

不连续介质力学问题的界面元法

卓家寿 章 青 著

科 学 出 版 社

内 容 简 介

本书系统地介绍求解具有不连续介质力学问题的界面元法的理论、方法及其在工程中的应用,该方法的精度和适用性优于有限元法,是一种极具应用前景的新方法。

本书针对具有介质间断面的工程结构分析问题,推出了兼有连续与不连续介质变形体特性的界面元模型,论证了界面元法的数学和力学机理,提出了界面元求解线性与非线性、静力与动力、粘弹与粘塑、大位移与稳定、场问题以及梁板弯曲等方法,给出了界面元在结构与岩体工程、钢筋混凝土与复合材料以及材料本构行为的细观分析等领域中的应用成果。

本书可作为高等院校相关专业工科研究生的教学参考书,亦可供有关科研、设计和工程部门的科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

不连续介质力学问题的界面元法/卓家寿,章青著.-北京:科学出版社,2000

ISBN 7-03-008557-4

I. 不… II. ①卓…②章… III. 非均匀介质-连续介质力学-有限元法 IV. 033

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 61449 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

新蕾印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2000 年 9 月第 一 版 开本:850×1168 1/32

2000 年 9 月第一次印刷 印张:8 1/2

印数:1—2 000 字数:222 000

定价:15.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

前 言

不连续介质问题广泛存在于工程中,如岩体工程中的软弱结构面、结构工程中的施工缝或开裂面、机械工程中的接触面和航天航空工程中复合材料的层面等均可能出现位移不连续的现象。这种具有不连续界面位移的问题比起连续介质问题要复杂得多,它不仅描述界面在受载过程中变化的工作性态,还要反映该界面位移的不连续性对考察体受力状态的影响。传统的有限元模型是位移协调元,它很难描述界面的不连续位移,而且由于其应力因通过位移求导而丧失一阶精度,也不能取它作为辨别界面工作性态的判据。因此需要另辟蹊径研究适合于分析计算不连续介质变形体问题的方法,面临这种挑战,本书提出了界面元法。

全书分为九章,分别就界面元法的理论及其力学、数学基础,界面元法在弹性、各类非线性、动力、梁板弯曲的平衡问题和场问题、工程稳定性以及材料的力学行为等问题中的应用,界面元法在三峡等大型水利工程中的应用实例成果等诸方面作了详细的介绍。书中理论论述力求严谨,并给出物理诠释,方法介绍详尽并与有限元法作比较,举例贴近主题并对成果进行了分析,以使读者透彻理解界面元法的理论实质,充分掌握界面元法的要领和关键技术,更好地应用于工程。

本书是卓家寿和他的研究生们多年科学研究成果的结晶。书稿由卓家寿和章青合作执笔,参加工作的还有赵宁博士、方义琳博士、徐振龙硕士、王卫标硕士、曾三平博士和武清玺博士等。此外,陈振雷副教授、邵国建博士、杨海霞副教授、古国才硕士、朱虹硕士和蒋永兴硕士等也作出了贡献。书稿第一、二、五、七、九章和前言、结语由卓家寿撰写,第三、四、六、八章由章青撰写,第七章 7.7 节由武清玺撰写。

本书承蒙主审人钱七虎院士和陈厚群院士悉心的评阅，他们提出了十分宝贵的意见，特在此表示衷心的感谢。

本书的内容是在承担国家自然科学基金委的重大项目和国家计委的“八五”、“九五”科技攻关项目的科学研究中获得的。本书的出版得到了河海大学“211”工程学科建设项目经费的支持，在此谨致以深切的谢意。

由于作者水平所限，书中不尽人意之处在所难免，敬请读者批评指正。

目 录

前言

第一章 绪论	1
1.1 工程结构分析的有限离散模型	1
1.2 连续介质与不连续介质问题的数模与方法	6
1.3 工程问题中界面元法的概念	8
1.4 本书的基本内容	12
第二章 弹性问题的界面元法	13
2.1 界面元法的力学基础	13
2.2 块体元的位移模式	15
2.3 界面的应力模式	18
2.4 界面元法的支配方程	21
2.5 界面元法的数学基础	25
2.6 任意形体结构的界面元法	31
2.7 非各向同性界面和约束界面的弹性矩阵	46
2.8 界面元求解弹性问题的算例	50
2.9 界面元法的精度和网格的合理布局	60
2.10 块体元应力的计算	66
2.11 分区界面元-有限元的混合模型及耦合解法	67
2.12 小结	72
第三章 非线性问题的界面元法	74
3.1 非线性问题的类别与相应的界面元件	74
3.2 界面元件的弹塑性-接触本构模型	76
3.3 界面元件的弹-粘塑性本构模型	82
3.4 弹塑性-接触问题的界面元法	86
3.5 弹-粘塑性接触问题的界面元法	94

3.6	施工过程变结构问题的界面元法	100
第四章	场问题的界面元法	108
4.1	热传导问题的界面元法	108
4.2	变温应力计算	116
4.3	计入徐变影响的变温应力	120
4.4	渗流场计算的界面元法	125
4.5	不考虑渗流场与位移场耦合效应的结构应力分析	130
4.6	渗流场与位移场耦合效应问题的分析	131
第五章	动力问题的界面元法	140
5.1	放松界面位移连续条件的修正 Hamilton 原理 (动力界面元法)	140
5.2	特性矩阵的计算(动水压力的处理)	142
5.3	动力平衡方程的求解方法	146
5.4	挡水结构的动力分析	155
5.5	考虑界面非线性的动力界面元法	159
第六章	梁板弯曲问题的界面元法	162
6.1	梁弯曲问题的新模型及其相应的界面元法	162
6.2	平板小挠度弯曲问题的界面元法	166
6.3	平板振动问题的界面元法	170
6.4	杆系几何非线性问题的界面元法	173
第七章	工程稳定性问题的界面元法	180
7.1	岩质边坡与围岩稳定性分析的复杂性	180
7.2	模拟施工全过程的统一网格(软弱结构面的处理)	181
7.3	锚杆加固的效应(加锚岩体的界面元模型)	184
7.4	工程稳定性量化评判的广角度准则体系和分析方法	192
7.5	干扰能量法的基本理论及其评判工程稳定性的数值方法	196
7.6	广角度准则的联合应用	205
7.7	工程稳定性分析的随机界面元法	206
第八章	界面元法的工程应用	212

8.1	三峡船闸高边坡的稳定分析	212
8.2	李家峡拱坝坝肩岩体加固效应分析	218
8.3	南水北调工程穿黄盾构隧洞的力学分析	229
8.4	三峡升船机上闸首结构的强度与稳定性分析	236
8.5	小湾拱坝分缝坝体的动力非线性分析	241
8.6	小结	250
第九章	材料力学行为分析的界面元法	252
9.1	全级配混凝土本构行为的细观分析	252
9.2	混凝土结构开裂分析的界面元法	254
9.3	钢筋混凝土结构的界面元法	256
9.4	复合材料结构的界面元法	260
结语		262
参考文献		263

第一章 绪 论

1.1 工程结构分析的有限离散模型

1.1.1 工程结构的复杂特性

人类在征服自然和改造自然的活动中,采用天然材料(如土料、石料、木料和竹料等)或人工材料(如砖瓦、水泥、混凝土、金属、钢筋混凝土、复合材料和高分子合成材料等)按某种预定功能建造成能够承受荷载和其它外来因素作用的结构体,称之为工程结构。

工程结构的几何特征可由其形体特征和内、外约束的型式(如轮廓外形、内部孔洞或缝隙、构件之间的联接、周围介质对考察体的约束等)来描述。

工程结构的材料特性反映在材质分布的均匀与否、各向同性与否、连续与否以及本构关系的线性与否等诸方面。

工程结构的受力特性则可由各工况外载作用下所引起该结构的内部响应量,如位移、变形或应变,内力或应力以及能量密度等来表征。显然,结构的受力状态依赖于外部作用因素和结构内部的几何结构和材料性能,其中任何一个要素的改变必将引起结构受力状态的变化。因此,工程结构的受力分析是一个十分复杂的问题,例如地下洞室群结构的受力分析:从几何特征看,它是无限体中的多孔洞,岩体中还含有节理、裂隙、夹层和断层等不连续分布的软弱结构面,若顾及施工过程,其孔洞形状是不断改变的,在孔周还加有锚固件、衬砌等;而从材料特性看,岩体又是不均匀、各向异性、不连续和非线性介质,其本构关系异常复杂,且还有与时间有关的粘性(含蠕变和松弛);从荷载环境看,其主要的两大作用因素即地应力与渗透力均是十分难以精确给定的,且两者之间又是

耦合的,往往需要足够的现场试验和复杂的数学运算(如反演和解耦)。这个例子充分体现了工程结构分析的复杂程度和难度。

工程结构的设计必须保证该结构在外来因素作用下具有足够的安全度、经济性和实用性,这就要求对工程结构的受力与变形状态要有一套量化评判的体系和优化技术,工程力学中的强度、刚度和稳定性计算、优化分析与评判研究正是应此要求而提出的。需要完成上述内容的研究就必须深入了解工程结构的全部特性,从而可以抓住其本质特征建立可行的分析计算模型,通过模型的分析计算成果指导工程结构的设计、施工、运行和管理。

1.1.2 工程结构的建模原则

在固体力学的理论分析中,线弹性理论严格证明了满足平衡律、协调律和本构律的解答是唯一的;弹塑性理论和粘弹塑理论又进一步揭示了结构的最终受力状态还与加载过程(或加载历史)的路径有关;在材料的力学行为试验研究中还发现材料的变形和破坏特征呈脆性或塑性,它不仅和材料自身特性有关,而且与材料当时所承受的应力状态有关,同一种材料在某种应力状态下可能表现出脆性,而在另一种应力状态下却可能呈现为塑性特征,因此其本构关系的选择应当顾及当时所处的应力环境。此外,材料的蠕变曲线形状也与其所处的应力水平和温度高低有关。这也再次表明结构的受力分析必须遵循其受载路径(应力路径)进行才能逼近实际。

基于上述分析,工程结构的模型应当遵守几何仿真、物理(本构)仿真、受力仿真和过程仿真等四个原则。

(1)几何仿真。

模型应当充分反映实际结构的几何特征,含考察体的外部轮廓的曲直、尺寸的大小或无限、内部存在的孔洞、缝隙、介质间断面或软弱结构面等,内部和外部的约束;此外,还应当反映受载过程结构可能出现的开裂或原有缝隙的扩展,反映施工过程体形、介质和约束的动态变化。

(2)本构仿真。

模型材料特性应当反映加、卸载过程中实际材料应力及其应变速率和相应的应变及其应变率、温度和时间等因素之间的因变关系。有鉴于材料的力学行为同时依赖于材料自身特征和应力状态,本构式应以遵循加载路径并考虑应力状态选用增量形式的包络型的关系式为宜。

(3)受力仿真。

模型受力仿真的精度依赖于外载环境、平衡律和应力状态等三方面模拟逼真的程度。在结构几何和本构仿真的模型进行力学分析时,外载环境描述的真实性固然重要(因为它是直接作用的外因),但也要保证选择的计算模型及其相应理论方法合理可靠,以满足平衡律的要求,即每一阶段的成果均要满足平衡条件。此外,还要保证每一阶段的应力状态不致失真,以免出现由于应力状态失真造成考察体是处在线性阶段工作或非线性阶段工作的判别失误,并进而产生累积影响导致最终解的漂移。这也就是说,实施结构受力的仿真时,还应当选择应力精度较高的分析模型和计算方法。

(4)过程仿真。

模型还应反映实际的加载路径和施工期结构动态变化过程,这在非线性分析时尤为重要。因此,所建立的结构分析模型不仅要正确模拟追踪实际施载的路径,而且要动态地模拟该结构施工过程中形体的变化、材料的演变、约束和外载的改变等。应当指出的是,即使施工期每一步的受力状态都是线性的,也不可以抹去施工过程结构诸多特性动态改变的影响,企图用最终完建的结构受载计算成果去描述该结构的受力状态则是错误的,因为每一步施工对应的结构是不同的,不能用最终完建的结构按线性叠加计算从施工到完建过程的荷载效应。严格地说,施工动态结构的力学分析问题也是一类非线性问题,有别于几何非线性、材料非线性、接触非线性和场耦合非线性问题。

仿真建模四原则的理论依据是固体力学解答的因果关系,所

选模型的四个方面仿真的程度将直接影响模型解答与实际结构内部响应量之间接近的精度。

1.1.3 有限离散模型

鉴于工程结构特性的复杂性,分析模型中只有那些形状比较规则、材料特性比较简单、荷载比较典型的问题才有解析解,对大多数工程结构均找不到解析解,因此不得不依赖于数值方法寻找它们的近似解。数值解法的思路通常是将实际具有无限自由度的结构问题近似用有限个自由度问题来表征,在求得有限自由度的解答后,再通过某一函数表达式去求任一点(自由度)的解答。其计算模型则具有有限自由度的离散体(网络),这种计算模型称之为有限离散模型。

有限离散模型具有三个要素:节点、单元(网格)和节点的关联性。

节点可划分为基本节点与辅助节点两类。基本节点位于相邻单元交界面上,为两个或更多相邻单元所共有,因此在计算单元劲度时该基本节点对其相连的单元必有“贡献”(或影响)。倘若单元只有一个节点,那么该节点就被视为基本节点。基本节点的有关参数一般被选定为基本未知量来求解。辅助节点是只属于某一个单元的,该节点的作用通常可借助凝聚转化为同一单元内基本节点的“贡献”来表示,因而它不作为直接求解的基本未知量,在最后组建的整体支配方程中是不出现的。

由一组节点联成的单元称为网格元(mesh element),相应分析的方法称为网格元法(mesh element method);只用一个节点描述其所在单元的变形和运动的单元,称之为物理元(physical element),其相应的分析方法称之为物理元法(physical element method)。通常,采用单元形心点的有关参数来表征单元的变形和运动。由以上两类单元混合组成的单元组及其分析方法,则分别称为混合元和混合元法。应用混合元模型时,在网格元和物理元之间常常需要另设一类过渡元来联接。

单元的变形可以由节点的变形和单元的变形分布函数式来确定,也可以将单元内部变形累积在该单元某个区域内的集中形式表示,该累积变形区可选在单元的周界,也可选在单元内部某一小区域。对于后一种单元变形描述形式,由于单元变形已累积集中在某个区域,则该区域之外的部位自然就变成没有任何变形的刚体位移和运动了。

节点的关联性是反映该节点有关参数改变时所直接波及周围附近节点有关参数变化的影响范围或关联区的大小,其在整体支配方程组中每一方程系数的非零元素总个数便是该节点关联性的一种量化体现。有限离散模型的节点关联性大致可分为零关联(no bonds)、局部关联(local bonds)、半整体关联(semiglobal bonds)和整体关联(global bonds)四类。零关联表示该节点与相邻节点无关联,只与自身节点相关,系数矩阵为对角阵;局部关联表示该节点只有与其相连的各单元内其它节点相关,其对应的方程带宽较窄;半整体关联表示该节点不仅与直接相连各单元内的其它节点相关,而且还和更远的四周一定范围内的单元内节点相关,其对应方程带宽则较宽;整体关联则表示该节点与有限离散模型的所有节点相关,其对应方程系数矩阵呈满阵状,即所有方程的带宽均等于该离散模型的总自由度。

以上讨论的是具有单参数节点的关联性。若节点具有多个参数时各个节点同类参数之间的关联性,也可有不同的类别,例如动力有限元方程

$$\underline{\underline{K}} \underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{C}} \dot{\underline{\underline{\delta}}} + \underline{\underline{M}} \ddot{\underline{\underline{\delta}}} = \underline{\underline{R}} \quad (1.1)$$

同一节点具有位移、速度和加速度三类参数,其相应系数分别为刚度矩阵 $\underline{\underline{K}}$ 、阻尼矩阵 $\underline{\underline{C}}$ 和质量矩阵 $\underline{\underline{M}}$, 计算时可以选用相同的关联性(如均取局部关联性),也可以选用不同的关联性,如节点位移之间取局部关联($\underline{\underline{K}}$ 为带状矩阵),而节点速度之间和加速度之间均取零关联性($\underline{\underline{C}}$ 和 $\underline{\underline{M}}$ 均为对角矩阵)。由此可知,节点的关联性在多个参数时还可有多种形式关联性的不同组合。

综上所述,有限离散模型可以根据不同节点、单元(网格)和关联性的组合选择,形成众多的不同的数值计算模型,其中有些已经开发使用,有些尚待开发研究;在已开发使用的有限离散模型中应用最广的是有限元(位移元)离散模型,此外还有有限差分离散模型、边界元离散模型、离散元模型和弹簧刚体元离散模型等,相应的分析方法有有限元法(FEM)、有限差分法(FDM)、边界元法(BEM)、离散元法(DEM)和刚性有限元法(RFEM)等。

1.2 连续介质与不连续介质问题的数模与方法

迄今为止,无论是在理论分析或数值计算方法的研究方面,连续介质问题要比不连续介质问题成熟得多。在连续介质问题中,以有限元离散模型为计算对象采用有限元法业已成功地解决静力问题和动力问题、线性问题与非线性问题、平衡问题和稳定问题、热应力问题和粘性(蠕变和松弛)问题、板壳问题和组合结构问题、场问题和耦合问题等,有限元法已成当前分析工程结构问题最强有力的工具。但在不连续介质问题中,如结构各类间断面上可能出现的错位、滑移和脱开,以及任意形状颗粒组合体材料的细观裂纹或缺陷等不连续位移问题,有限元就难以描述和计算。此外,即使是连续介质问题,有限元仍存在某些缺陷。如在非线性分析时,由于有限元位移元获得的应力精度比位移精度低,应力判据的不准可能导致非线性解的漂移;在断裂分析中,单元开裂或已有裂纹的扩展势必要求重新划分有限元的网格,这就给计算增加了难度;这些无疑将给有限元的应用投下了若干阴影。

不连续介质离散模型最早出现于岩体工程中分片刚体模型,如 P. A. Cundall(1971)提出离散单元体、石根华(1983)提出的块体理论等,其实质均是分片刚体离散模型,能较好描述岩体中的裂隙、节理、夹层、断层等软弱结构面上不连续位移和运动特性,但未能计入单元的各类变形(弹性、塑性和粘性变形)。为了克服这个缺陷,计入单元变形的离散单元模型(Cundall, 1980)和不连续变形

块体模型(石根华,1992)等改进的模型相继被提出。此外,T. A. Kawai(1977)提出以弹簧反映变形的刚体弹簧元离散模型,成功地解决了不连续的均质变形体静力变形应力分析问题。

在上述可以描述不连续介质问题的模型中,离散单元的单元形状可以任意,采用牛顿第二定律为计算的理论依据,可以描述位移变化到破坏的全过程,适用于岩土边坡或围岩的稳定分析。但该模型也存在缺陷,如引入了过多的人为假定和经验参数,计算中对接触点识别的分格检索与数据结构和迭代时步的确定尚较繁杂,变形和应力计算过于简化等。块体理论后来采用的不连续变形块体模型兼有离散单元和有限元的特点,块体运动的分析类似离散元,而每一时步内的求解犹如有限元。该块体单元形状也可以任意,采用最小势能原理为推导整体支配方程的依据,可以追踪非连续变形到渐近破坏,适用于岩体工程问题分析。但该模型目前对变形的描述还只限于弹性,而塑性和粘性变形尚未计及,一些假定(如块体之间力-位移关系等)和参数的选定以及时步的确定均对解的精度有直接影响,此外耗时多也是个缺点。至于刚体弹簧元模型,其构思是将离散块体单元的变形累积反映在单元间交界面上设置的弹簧,由于块体元的变形已用弹簧变形表示,故其位移呈刚体位移模式,而弹簧的变形由相邻单元间相对位移的差分格式求解。该模型采用虚功原理为理论依据,建立整体支配方程,从而获得各块体(形心)的位移、单元交界面的相对位移和弹簧力。由于其支配方程类似有限元,故又有刚性有限元之称。该模型优点是可以描述不连续位移,单元可为任意形状,适用性强,且因其应力精度不低于相对位移精度,颇有诱人的应用前景;但该模型确定弹簧变形的差分格式是在结构为均质情形下导出的,且还只停留在静力平面问题的分析,作为一般的结构分析方法尚不具备条件,有待于改进和发展。

笔者在学习、分析前人研究成果的基础上,萌发建立同时适用于连续介质、不连续介质和两类介质混合结构的数值仿真模型,并能在精度、效率和适用性等诸方面有所提高。受 Kawai 刚体弹簧

元思路的启发,提出了界面元离散模型和界面元法。首先在模型中以界面元件取代弹簧元,这充分体现建模中将单元变形累积于界面的思想,且可用不同类型元件(如弹性元件、塑性元件、粘性元件、开裂元件和接触元件等)反映单元的弹性、塑性和粘性变形,描述结构的开裂过程或接触界面上错位、滑移和张开度;其次,在略去高阶小量的假定基础上根据平衡律、协调律和本构律,导出非均匀、各向异性体中相邻单元交界面上任意一点的界面应力公式;进而,引入自然坐标导出了任意块体形状界面元的有关列式,并给出求解块体内部应力的途径和公式。在以上工作基础上进而完成各类非线性、动力、稳定、梁板、场问题和耦合问题的界面元法研究及其工程应用,从而使界面元法不仅能够求解有限元所能计算的问题,而且可以弥补有限元在求解不连续介质问题和开裂等问题的成果欠佳甚至软弱无能的缺陷,显示了界面元法的强劲生命力,形成了独具一格的新的数值方法体系。当然,界面元法像其它数值方法一样,也存在着若干不尽理想之处,但由于它和有限元、边界元等模型容易相接,可极为方便地根据各尽所能的原则分区组建混合形式的离散模型,使其计算功能更好更全,适用范围更大更宽。

1.3 工程问题中界面元法的概念

在岩体工程中,无论是变形或是强度或是稳定性,往往受控于软弱结构面的变形和受力特性,因此软弱结构面部位是岩体工程问题分析的热点和难点,就是一般的工程结构,也十分关注该结构的初始裂隙和缺陷产生的影响、加载后可能产生的开裂或原有裂缝的扩展,此外也关心不同介质(间断)交界面和几何突变处(孔口、凹凸处等)的变形和应力奇异。由此看来,工程结构中存在的或潜在的软弱界面就成为结构分析的重点,倘能建立一类以界面变形和受力分析为重点的数值离散模型无疑将赢得工程界的重用和青睐。

从工程结构的计算理论和方法看,数值分析具有宽广的适用

范围。判别一种数值方法的优劣往往以精度、效率和适用性等诸方面的综合评判为依据,有限元法之所以能够迅猛发展成为当今工程结构分析的最强有力的工具,就是因为它在最常见的宏观连续性的结构分析中具备了精度高、效率高和适应性强等诸多方面的优点而独占鳌头。但随着工程建设要求的发展和科学技术水平的提高,发现了在某些工程问题分析中有限元法并非毫无瑕疵,它在介质间断面(线)、缝隙面(线)和接触面等界面上的不连续位移难题中未能得心应手,甚至软弱乏力。这种挑战势必激发产生新的一种适用于求解不连续介质问题的数值方法。早期出现的分析不连续介质问题的数模大多属于分片刚体离散模型,近年来虽计入考虑块体的变形,但还不够理想和完备,尚未能达到连续介质变形体有限元模型那么完善成熟的地步。为此,能否建立一种类似有限元分析过程,既能反映单元变形又能描述界面的不连续位移的新模型和方法,便成为诸多计算力学工作者攻关的热点。在此形势下,界面元法便应运而生了。

分析结构的界面元法采用的模型是基于单元累积变形于界面层的假定而建立的由有限多块体元-界面元组合的离散体。鉴于单元的变形已累积于界面层,块体元将只有刚体位移,其最简便描述的算式是用块体元形心点(或内部任意点)的广义位移为参数的分片刚体位移模式(不完全的一次式),各个块体元形心点的位移分布将既可控制整个结构的位移场,也可以描述各个界面上的相对位移,即不连续位移(因为分片的刚体位移模式在界面上是非协调的)。界面上任意一点相对位移可视为是垂直该界面、跨越相邻单元的一条具有特征长度、截面尺寸很小的微分条累积变形的结果,由此,便可由几何微分方程求出界面上任意一点的应变。继而借助有关材料介质的本构律和相邻单元在界面处微元保持平衡的关系,最终获得界面上任意一点的应力,由离散模型中众多界面上分布的应力构成了整个结构应力场的表征值。

从上述分析的思路可知,各块体单元形心的广义位移是本模型计算的基本未知量,它们是块体形心的三个平移分量(u 、 v 、 w)

和三个转动分量($\theta_x, \theta_y, \theta_z$),一旦求出了各块体形心的广义位移,利用对应微分板条的几何微分关系便可获得各界面上任意一点的应变,继而根据构造微分条相邻单元两种材料介质的本构律和界面的平衡关系,最终便可完成各界面任意一点应力的求解。由此看来,求解各块体形心的广义位移是本模型的关键。从弹性力学理论可知,欲使位移解答正确唯一,必须保证整个结构满足三大定律的偏微分方程组或等价的能量泛函表达式。鉴于本计算的离散模型属于非协调元类,拟采用偏微分方程的弱解形式(如加权余量法)或放松界面位移协调性的广义变分原理(或虚功原理)去建立求解各块体形心广义位移的整体结构支配方程;这样建立起来的界面元支配方程十分类似有限元支配方程的形式,即

$$\underline{K} \underline{\delta} = \underline{R} \quad (1.2)$$

其中

$$\underline{K} = \sum \underline{k}_e, \quad \underline{R} = \sum \underline{R}_e, \quad \underline{\delta} = \sum \underline{\delta}_e$$

$\underline{K}$ 为整个劲度矩阵,它由各块体单元劲度矩阵 $\underline{k}_e$ 集合而成,鉴于块体变形累积于界面,因此 $\underline{k}_e$ 的计算将只对界面积分求得,这与有限元计算 $\underline{k}_e$ 是对单元体积分的算式是不同的; $\underline{R}$ 为整体荷载列阵,它由各块体单元荷载列阵 $\underline{R}_e$ 集合而成,鉴于界面元模型选择的基本未知量位于各块体的形心,因而 $\underline{R}_e$ 将是集中作用在块体元形心的荷载,这与有限元 $\underline{R}_e$ 视为集中作用在单元节点上的荷载求解的处理方法类似,但含义不同; $\underline{\delta}$ 为整体位移列阵,它是各块体形心广义位移简单形成的直接集合(因为各块体元形心的广义位移之间不存在重叠)。式(1.2)的力学意义是表示各块体形心的平衡方程,这与有限元支配方程表示各节点的平衡方程形式类似,但含义不同。

界面元法具有下列若干优点:

(1)适用性强。由于该离散模型中的块体位移模式和劲度阵的计算与单元的形状无关,所以离散的块体元可为任意形状,这就为