高等学校试用教材

GAODENGXUEXIAO SHIYONGJIAOCAI

GJ

线性规划与网络计划技术

倪志锵 编 · 中国铁道出版社

线性规划与网络计划技术

中国铁道出版社

高等学校试用教材

线性规划与网络计划技术

西南交通大学　倪志锵　编

长沙铁道学院　张显华　审

中国铁道出版社

1987年·北京

内 容 提 要

本书是非管理专业（30～40学时）用的选修课试用教材，主要介绍最常用的两种经济管理数学方法。全书分两篇十章，第一篇线性规划部分，着重介绍数学模型的建立、解题的理论根据及基本方法，并从经济意义及生产应用的角度讲对偶问题及灵敏度分析。第二篇网络部分，着重在网络图的绘制、时间计算及成本、资源的优化等。

本书除作为高等学校非管理专业的选修课教材外，还可以供工程技术人员为加强经济管理、提高经济效益时自学参考。

高等学校试用教材
线性规划与网络计划技术
倪志锵 编
中国铁道出版社出版
责任编辑 李云国
新华书店北京发行所发行
各 地 新 华 书 店 经 售
中国铁道出版社印刷厂印
开本：787×1092毫米$\frac{1}{16}$ 印张：9 字数：224 千
1 9 8 7 年7月 第1版 第1次印刷
印数：0001－5,000册 定价：1.60 元

目　录

第一篇　线性规划

第一章　线性规划及其数学模型

第一节　线性规划引言

每隔一定时间，各个企业的管理部门就要对今后的生产工作制订计划。有整个企业的生产计划，也有下面各部门范围较小的生产计划。无论制订哪一类生产计划，一般分两步来进行：

第一步是确定各种可行方案。例如，有哪些方案是现有的设备、资源能力所能承担的；有哪些配料方式能使产品满足所要求的质量等等。解决这类问题的依据大部分是工艺性的。

第二步是在各种可行方案里选出一个经济上最优的，譬如说，成本最低，用料最省，产量最多，或利润最大的方案。就是说，有了技术上可行的方案以后，还要从提高经济效益上来选定一个最优方案。以往，这一步工作往往被忽视，或者凭借一些常识和经验来作出抉择。当然，凭常识和经验有时也能选得一个比较满意的方案。但是，许多问题比较复杂，特别是大型企业的问题，牵涉的因素很多，单凭常识和经验来解决问题就会感到困难，因而需要应用一种比较科学的方法。这里所说科学的方法是指要能根据有关的工艺数据和经济数据，结合有关因素，通过数学的方法来得到一个目标明确的最优方案。线性规划就是这类数学方法之一。

线性规划是运筹学中研究较早、发展较快、比较成熟、应用较广的一个分支。它研究的问题主要有两类：一是一项任务确定后，如何统筹安排，用最少的人力物力等资源来完成这一任务；二是在已有一定数量的人力物力等资源条件下，如何安排使用这些资源，使完成的产值最大或者产品数量最多，等等。

因为线性规划是一种数学方法，所以解决实际问题时首先要把这个实际问题转化成一组数学表达式，叫做数学模型，然后求解。下面举一个简单的例子来说明。

某工厂使用A_1、A_2两台机床，生产B_1、B_2两种产品。各机床加工一件产品需用的工时、每一机床每周的生产能力以及每件产品能获得的利润见表1—1。如果要求获得最大利润，则应生产B_1、B_2各多少件？

表1—1

单位产品所需工时（机床＼产品）	B_1	B_2	周生产能力（工时）
A_1	2	3	24
A_2	2	1	16
单位产品的利润（元）	5	7	

现在用代数形式来表达这一问题。设x_1为所生产B_1的件数，x_2为所生产B_2的件数。

对于机床A_1，生产一件B_1需用2工时，一件B_2需用3工时。对于机床A_2，生产一件B_1需用2工时，一件B_2需用1工时。但是这些产品需用的总工时不能超过各机床的周生产能力，因此x_1和x_2应满足下面两个限制条件，叫

做约束条件或约束方程：

对机床A_1　　$2x_1+3x_2\leqslant 24$

对机床A_2　　$2x_1+x_2\leqslant 16$

这两个约束方程是线性不等式。所谓线性，对这个例子来说是指：如果生产一件B_1需要在机床A_1上加工2h，那么生产两件B_1就需要在机床A_1上加工4h等等。这两个线性不等式有无限多个解，我们只考虑其中的非负解，因为产品的数量为负数是没有实际意义的。因此，x_1和x_2还应满足下面的限制条件，叫做非负条件或非负约束：

$$x_1\geqslant 0$$

$$x_2\geqslant 0$$

任何一组能满足前面两个约束方程的非负解都代表用这两台机床的部分或全部生产能力所生产出这两种产品的件数。或者说，每一组非负解都是能满足这两个约束方程的可行解。下面我们举出其中几组特殊的可行解。

1．在已知线性不等式

$$2x_1+3x_2\leqslant 24 \qquad (1)$$

$$2x_1+x_2\leqslant 16 \qquad (2)$$

中，如令$x_2=0$，则这两个限制条件就成为

$$x_1\leqslant 12 \qquad (1)$$

$$x_1\leqslant 8 \qquad (2)$$

这就是说，如果根本不生产B_2（即$x_2=0$），则利用机床A_1的生产能力．最多可以生产12件B_1。但是，按机床A_2的生产能力，最多只能生产8件B_1。所以．要同时满足这两个限制条件，最多只能生产8件B_1。如果生产了8件B_1（即$x_1=8$），则机床A_1每周还有8小时的空闲时间，叫做松弛时间；而机床A_2的全部工时则都已用尽了。在这种情况下，机床A_2的生产能力是控制因素。

2．在已知线性不等式

$$2x_1+3x_2\leqslant 24 \qquad (1)$$

$$2x_1+x_2\leqslant 16 \qquad (2)$$

中，如令$x_1=0$，则这两个限制条件成为

$$x_2\leqslant 8 \qquad (1)$$

$$x_2\leqslant 16 \qquad (2)$$

这就是说，如果不生产B_1（即$x_1=0$），则虽然利用机床A_2的生产能力最多可以生产16件B_2，但按机床A_1的生产能力．最多只能生产8件B_2。所以根据这两个限制条件，最多只能生产8件B_2。如果生产了8件B_2（即$x_2=8$），则机床A_1的工时将会全部用上，而机床A_2每周还有8小时的松弛时间。这时，机床A_1的生产能力是控制因素。

3．如果取两个约束方程的等式

$$2x_1+3x_2=24 \qquad (1)$$

$$2x_1+x_2=16 \qquad (2)$$

那么这组方程的解将会使两台机床的生产能力全都用上，都没有松弛时间。这组方程的解是$x_1=6$，$x_2=4$。

4．令$x_1=0$和$x_2=0$，得第四组可行解。这一组解代表什么也没有生产，两台机床的生产能力一点也没有动用过。这样的解似乎并没有什么意义，但在以后的章节中我们将会发

现，这是很重要的一组解。

以上仅仅列出了四组比较特殊的解。应该明确，这组线性不等式有无限多个解，例如，$x_1=1$和$x_2=1$；$x_1=0.5$和$x_2=0$；$x_1=2.33$和$x_2=1.79$也都是可行解。

究竟选取哪一组解就要联系到问题的目的。这一问题的目的是要求获得最大利润。现在已知每一件B_1或B_2能获得的利润相应地为5元或7元。那么对任何一组可行解，能获得的利润总额P可表达为如下的线性方程式，即

$$P=5x_1+7x_2$$

式中 P——总利润（元）；

x_1——产品B_1的件数；

x_2——产品B_2的件数。

这是一个利润函数，或者叫利润方程。因为我们的目标是要使利润最多，所以这个利润函数也叫目标函数。

对于前面这四组特殊的可行解，其总利润分别为：

第一组（$x_1=8$，$x_2=0$） $P=5\times8+7\times0=40$元；

第二组（$x_1=0$，$x_2=8$） $P=5\times0+7\times8=56$元；

第三组（$x_1=6$，$x_2=4$） $P=5\times6+7\times4=58$元；

第四组（$x_1=0$，$x_2=0$） $P=5\times0+7\times0=0$元。

就以上四组可行解来说，第三组是最有利的解。

由此可见，线性规划的数学模型包括一系列的约束条件和一个需要求其极值（极大或极小）的目标函数。对于这个例子，其数学模型可以总括地写成：

求一组变量x_1和x_2的值，使其满足

$$\text{约束条件}\begin{cases}2x_1+3x_2\leqslant24\\2x_1+x_2\leqslant16\\x_1\geqslant0,\quad x_2\geqslant0\end{cases}$$

并且使目标函数 $P=5x_1+7x_2$ 的值最大。

或者简化地写成

$$\max P=5x_1+7x_2$$

满足 $2x_1+3x_2\leqslant24$

$2x_1+x_2\leqslant16$

以及 $x_1\geqslant0$，$x_2\geqslant0$

因为模型里所有的方程都是线性的，而要解决的问题是规划性的（不是如何实施计划），所以叫线性规划。

至于解题的方法，如果要在无限多个可行解中直接求出最优解，那几乎是不可能的。以后我们将根据这种数学模型的解的性质，有步骤地通过找出一些特殊的可行解（叫做基本可行解），最后得到最优解。

建立数学模型是解线性规划问题很重要的一环，所以在讲如何解题之前，用一些典型的线性规划问题为例来说明怎样建立数学模型。

第二节　数学模型的建立

1. 产品计划问题

上一节里所讲的例子就属于这类问题。再举一个一般的例子。

设用m种原料A_1，$A_2\cdots$，A_m生产n种产品B_1，B_2，…，B_n。已知生产每单位产品所需原料数、现有原料量和每单位产品可得利润数（见表1—2）。问如果要使利润最多，这n种产品应各生产多少件？

表1—2

单位产品所需原料 \ 产品 / 原料	B_1　B_2　…　B_n	现有原料量
A_1	c_{11}　c_{12}　…　c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}　c_{22}　…　c_{2n}	a_2
⋮	⋮　⋮　…　⋮	⋮
A_m	c_{m1}　c_{m2}　…　c_{mn}	a_m
单位产品可得利润	b_1　b_2　…　b_n	

这一问题同上一节的例子实质上是一样的，因为两者已知的都是生产每种单位产品所需的资源量(人工，材料或设备)和现有的资源限量。所以，令$x_1,x_2,\cdots,x_n$相应地为产品$B_1,B_2,\cdots,B_n$的产量，则这个问题的数学模型为：

求一组变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$的值，使其满足

$$\text{约束条件}\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1n}x_n\leqslant a_1 \\ c_{21}x_1+c_{22}x_2+\cdots+c_{2n}x_n\leqslant a_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{m1}x_1+c_{m2}x_2+\cdots+c_{mn}x_n\leqslant a_m \\ x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,\cdots,\ x_n\geqslant 0 \end{cases}$$

并使目标函数　$S=b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n$的值最大。

如果以x_j代表B_j（$j=1,2,\cdots,n$）的产量并采用连加号Σ，则该数学模型成为：

求一组变量x_j（$j=1,2,\cdots,n$）的值，使其满足

$$\text{约束条件}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j\leqslant a_i & (i=1,2,\cdots,\ m) \\ x_j\geqslant 0 & (j=1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

并使目标函数　$S=\sum_{j=1}^{n} b_jx_j$　的值最大。

或简写成：

$$\max S=\sum_{j=1}^{n} b_jx_j$$

$$\text{满足}\qquad \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j\leqslant a_i \qquad (i=1,2,\cdots,\ m)$$

$$\text{以及}\qquad x_j\geqslant 0 \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

应当注意，式中a_i、b_j和c_{ij}都是已知量。

2. 配料问题

设用三种原料B_1、B_2和B_3配制成两种含有特定营养成分的食品A_1和A_2，要求在A_1中某种营养成分的含量不低于5个单位，而在A_2中另一种营养成分的含量不低于4个单位。各原料所含的营养成分量及单价见表1—3。问应如何配料，使产品成本最低？

很明显，这一问题的目的是求成本函数的极小值，而不是象前例那样，求利润函数的极大值。另外，约束条件所给的是低限，所以不等式应该是“$\geqslant$”而不是“$\leqslant$”的形式。还有，所求的变量，即所用原料的数量，当然也应该是非负的。因此，如果令x_1，x_2和x_3分别为所用原料B_1，B_2和B_3的数量，则这一问题的数学模型为：

求一组变量x_1，x_2和x_3的值，使其满足

$$\text{约束条件}\begin{cases}2x_1 \qquad\quad + 4x_3 \geqslant 5\\ 2x_1 + 3x_2 + \quad x_3 \geqslant 4\\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0\end{cases}$$

并使目标函数　$S = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3$的值最小。

这类问题是最初应用线性规划方法来解的一批实际问题之一。在其他工业生产上也有类似的问题，例如：

设用n种原料$B_1, B_2, \cdots, B_n$制成m种含有特定成分的产品$A_1, A_2, \cdots, A_m$，其所含各种成分的需要量分别不低于$a_1, a_2, \cdots, a_m$，各种原料所含各种成分的数量以及原料的单价见表1—4。问应如何配料，使产品成本最低？

表1—3

单位原料所含营养成分量 \ 原料 / 食品	B_1	B_2	B_3	食品中要求的营养成分量（单位）
A_1	2	0	4	$\geqslant 5$
A_2	2	3	1	$\geqslant 4$
原料单价	4	2	3	

表1—4

单位原料所含成分的数量 \ 原料 / 产品所含成分名称	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	产品所含成分需要量
A_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	a_m
原料单价	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

这个问题实质上是同上面食品的配料问题一样的。所以，如果令x_j为原料B_j的用量（$j = 1, 2, \cdots, n$），则其数学模型为：

求一组变量x_j（$j = 1, 2, \cdots, n$）的值，使其满足

$$\text{约束条件}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j \geqslant a_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)\\ x_j \geqslant 0 \qquad\qquad (j = 1, 2, \cdots, n)\end{cases}$$

并使目标函数　$S = \sum_{j=1}^{n} b_j x_j$的值最小。

或简写成：

$$\min S=\sum_{j=1}^{n} b_j x_j$$

满足 $\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \geqslant a_i \quad (i=1,2,\cdots,m)$

以及 $x_j \geqslant 0 \quad (j=1,2,\cdots,n)$

3. 合理下料问题

某工厂制造100台机床需用某一直径的圆钢做轴，每台机床的需要量为：长度为3.1m的需1根；2.1m的需2根；1.2m的需4根。每根圆钢的来料长度为5.5m。问应怎样下料，使所用原材料的根数为最少？

先分析一下这个问题。所需要的三种长度的轴都是从定长度为5.5m的原材料上截出的，例如，用一根圆钢可以截得3.1m和2.1m长的轴各一根。很明显，只用一种截法是很难满足不同长度及其需要量的要求的。因此，首先要定出有几种下料方式。确定了有几种不同的下料方式后，问题就成为每种下料方式应该用多少根原材料，使得既能满足需要量，又能使所用原材料的根数为最少。

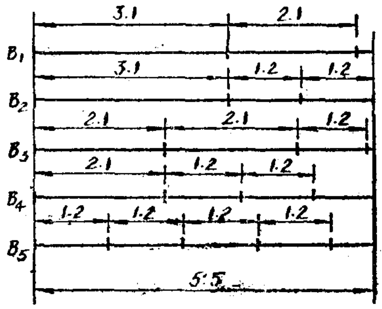

图1—1 下料方式

5.5m长的圆钢截出上述三种长度可以有五种（$B_1,B_2,\cdots,B_5$）截法，如图1—1所示。有了这五种截法，可把已知条件列于表1—5中：

表1—5

每一下料方式截得的根数 \ 下料方式 / 产品	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	百台机床的需要量
长度为3.1m的（根）	1	1	0	0	0	100
长度为2.1m的（根）	1	0	2	1	0	200
长度为1.2m的（根）	0	2	1	2	4	400

令$x_1,x_2,\cdots,x_5$分别代表以上五种下料方式$B_1,B_2,\cdots,B_5$所用原材料的根数，则这一问题的数学模型为：

求一组变量$x_1,x_2,\cdots,x_5$的值，使其满足

$$\text{约束条件}\begin{cases} x_1+x_2 = 100 \\ x_1 \quad +2x_3+x_4 = 200 \\ \quad 2x_2+x_3+2x_4+4x_5=400 \\ x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,\cdots,x_5\geqslant 0 \end{cases}$$

并使目标函数 $S=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$的值最小。

回顾前面几个例子可以看出，变量和目标是线性规划里所要解决的主要问题，必须确认并表达清楚。有时，变量隐含在问题之中，并没有直接给出，这就需要进行分析。例如，下

料问题的模型同配料问题是类似的，不同的只是：在配料问题里，不同原料含有不同成分已经在问题里直接给出，而在下料问题里，不同的下料方式含有不同长度的轴是隐含在问题之中，并没有直接给出，下料方式作为变量是经过了分析才确定的。

此外，上面几个例子里的约束方程，其限制条件的性质都是一样的，如生产能力的限制，产品含量的要求，等等。较复杂的实际问题，约束条件的性质往往不止一种。遇到这种情况，首先应当注意区分约束的性质并明确每组约束应有约束方程的个数，然后一一列出。

4． 运输问题

运输问题是一种典型的线性规划问题，而且应用很广泛（如各种布局问题等）。简单地说，运输问题是要把物资从若干个产地或仓库调运到各个使用或销售地点时，应如何组织调运，使总的运费或运输量最小。举例如下。

设某种物资有m个产地$A_1, A_2, \cdots, A_m$，共同供应给n个销地$B_1, B_2, \cdots, B_n$。已知各产地的产量，各销地的销量以及各产地至各销地的单位运价见表1—6，问应如何组织调运，使总运费最省？

表1—6

运价（元/t）　销地 / 产地	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	产量（t）
A_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	a_m
销量（吨）	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

因为要求的是总运费最少，而总运费取决于各个产销点之间的运价和运量。由于每个产地的物资都可能运到各个销售地，所以变量应该是每个产地到每一销地的运量，即x_{ij}($i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$)。一般情况下，产量意味着当前生产能力的上限，即从各产地A_i($i=1,2,\cdots,m$)调运到各销地B_j($j=1,2,\cdots,n$)的数量不能超过a_i($i=1,2,\cdots,m$)，这一组约束有m个方程；销售量意味着销售额的低限，即从各产地调运来的数量不能少于b_j($j=1,2,\cdots,n$)，这是另一组约束，有n个约束方程。所以这一问题除了非负限制外，有两组约束条件。目标函数，很明显，是求每个产地到各个销地运费总和的最小值。因此，这一问题的数学模型为：

求一组变量x_{ij}($i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$)的值，使其满足

$$\text{约束条件}\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i & (i=1,2,\cdots,m)\\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} \geqslant b_j & (j=1,2,\cdots,n)\\ x_{ij} \geqslant 0 & (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

并使目标函数　$S=\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$的值最小。

如果题设的要求是产销平衡，即$\sum\limits_{i=1}^{m} a_i=\sum\limits_{j=1}^{n} b_j$，则这一问题的模型就成为：

求一组变量x_{ij}($i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$)的值，使其满足

约束条件 $\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & (i=1,2,\cdots,m) \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & (j=1,2,\cdots,n) \\ x_{ij} \geqslant 0 & (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n) \end{cases}$

并使目标函数 $S=\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$的值最小。

同前面几类问题的数学模型相比较，我们发现在运输问题的模型中，约束方程的结构很特殊，即各变量的系数都是1。这种特殊结构使我们有可能采用比较简捷的特殊解法来求解。运输问题的特殊解法将在第六章里介绍。

以上这些例子中，约束方程有的是等式，有的是不等式，采用等式还是不等式，要根据题目的要求而定。譬如：运输问题中如果要求产销平衡，则约束方程必须用等式；在产品计划问题中，资源数量有限制，但并没有要求必须把现有资源全部用完，因而可以用不等式，而且一般说来，采用不等式将更有利于求得最优解，因为采用不等式时，可行解的范围增大了，这意味着求最大值或最小值时选择的余地也就更大了。

在此还须说明一点，即求出的非负变量，一般不是整数，或者不全是整数；而有的问题，如产品的件数或台数，原材料的根数或块数，都应该是整数。如果要求的解必须是整数，这种问题就要用整数规划来解，不属于线性规划的范围。不过，对于数值很大的解，舍去小数后影响很小时，则用线性规划来解仍能得到足够满意的结果。

5． 生产组织问题

某工厂用m种机床加工n种零件，每种机床都能够加工完成任何一种零件。已知条件是：各机床加工每个零件所费的时间，加工每个零件的成本，以及一个生产周期内各机床的生产能力和必须加工完成各零件的数量。问在这个生产周期内，应如何安排各机床的生产任务，使得既完成规定的加工任务量，总加工成本又最低？

分析这一问题，我们应明确如下几点：每种零件都可以在不同机床上加工完成，而所耗的机时和成本又是各不相同的；有两种性质的限制条件，即机床的生产能力和必须完成的零件数量；目标是总的加工成本最低。为了便于建立模型，可以把已知条件列表1—7和表1—8。

表1—7

加工每个零件的时间(机时) \ 零件 / 机床	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	一个生产周期的生产能力（机时）
A_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	a_m
必须加工完成的零件数	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

表1—8

加工每个零件的成本（元） \ 零件 / 机床	B_1	B_2	$\cdots$	B_n
A_1	d_{11}	d_{12}	$\cdots$	d_{1n}
A_2	d_{21}	d_{22}	$\cdots$	d_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
A_m	d_{m1}	d_{m2}	$\cdots$	d_{mn}

如果令x_{ij}为机床A_i在一个生产周期内加工零件B_j的个数（$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$），则这一问题的数学模型为：

求一组变量x_{ij}（$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$）的值，使其满足

$$\text{约束条件}\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\leqslant a_i & (i=1,2,\cdots,m)\\ \sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}\geqslant b_j & (j=1,2,\cdots,n)\\ x_{ij}\geqslant 0 & (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

并使目标函数　$S=\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m}d_{ij}x_{ij}$的值最小。

再举一个例子。

某车间用m种机床A_i（$i=1,2,\cdots,m$）生产一种机器，该机器需用n种零件B_j（$j=1,2,\cdots,n$）装配起来，每台机器需用各种零件的数量比为$\lambda_1:\lambda_2:\cdots:\lambda_n$。如果各机床$A_i$生产各种零件$B_j$的效率为$c_{ij}$（件/日），问应如何分配机床负荷，使生产的机器台数为最多？

这一问题的目标是要使生产的机器台数为最多，或者说是生产的零件套数为最多，而在每一套中各种零件的数量比应为$\lambda_1:\lambda_2:\cdots:\lambda_n$，即零件$B_1$的数量如果是$\lambda_1$，则$B_2$的数量为$\lambda_2$等等。又题给各机床$A_i$的效率（相当于生产能力）是以每天的工作时间都生产某种零件时所能生产的数量（c_{ij}）给出的，要求的是如何分配机床的负荷。让我们先试列一个表（表1—9）：

表1—9

机床生产零件的效率（件/日）　零件 / 机床	B_1	B_2	$\cdots$	B_n
A_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}
A_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}
每套零件的数量比	$\lambda_1:$	$\lambda_2:$	$\cdots:$	λ_n

要求如何分配机床负荷，意思是要定出每台机床在每天的工作时间里用来加工各种零件的时间各多少。所以，如果令x_{ij}为机床A_i生产零件B_j的时间（单位为天），则$\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}=1$（$i=1,2,\cdots,m$），即每台机床加工各种零件的总时间应该等于一天。这就是一组约束条件。

显然，每套零件中各零件的数量成已知比也应该是一个约束条件。要列出这个约束方程，必须先算出每种零件的数量，它等于各台机床生产这种零件的数量之和，即B_1的数量为$\sum\limits_{i=1}^{m}c_{i1}x_{i1}$，$B_2$的数量为$\sum\limits_{i=1}^{m}c_{i2}x_{i2}$等等。这些数量之比应该等于已知比，即

$$\sum_{i=1}^{m}c_{i1}x_{i1}:\sum_{i=1}^{m}c_{i2}x_{i2}:\cdots:\sum_{i=1}^{m}c_{in}x_{in}=\lambda_1:\lambda_2:\cdots:\lambda_n$$

或

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}c_{i1}x_{i1}}{\lambda_1}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}c_{i2}x_{i2}}{\lambda_2}=\cdots=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}c_{in}x_{in}}{\lambda_n}$$

这些比值就是零件的套数，也就是机器的台数。所以，如果令S为机器的台数，则

$$S=\frac{\sum_{i=1}^{m} c_{i1}x_{i1}}{\lambda_1}$$

综上所述，这一问题的数学模型为：

求一组变量x_{ij}（$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$）的值，使其满足

$$\text{约束条件}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1 & (i=1,2,\cdots,m)\\ \dfrac{\sum_{i=1}^{m} c_{i1}x_{i1}}{\lambda_1}=\dfrac{\sum_{i=1}^{m} c_{i2}x_{i2}}{\lambda_2}=\cdots=\dfrac{\sum_{i=1}^{m} c_{in}x_{in}}{\lambda_n} & \\ x_{ij}\geqslant 0 & (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

并使目标函数$S=\dfrac{\sum_{i=1}^{m} c_{i1}x_{i1}}{\lambda_1}$的值最大。

以上我们列举了几种比较典型的实际问题的线性规划数学模型。这些实际问题是各式各样的，但它们的数学模型却有着相同的数学形式。这就是：表示约束条件的数学式子都是线性等式或线性不等式，代表最优化指标的目标函数都是线性函数。所以归纳起来，线性规划数学模型的一般形式是：

求一组变量x_j（$j=1,2,\cdots,n$）的值，使其满足

$$\text{约束条件}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\leqslant b_i\ (\text{或}\geqslant b_i,\ \text{或}=b_i) & (i=1,2,\cdots,m)\\ x_j\geqslant 0 & (j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

并使目标函数　　$S=\sum_{j=1}^{n} c_jx_j$的值最大（或最小）。

或简写成

$$\max S\ (\text{或}\min S)=\sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

满足　　$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\leqslant b_i$（或$\geqslant b_i$，或$=b_i$）（$i=1,2,\cdots,m$）

以及　　$x_j\geqslant 0$　　（$j=1,2,\cdots,n$）

其中a_{ij}、b_i和c_j（$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$）都是已知量。

线性规划问题的数学模型是一种描述实际问题的抽象的数学形式，它反映了客观事物间的本质规律。在实际问题中，影响因素很多，影响的方面和程度也各有不同。数学模型可粗可细，考虑因素越周到，则模型越接近真实，但求解也会越复杂。所以建立模型时，要根据

问题的性质和要求，抓住最本质的因素，而把不太重要的因素去掉，以便建立一个既简单而又比较真实反映本质规律的模型。

习　题　一

写出下列问题的数学模型。

1—1　某车间用三台机床A_1、A_2和A_3加工两种零件B_1和B_2，其数量分别为50个和70个；各机床必须加工出的零件数为：A_1——40个，A_2——35个，A_3——45个。在各机床上加工每种零件的加工费见表1—10：

表1—10

零件 加工费（元/个） 机床	B_1	B_2
A_1	0.4	0.3
A_2	0.3	0.5
A_3	0.2	0.2

表1—11

机床日产量（个） 机床 零件	B_1	B_2	B_3
A_1	30	15	18
A_2	20	40	50

问应如何分配这三台机床加工两种零件的任务，使总加工费为最少？

1—2　用长度为500cm的条材截成长度分别为98和78cm的两种毛坯，要求截出的根数为：98cm的——10000根，78cm的——20000根。问应采用怎样的截法才能使原材料的用量最少？

1—3　有三种机床生产某种产品的两种零件。产品需用这两种零件的数目相同。各机床生产每种零件的日产量见表1—11，问应如何组织生产，使产量最多？

1—4　某班有男生30人，女生20人，准备星期天去植树。根据经验，男生平均每人一天可挖坑20个，或栽树30棵，或给树浇水25棵；女生平均每人一天可挖坑10个，或栽树20棵，或浇水15棵。问应怎样安排才能使所植的树（包括挖坑、栽树、浇水）最多？

1—5　某养鸡场有一万只鸡，用动物饲料和谷物饲料混合后喂养。每只鸡平均每天吃混合饲料0.5kg，其中动物饲料所占的比例不得少于1/5。动物饲料的价格为0.20元/kg，谷物饲料0.16/kg元。饲料公司每周只保证供应谷物饲料25,000kg。问饲料应当怎样混合才能使成本最低？

1—6　某工厂用7种材料$P_1, P_2, \cdots, P_7$生产3种产品X、Y和Z。已知每种产品需用各种材料的数量见表1—12，每件产品可获得的利润分别是：X为6元，Y为5元，Z为9元。可供使用的材料数量为：$P_1=100$，$P_2=115$，$P_3=135$，$P_4=90$，$P_5=85$，$P_6=140$，$P_7=170$。问应如何组织生产使利润最多？

表1—12

产　品	材料需用量						
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
X	3		2		1		
或者X		3		4			
Y		2	1			2	
或者Y	1			2	3		
Z				4		2	1
或者Z			2		6		

1—7　某公司有两个工厂生产A、B、C和D四种产品，其中一厂能生产A，B或D；二厂能生产A，B或C。各厂生产每件产品的

成本和这些产品的总需求量见表 1 —13，各厂最多能生产的产品件数见表 1 —14。问应如何

表 1 —13

产　品	一厂	二厂	总需求量
A	11.00元	10.00元	2,000件
B	9.00元	12.00元	2,700件
C	———	13.50元	2,100件
D	20.00元	———	1,500件

表 1 —14

工厂 \ 产品	A	B	C	D	总件数
一　厂	3,000	2,000	———	3,500	5,000
二　厂	2,500	2,200	3,000	———	4,500