=d-0=\frac{mb}{m-n},$$

$$AB=b-0=b.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{m+n}{mb}+\frac{m-n}{mb}$$

$$=\frac{2m}{mb}=\frac{2}{b}=\frac{2}{AB}.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AB}.$$



注意 1. 如果 C、D 分别按同比内分、外分线段 AB 时，那么称 C 和 D“调和分割”线段 AB，并把 A、B、C、D 叫做调和点列，对 AB 而言，C（或者 D）叫做 D（或者 C）的调和共轭点。

2. 如果不考虑符号，可按如下方法求内分点和外分点。

因为 $AB=b$，所以 $AC=x$，$BC=b-x$（不考虑符号），而且 $\frac{b-x}{x}=\frac{n}{m}$，由 $mb-mx=nx$，得

$$x=\frac{mb}{m+n}.$$

另外，$AD=y$，$BD=y-b$，有

$$\frac{BD}{AD}=\frac{n}{m},\quad \therefore\quad \frac{y-b}{y}=\frac{n}{m}.$$

再由 $my-mb=ny$，得

$$y=\frac{mb}{m-n}.$$

16. 如果四点 $A(a)$、$B(b)$、$C(c)$、$D(d)$ 是调和点列，求证

$$(a+b)(c+d)=2(ab+cd).$$

解 因为 A、B、C、D 成调和点列，所以

$$\frac{AC}{CB}=-\frac{AD}{DB}.$$

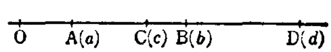
但因 $$AC=c-a, CB=b-c,$$
$$AD=d-a, DB=b-d,$$

$$\therefore\quad \frac{c-a}{b-c}=-\frac{d-a}{b-d},$$

$$(c-a)(b-d)=-(d-a)(b-c).$$

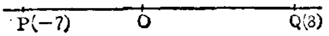
去括号，得

$$bc-ab-cd+ad+bd-ab-cd+ac=0,$$
$$bc+ad+bd+ac=2ab+2cd,$$
$$\therefore\quad (a+b)(c+d)=2(ab+cd).$$



17. 两点为 $P(-7)$、$Q(8)$，5 等分线段 PQ，求各分点的坐标。

解　线段 PQ 的长为 $7+8=15$. 设 AB 的 5 等分点为 A、B、C、D，因 $|PA|=3$，所以各分点坐标为 $A(-4)$、$B(-1)$、$C(2)$、$D(5)$.



18. 设数轴上四点为 $A(0)$、$B(b)$、$C(c)$、$D(d)$，求证下列等式成立：

(1)　$AB\cdot CD+AC\cdot DB+AD\cdot BC=0$;

(2)　$AB^2\cdot CD+AC^2\cdot DB+AD^2\cdot BC$
$=BC\cdot BD\cdot CD$.

解　四点是 $A(0)$、$B(b)$、$C(c)$、$D(d)$，因此

(1)　$AB\cdot CD+AC\cdot DB+AD\cdot BC$
$=b(d-c)+c(b-d)+d(c-b)$
$=bd-bc+bc-cd+cd-bd=0$;

(2)　$AB^2\cdot CD+AC^2\cdot DB+AD^2\cdot BC$
$=b^2(d-c)+c^2(b-d)+d^2(c-b)$
$=b^2d-b^2c+bc^2-c^2d+cd^2-bd^2$,
$BC\cdot BD\cdot CD=(c-b)(d-b)(d-c)$
$=b^2d-b^2c+bc^2-c^2d+cd^2-bd^2$,

$\therefore$　$AB^2\cdot CD+AC^2\cdot DB+AD^2\cdot BC$
$=BC\cdot BD\cdot CD$.

19. 设两点为 $A(0)$、$B(b)$，$P(x)$ 为线段 AB 上一点，如果 AB 的中点为 M，求证下列等式成立：

(1)　$|AP|^2+|BP|^2=2(|AM|^2+|PM|^2)$;

(2)　$|AP|^2\sim|BP|^2=4\cdot|AM|\cdot|PM|$.*

解　由题设 $A(0)$、$B(b)$，中点坐标为 $M\left(\frac{b}{2}\right)$.

(1)　$|AP|^2+|BP|^2=x^2+(x-b)^2$
$=2x^2-2bx+b^2$,

$2(|AM|^2+|PM|^2)=2\left[\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}-x\right)^2\right]$
$=b^2-2bx+2x^2$,

$\therefore$　$|AP|^2+|BP|^2=2(|AM|^2+|PM|^2)$.

(2)　$|AP|^2\sim|BP|^2=|x^2-(x-b)^2|$
$=|2bx-b^2|$,

$4|AM|\cdot|PM|=4\times\left|\frac{b}{2}\right|\times\left|\frac{b}{2}-x\right|$
$=|2bx-b^2|$,

$\therefore$　$|AP|^2\sim|BP|^2=4\cdot|AM|\cdot|PM|$.

20. 设六点 A、B、C、D、E、F 同在一条直线上，D、E、F 分别为线段 BC、AC、AB 的中点，试证线段 AD 的中点与线段 EF 的中点重合。

解　设 $A(0)$、$B(b)$、$C(c)$，则有

$$D\left(\frac{b+c}{2}\right)、E\left(\frac{c}{2}\right)、F\left(\frac{b}{2}\right).$$

因此，EF 的中点 M 的坐标是 $\frac{b+c}{4}$，AD 的中点 N 的坐标是 $\frac{b+c}{4}$，于是 M 和 N 重合.

21. (1) $A(0)$、$B(b)$、$C(c)$ 为一直线上的三点，C 为线段 AB 上任意一点，如果 M、N 分别为 AC、CB 的中点，求证

$$MN=\frac{1}{2}AB;$$

(2) M 为线段 AB 的中点，P 为 MB 上任意一点，求证

$$MP=AM-PB,\ MP=\frac{1}{2}(AP-PB).$$

解　(1) 由 $A(0)$、$B(b)$、$C(c)$，得

$$M\left(\frac{c}{2}\right),\ N\left(\frac{b+c}{2}\right).$$

$\therefore$　$MN=\frac{b+c}{2}-\frac{c}{2}=\frac{b}{2}$,

$\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times b=\frac{b}{2}$,

$\therefore$　$MN=\frac{1}{2}AB$.

(2) 由 $A(0)$、$B(b)$ 得 $M\left(\frac{b}{2}\right)$，设 P 的坐标为 x，则

$AM-PB=\frac{b}{2}-(b-x)=x-\frac{b}{2}=MP$,

$\frac{1}{2}(AP-PB)=\frac{1}{2}[x-(b-x)]$
$=x-\frac{b}{2}=MP$.

22. 在下列情况下，A、B 两点间距离是多少？其次，求线段 AB 的中点坐标，并求以 3:2 内、外分线段 AB 的分点坐标：

(1) $A(-3)$、$B(6)$;

(2) $A(0)$、$B(-5)$;

(3) $A(-4)$、$B(-1)$;

(4) $A(2.5)$、$B(-1.5)$.

* “$\sim$”的意义为：$\alpha\sim\beta=|\alpha-\beta|$.

解　(1) $|AB|=|6-(-3)|=9$,

中点坐标为 $\dfrac{-3+6}{2}=\dfrac{3}{2}$,

内分点 P 的坐标为

$$\frac{3\times6+2\times(-3)}{3+2}=\frac{12}{5},$$

外分点 Q 的坐标为

$$\frac{3\times6-2\times(-3)}{3-2}=24.$$

注意　如果不利用公式,可如下计算:

$AB=9$,所以 $AP=\dfrac{3\times9}{3+2}=\dfrac{27}{5}$,

$AO=-3$,所以 $OP=\dfrac{27}{5}-3=\dfrac{12}{5}$,

$AQ=\dfrac{3\times9}{3-2}=27$,

$\therefore\quad OQ=27-3=24$.

(2)　5、$-\dfrac{5}{2}$、-3、-15;

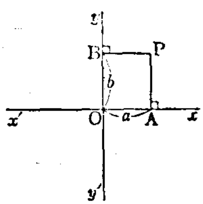
(3)　3、$-\dfrac{5}{2}$、$-\dfrac{11}{5}$、5;

(4)　4、0.5、0.1、-9.5.

§5. 坐标平面

23. 试述平面上坐标的求法.

解　利用数轴上确定点的位置的方法,就能够定出平面上任意一点的位置,其方法如下:



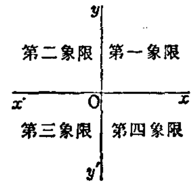
设直线 xOx'、yOy' 互相垂直,交点为 O,从平面上一点 P 向 xx'、yy' 作垂线,设其垂足分别为 A、B.

这时,把横线叫做横轴,或者 x 轴;把纵线叫做纵轴,或者 y 轴.两直线的交点叫做坐标原点.如果 x 轴上 A 的坐标为 a,y 轴上 B 的坐标为 b,则点 P 的坐标是 (a,b),简记为点 $P(a,b)$.

并且,a 叫做点 P 的 x 坐标(或横坐标),b 叫做点 P 的 y 坐标(或者纵坐标).确定 a、b 符号的方法如下:

以原点 O 为基点,如果 A、B 分别在 Ox、Oy 上,则坐标都设为正,如果 A、B 在 Ox'、Oy' 上,坐标都设为负.这样,若已知两个坐标就可以定出点 P 的位置.

x 轴、y 轴合称为坐标轴,显然原点的坐标是 $(0,0)$.

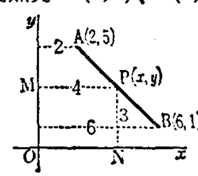


如果一个平面上确定了一组坐标轴,就把它叫做坐标平面.坐标平面被坐标轴分为四个部分,每个部分都叫做象限,分别叫做第一、第二、第三、第四象限(如图).但是我们规定坐标轴上的点不属于任何象限.

各象限中点的坐标的符号,以及坐标轴上点的坐标的符号如下表:

	第一象限	第二象限	第三象限	第四象限	x 轴	y 轴
x 坐标	$+$	$-$	$-$	$+$		0
y 坐标	$+$	$+$	$-$	$-$	0	

24. 线段 AB 的两端点为 $A(2,5)$、$B(6,1)$,求其中点 P 的坐标.



解　A、B 的 x 坐标分别是 2、6,所以中点 P 的 x 坐标是 $\dfrac{2+6}{2}=4$;

A、B 的 y 坐标分别是 5、1,所以 P 的 y 坐标是 $\dfrac{5+1}{2}=3$.故点 P 的坐标为 $(4,3)$.

25. 作下列两点的连线,求其中点坐标.如果分比为 3:4,试求内分点和外分点的坐标:

(1)　$A(8,1)$、$B(1,5)$;

(2)　$C(6,-5)$、$D(-1,9)$.

解　(1) 设中点是 (x_1,y_1),则

$$x_1=\frac{8+1}{2}=\frac{9}{2},\ y_1=\frac{1+5}{2}=3.$$

设按 3:4 内分、外分的点分别为 (x_2,y_2)、(x_3,y_3),则

$$x_2=\frac{3\times1+4\times8}{3+4}=5,$$

$$y_2=\frac{3\times5+4\times1}{3+4}=\frac{19}{7};$$