北京大学教材

常微分方程几何理论与分支问题

（第二次修订本）

张锦炎　冯贝叶

北京大学出版社

北 京 大 学 教 材

常微分方程几何理论与分支问题

（第二次修订本）

张锦炎　冯贝叶

北京大学出版社
·北　　京·

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程几何理论与分支问题/张锦炎、冯贝叶. 3版. —北京：北京大学出版社，2000.3
ISBN 7-301-04168-3

Ⅰ. 常… Ⅱ. ①张… ②冯… Ⅲ. 常微分方程-研究
Ⅳ. 0175.1

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第17244号

书　　名：常微分方程几何理论与分支问题
著作责任者：张锦炎　冯贝叶
责任编辑：邱淑清
标准书号：ISBN 7-301-04168-3/O·444
出　版　者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址：http://cbs.pku.edu.cn
电　　话：出版部 62752015　发行部 62754140　编辑部 62752021
电子信箱：zpup@pup.pku.edu.cn
排　版　者：北京高新特公司激光照排中心
印　刷　者：北京大学印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
850毫米×1168毫米　32开本　13.875印张　350千字
1981年7月第一版　1987年12月修订再版
2000年3月第二次修订第三版　2000年3月第三次印刷
定　　价：19.50元

第二次修订本前言

在本次修订本中，我们对原有内容作了少量的修改，较大的变化是增加了一些章节与相应的习题．自本书出版以来，分支理论有了很大的发展，它已成为许多应用学科研究工作中讨论的重要方面．为了较全面地反映已有的数学内容，我们增加了奇点分支与分界线环分支两章（第七与第十章），还对原有的 Hopf 分支的高维情况，补充了一些有用的公式（第十一章 § 4）．另外，柱面、环面上的微分方程也是几何理论的一个重要部分，原书未曾涉及，现在增加一章，放在最后，并以偶合振子系作为一个具体的例子，来说明如何灵活运用本书的理论与方法，从而导出新颖的结果．

在写作的过程中，我们除引用几个在动力系统中已成为常识的概念和定理外，仍力图使本书是自封的．

最后，谨向自 1981 年第一版发行以来对本书提出过宝贵意见的读者们表示衷心感谢．

张锦炎　冯贝叶

1997 年 6 月于北京

修订本前言

自本书第一版发行以来，收到了许多读者的来信，有的提出了宝贵意见，有的指出了印刷错误，更多的则是表达了对作者的鼓励和希望.借此再版机会，谨向这些同志们表示衷心的感谢.

在本次修订本中，除了改正若干已经发现的错误外，我们按照读者的要求，编入了习题部分.本书前三章的主题是平面自治系统的定性理论，第五章为熟知的应用.但这种方法的应用范围远不止于此，为了说明也可以用它来解决某些非自治问题和三维问题，在新版中加写了最后一章，在其中我们详细讨论了这两种类型的若干实例.读者不妨先试图了解这些问题的提法，然后自己设法给出解决的途径，而将书中的论述作为参考.

作　　者

1987年9月9日于北京大学

序 言

编写本书的目的是希望提供一本包括平面自治系统与稳定性理论初步，以及分支问题的教材.

在平面自治系统与稳定性部分，本书力图做到深入浅出，使凡掌握数学分析、线性代数与常微分方程的读者都能顺利阅读. 第四章中介绍了抽象动力系统的一些基本概念(如导算子、流等)，既是后面部分章节所需要的，又是进一步研究一般动力系统的基础. 因此，希望读者能熟练掌握. 第五章中除了传统的非线性振动方面的应用之外还编入了在生态学方面的应用. 常微分方程在生物学中的应用是极其广泛的，生态学中的应用只不过是其中的一个方面. 我们介绍它是希望通过它引起读者对这类问题的兴趣.

常微分方程分支理论是不少学科所需要的，但至今国内尚未有一本书较系统地阐述过这方面的内容. 本书整理了 Hopf 分支问题现有文献中的两种主要方法，即 Friedrich 方法和后继函数法；另外作者采用 Liapunov 第二方法建立了分支问题与失稳现象的联系. 在分支问题部分把这三种方法同时介绍给读者，希望在掌握了这些之后就能够阅读有关问题的近代文献并从事研究工作.

当然这些都只是作者的愿望. 由于水平有限，缺点错误一定不少，欢迎读者批评指正.

此书稿曾作为选修课的讲义，于 1979 年度在北京大学数学系进修政和研究生中讲授过，并且还在部分教师讨论班中报告过. 因此，书稿的编写过程中，讨论班的同志们与选修课的同学们曾提出多方面的宝贵意见，特此表示感谢.

张 锦 炎

1980 年 8 月于北京大学

目　录

第一章 基 本 定 理

本章作为以后各章的基础，介绍微分方程的解的一些基本性质. 初读本书时，也可以先弄清各定理的条件与结论，而把证明留待以后需要时再细读.

为方便起见，我们常采用向量与矩阵的符号.

设 $\boldsymbol{R}^n$ 是 n 维欧氏空间，x 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的向量，

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}.$$

若 $x,y\in\boldsymbol{R}^n$，

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},$$

则向量 x 与 y 的和或差，向量 x 与数 a 的乘积定义如下：

$$x\pm y=\begin{pmatrix}x_1\pm y_1\\x_2\pm y_2\\\vdots\\x_n\pm y_n\end{pmatrix},\quad ax=\begin{pmatrix}ax_1\\ax_2\\\vdots\\ax_n\end{pmatrix}.$$

向量 x 与 y 的**内积**用符号 $\langle x,y\rangle$ 表示，内积定义为：

$$\langle x,y\rangle=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^n x_iy_i.$$

用符号$|x|$表示x的**模**，模定义为：

$$|x|\equiv\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

不难检验内积有性质：

(1) 对称性　$\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$；

(2) 双线型　$\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$；

$\langle ax,y\rangle=a\langle x,y\rangle$；

(3) 正定的　$\langle x,x\rangle\geqslant 0$；

$\langle x,x\rangle=0$，当且仅当$x=0$；

(4) 有 Schwartz **不等式**

$$|\langle x,y\rangle|\leqslant|x|\cdot|y|.$$

模有性质：

(1) $|x|\geqslant 0$；$|x|=0$，当且仅当$x=0$；

(2) $|ax|=|a||x|$；

(3) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$(三角不等式).

很自然的，$\boldsymbol{R}^n$中两个向量x与y间的**距离**定义为：

$$|x-y|.$$

向量序列$x_k(k=1,2,\cdots)$以向量x_0为**极限**的定义为：

$$|x_k-x_0|\to 0,\quad 当\ k\to\infty.$$

现在考虑自变量为实数t，在$\boldsymbol{R}^n$中取值的向量函数$\varphi(t)$. 不难模仿一元函数的连续性、微商与定积分的定义给出向量函数的连续性、微商与定积分的定义. 其实只要把一元函数的符号理解为向量函数的符号，把绝对值理解为模就可以了.

设$\varphi_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$是向量函数$\varphi(t)$的分量，即

$$\varphi(t)=\begin{pmatrix}\varphi_1(t)\\ \varphi_2(t)\\ \vdots\\ \varphi_n(t)\end{pmatrix}.$$

显然有下列结论：

(1) $\varphi(t)$连续当且仅当 $\varphi_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$都连续.

(2) $\varphi(t)$的微商是向量函数，记作 $\mathrm{d}\varphi(t)/\mathrm{d}t$ 或$\dot{\varphi}(t)$. 并且有

$$\dot{\varphi}(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t)=\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_1(t)\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_2(t)\\ \vdots\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_n(t)\end{pmatrix}.$$

(3) $\varphi(t)$在区间$[t_0,t]$上的积分$\int_{t_0}^{t}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau$ 是向量函数 $\psi(t)$，即

$$\psi(t)=\int_{t_0}^{t}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau=\begin{pmatrix}\int_{t_0}^{t}\varphi_1(\tau)\mathrm{d}\tau\\ \int_{t_0}^{t}\varphi_2(\tau)\mathrm{d}\tau\\ \vdots\\ \int_{t_0}^{t}\varphi_n(\tau)\mathrm{d}\tau\end{pmatrix}.$$

(4) 根据积分的定义与三角不等式，不难证明下列不等式：

$$\left|\int_{t_0}^{t}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau\right|\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}|\varphi(\tau)|\mathrm{d}\tau\right|.$$

这个不等式在下面的定理证明中常要引用.

下面来考虑自变量为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的向量 x，且取值也在 $\boldsymbol{R}^n$ 中的向量函数 $g(x)$，即

$$g(x)=\begin{pmatrix}g_1(x)\\ g_2(x)\\ \vdots\\ g_n(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ g_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ \vdots\\ g_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\end{pmatrix}.$$

向量函数 $g(x)$连续，即 $g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)(i=1,2,\cdots,n)$作为 x_1，

$x_2,\cdots,x_n$ 的函数都连续.

我们称 $g(x)$ 在 $\boldsymbol{R}^n$ 中某区域 W 上是**李氏的**,如果存在一个常数 L,使得当 $x,y\in W$ 时,有

$$|g(x)-g(y)|\leqslant L|x-y|,$$

其中 L 称为 g 在 W 上的李氏常数.

例如,若向量函数在某凸集 W 上满足

$$\left|\frac{\partial g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_j}\right|\leqslant K\quad(i,j=1,2,\cdots,n),$$

K 是常数,则 $g(x)$ 在 W 上是李氏的.这是因为对 $g(x)$ 的第 i 个分量 $g_i(x)$ 有不等式

$$|g_i(x)-g_i(y)|\leqslant\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial g_i(x+\theta(y-x))}{\partial x_j}\right||x_j-y_j|\quad(0<\theta<1).$$

因为 W 有凸性,所以当 $x,y\in W$ 时,$x+\theta(y-x)$ 在 W 内,于是由上不等式得

$$|g_i(x)-g_i(y)|\leqslant nK|x-y|.$$

再由模的定义得到:当 $x,y\in W$ 时

$$|g(x)-g(y)|\leqslant n^{3/2}K|x-y|,$$

而其中 $n^{3/2}K$ 是常数,所以 $g(x)$ 在 W 上是李氏的.

我们称 $g(x)$ 在 $\boldsymbol{R}^n$ 中某区域 W 上是**局部李氏的**,如果对于 W 的每一个点,存在该点的一个邻域 $W_0(W_0\subset W)$,使得 $g(x)$ 在 W_0 上是李氏的.

显然,若向量函数 $g(x)$ 在区域 W 上有 $\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 都连续,则 $g(x)$ 在 W 上局部李氏.

最后,我们证明一个命题.

命题 若 $g(x)$ 在区域 W 上局部李氏,A 是 W 内的有界闭区域,则 $g(x)$ 在 A 上是李氏的.

证明 若结论不对,即对无论多大的正数 K,总存在 A 内的 x 与 y,使得

$$|g(x)-g(y)|>K|x-y|.$$

特别地，对自然数 n，存在 x_n 与 $y_n \in A$，使

$$|g(x_n)-g(y_n)|>n|x_n-y_n| \quad (n=1,2,\cdots). \qquad (*)$$

因 A 是有界闭区域，所以 x_n 与 y_n 有收敛子序列，不妨设就是 x_n 和 y_n，其极限在 A 内，即 $x_n \to x^* \in A, y_n \to y^* \in A$.

事实上，有 $x^*=y^*$. 因为对一切 n，有

$$|x_n-y_n|<\frac{1}{n}|g(x_n)-g(y_n)|.$$

又由 $g(x)$ 在 W 上局部李氏可知，$g(x)$ 在 W 上连续. 令 M 是 $|g(x)|$ 在有界闭区域 A 上的最大值，于是有

$$|x_n-y_n|<\frac{1}{n}\cdot 2M.$$

从而

$$|x^*-y^*|=\lim_{n\to\infty}|x_n-y_n|=0.$$

由假设，存在 x^* 的一个邻域 W_0，使得 $g(x)$ 在 W_0 上李氏，有李氏常数 L. 又存在 N，使得当 $n \geqslant N$ 时 $x_n, y_n \in W_0$. 于是当 $n \geqslant N$ 有不等式

$$|g(x_n)-g(y_n)| \leqslant L|x_n-y_n|.$$

当 $n>L$ 时，上面的不等式与 $(*)$ 不等式矛盾.

命题证完.

§1 微分方程解的存在性与唯一性

设 t 是时间变量，$t \in I$，I 是实数轴上的开区间，也可以是无穷区间. x 是 n 维向量，$x \in W$，W 是 n 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中的区域，也可以是无界区域或全空间.

考虑微分方程

$$\dot{x}=f(t,x), \qquad (1.1)$$

其右端向量函数 $f(t,x)$ 在 $I \times W$ 上连续；又关于 x 在 W 上是局部李氏的，且有对 $t \in I$ 一致的李氏常数.

定理 1.1 对微分方程(1.1)，$t_0\in I$ 与 $x_0\in W$ 存在常数 $a>0$，使得在区间 $J=[t_0-a,t_0+a]$ 上有微分方程(1.1)的唯一解 $x=x(t)$，且连续并满足初条件

$$x(t_0)=x_0. \tag{1.2}$$

证明 分以下几步进行.

第一步，化微分方程(1.1)为等价的积分方程. 设 $x=x(t)$ 是方程(1.1)满足条件(1.2)的解，即有

$$\dot{x}(t)\equiv f(t,x(t)), \tag{1.3}$$

并且 $x(t_0)=x_0$. 把上式两边从 t_0 到 t 积分就得到

$$x(t)-x(t_0)=\int_{t_0}^{t}f(s,x(s))\mathrm{d}s.$$

即 $x(t)$ 满足积分方程

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,x(s))\mathrm{d}s. \tag{1.4}$$

反之，若 $x(t)$ 满足积分方程(1.4)，则 $x(t)$ 满足微分方程(1.1)与条件(1.2).

第二步，构造一个向量函数序列 $\varphi_k(t)$ $(k=1,2,\cdots)$. 因为 W 是开的，对 $x_0\in W$，有 $b>0$，使闭球 $W_0\subset W$，其中

$$W_0=\{x\,|\,x\in\boldsymbol{R}^n,\ \ |x-x_0|\leqslant b\}.$$

令 I' 是闭区间，$t_0\in I'\subset I$. 设 M 是 $|f(t,x)|$ 在 $I'\times W_0$ 上的上界；L 是 $f(t,x)$ 关于 x 在 W_0 上的李氏常数(对 $t\in I'$ 一致). 令 $a>0$，$a<\min\{b/M,1/L\}$，又使区间 $J=[t_0-a,t_0+a]\subset I'$.

在区间 J 上按以下方法构造向量函数序列：令

$$\varphi_0(t)=x_0;$$

因 $\varphi_0(t)=x_0\in W_0\subset W$，所以可以令

$$\varphi_1(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi_0(s))\mathrm{d}s;$$

若 $\varphi_k(t)$ 已定义，并且 $\varphi_k(t)\in W_0$，即 $|\varphi_k(t)-x_0|\leqslant b$ $(t\in J)$，就可以令

$$\varphi_{k+1}(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_k(s))\mathrm{d}s;$$

如果有 $\varphi_{k+1}(t)\in W_0(t\in J)$，序列就可以继续构造下去. 而事实上，的确有

$$\begin{aligned}|\varphi_{k+1}(t)-x_0|&\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}|f(s,\varphi_k(s)|\mathrm{d}s\right|\\&\leqslant Ma<b.\end{aligned}$$

即 $\varphi_{k+1}(t)\in W_0(t\in J)$.

注意，序列中的每一个向量函数 $\varphi_k(t)$ 都是 J 上的连续函数，并且在 W_0 内取值，又 $\varphi_k(t_0)=x_0$.

第三步，证明序列 $\varphi_k(t)$ 在 J 上一致收敛. 令

$$K=\max_{t\in J}|\varphi_1(t)-\varphi_0(t)|.$$

于是当 $t\in J$ 时，有

$$\begin{aligned}|\varphi_2(t)-\varphi_1(t)|&=\left|\int_{t_0}^{t}[f(s,\varphi_1(s))-f(s,\varphi_0(s))]\mathrm{d}s\right|\\&\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}|f(s,\varphi_1(s))-f(s,\varphi_0(s))|\mathrm{d}s\right|\\&\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}L|\varphi_1(s)-\varphi_0(s)|\mathrm{d}s\right|\\&\leqslant aLK.\end{aligned}$$

若对某一个 $k\geqslant2$，当 $t\in J$ 时，有

$$|\varphi_k(t)-\varphi_{k-1}(t)|\leqslant(aL)^{k-1}K,$$

则当 $t\in J$ 时，有

$$\begin{aligned}|\varphi_{k+1}(t)-\varphi_k(t)|&\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}|f(s,\varphi_k(s))-f(s,\varphi_{k-1}(s))|\mathrm{d}s\right|\\&\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}L|\varphi_k(s)-\varphi_{k-1}(s)|\mathrm{d}s\right|\\&\leqslant aL(aL)^{k-1}K=(aL)^kK.\end{aligned}$$

而 $aL=\alpha<1$，所以，对任给 $\varepsilon>0$，存在 N，使当 $r,s>N$ 时，对 $t\in J$ 有