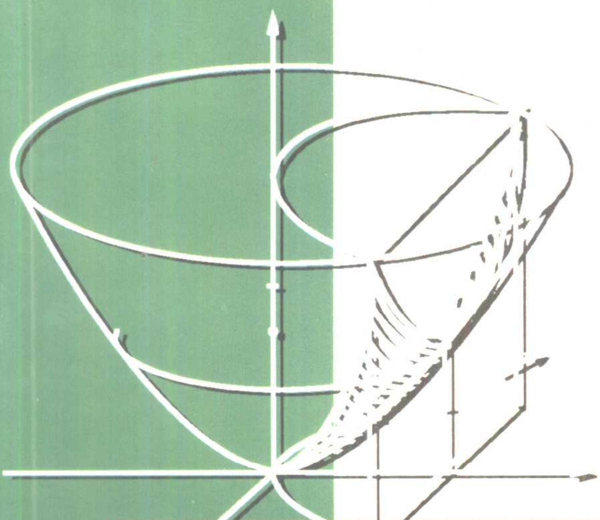
邹应 编著



数学分析习题及其解答

SHUXUE FENXI XITI JIQI JIEDA

武汉大学出版社

高等学校教学参考书

数学分析习题及其解答

SHUXUEFENXIXITIJIQIJIEDA

邹 应 编著

- 课程内容回顾
- 365 道习题
- 详尽习题解答

武 汉 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析习题及其解答/邹应编著.—武汉：武汉大学出版社，2001.8
ISBN 7-307-03123-x

Ⅰ.数…　Ⅱ.邹…　Ⅲ.数学分析—高等学校—习题　Ⅳ.O17－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 53980 号

责任编辑：夏炽元　　责任校对：刘凤霞　　版式设计：支　笛

出版：**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件：wdp4@whu.edu.cn　网址：www.wdp.whu.edu.cn)
发行：新华书店湖北发行所
印刷：核工业中南三〇九印刷厂
开本：787×1092　1/16　印张：35.375　字数:853 千字
版次：2001 年 8 月第 1 版　2001 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 7-307-03123-x/O·229　定价：46.00 元

前 言

目前在我国数学界流传最广、影响最深的数学分析习题集应该说是原苏联的吉米多维奇编写的“数学分析习题集”。这是一本经典的著作。但随着时代的前进及我国改革开放的发展,数学的教育改革也在不断地深入。从教学大纲的制订、新教材的编写到与之相联系的教学方法、考试方法都在进行着前所未有的改革。毫无疑问,“数学分析”这门数学各专业的最基础的主干课是最值得我们去研究和探索的。

1995 年由高等教育出版社出版的由作者编写的《数学分析》一书从体系和结构上作了相当大的改革,由于对很多传统内容的写法进行了现代化的革新,故与之相对应的习题也就与传统的习题相差甚远,这给许多读者带来诸多的不便。作者经过多年的努力,现在与《数学分析》基本结构相对应的《数学分析习题集》终于由武汉大学出版社出版了。此习题集的最大特点是:

1. 体系结构是全新的;
2. 题型新颖;
3. 习题侧重于理论上的证明;
4. 既适合于数学各专业的本科学生,也可以作为考研的深化训练、研究生的学习及相应教师教学的参考书。

值得进一步指出的是:本书收集的习题,大部分都具有相当的难度,有很多的习题还是书本内容的扩充及相关结论的总结。因此读者将从本习题集中了解到许多新的知识和概念,这无疑对扩大知识面及培养读者独立分析问题和解决问题的能力会有一定的帮助。

另外,本习题集由于篇幅的原因,没有编入关于多元函数部分的习题,作者把它们归入到拓扑学习题集一书中(如有机会和可能,拓扑学习题集将另行出版)。缺少这一部分习题虽然对以后各章的影响不会太大,但总是一件憾事,请读者谅解。

此书的出版得到武汉大学教务处的关心及武汉大学出版社的大力支持,在此表示感谢。特别要感谢本书的责任编辑夏炽元先生,由于他的精心编辑加工才使本书的质量得以保证。

邹 应

2000 年 3 月 7 日

目　录

第 1 章 集合与映射

I　课 程 回 顾

1. 逻辑连接符、量词

▲ **定义**

(1)　逻辑连接符

设 A、B 是两个命题，我们形成一个新命题，称为 A 与 B 的析取，并记为(A 或 B)，如果(A 或 B)是真，当且仅当 A、B 两命题中至少有一个是真，并且(A 或(非 A))永真．

- 析取((非 A)或 B)称为 B 被 A 蕴含并记为 $A\Rightarrow B$.
- 命题(非((非 A)或(非 B)))称为 A 与 B 的结合，并记为(A 与 B).
- 两命题 A、B 称为等价的，当且仅当两个蕴含 $A\Rightarrow B$ 与 $B\Rightarrow A$ 是真，这时，记之为 $A\Leftrightarrow B$.

(2)　量词

设 $P(x)$是依赖于"变量"x 的一个命题．

- $(\exists\ x|P(x))\Leftrightarrow$至少存在一个对象 x 使得 $P(x)$是真．
- 命题$(\exists\ x|P(x))$中的符号$\exists$ 称为**存在量词**．
- $(\forall\ x,P(x))\Leftrightarrow$(非$(\exists\ x|$(非 $P(x)$)))

  $\Leftrightarrow$对任意的 x，$P(x)$是真，或对每一个 x，$P(x)$是真．
- 命题$(\forall\ x,P(x))$中的符号$\forall$ 称为**万有量词**．

2. 集合

▲ **定义**

- 一个集合 E 直观上看就是一些给定对象的汇集，E 的每一个对象称为 E 的**元素**，并记为 $x\in E$，读作"x 属于 E"，因此集合 E 是由所有对象 x 使之 $x\in E$ 所形成的．
- 设 E 是一集合．若 x 不是 E 的一个对象，则称 x **不属于** E 并记为 $x\notin E$.
- 若一集合 E 只有一个对象 a，则 E 称为元素 a 的**单点集**，并记为$\{a\}$.
- 惟一的集合 V 使得$(\forall\ x)$且$(x\notin V)$称为**空集**并记为$\varnothing$.
- 设 E、F 是两个集合．我们称 E 被**包含**于 F 中，记为 $E\subset F$，当且仅当$(\forall\ x)(x\in E$

$\Rightarrow x\in F$). 若是这样,我们称 E 是 F 的**一子集**,否则我们记为 $E\not\subset F$.

- 我们称 E 与 F 相等,并记为 $E=F$,当且仅当 $E\subset F,F\subset E$.
- E 与 F 的**并**,记为 $E\cup F$ 是如下定义的集合:

$$E\cup F=\{x\mid x\in E \text{ 或 } x\in F\}$$

- E 与 F 的**交**,记为 $E\cap F$ 是如下定义的集合:

$$E\cap F=\{x\mid x\in E \text{ 且 } x\in F\}$$

- E 被 F 的**差**,记为 $E-F$(或 $E\backslash F$)是如下定义的集合:

$$E-F=\{x\mid x\in E \text{ 且 } x\notin F\}$$

若 $F\subset E$,则 $E-F$ 称为 F 在 E 中的**补**,并记为 $C_E F$.

- E 与 F 的**卡迪尔积**(或简称为积),记为 $E\times F$ 是如下定义的集合:

(1) $\forall x\in E,\forall y\in F$,我们对应一个元素,记为$(x,y)$. 元素$(x,y)$称为**对**$(x,y)$. x 称为(x,y)的第一投影;y 称为(x,y)的第二投影.

(2) $(\forall z)z\in E\times F\Leftrightarrow\exists x\in E$ 且$\exists y\in F$ 使得 $z=(x,y)$或

$$E\times F=\{(x,y)\mid x\in E,y\in F\}$$

- 集合 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 的卡迪尔积(或简称为积),记为 $E_1\times E_2\times\cdots\times E_n$ 或$\prod\limits_{i=1}^{n}E_i$,定义为:

$$E_1\times E_2\times\cdots\times E_n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1\in E_1,x_2\in E_2,\cdots,x_n\in E_n\}$$

这里$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为 ***n* 元组**. 对每一个自然数 $i(1\leqslant i\leqslant n)$,$x_i$ 称为$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的第 i 投影.

- 设$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in E_1\times E_2\times\cdots\times E_n$,我们定义:$(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$当且仅当 $x_1=y_1,x_2=y_2,\cdots,x_n=y_n$.

设$\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$是以 Λ 为指标集的指标集合的族.

- E_λ 的**并**,记为$\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}E_\lambda$ 是如下定义的集合:

$$(\forall x)(x\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}E_\lambda)\Leftrightarrow\exists\lambda\in\Lambda\mid x\in E_\lambda \text{ 或}\bigcup_{\lambda\in\Lambda}E_\lambda=\{x\mid\exists\lambda\in\Lambda,x\in E_\lambda\}$$

- E_λ 的**交**,记为$\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}E_\lambda$ 是如下定义的集合:

$$(\forall x)(x\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda}E_\lambda)\Leftrightarrow\forall\lambda\in\Lambda\mid x\in E_\lambda \text{ 或}\bigcap E_\lambda=\{x\mid\forall\lambda\in\Lambda,x\in E_\lambda\}$$

▲ 性质

- 对集合 E、F、G 有:

$\varnothing\subset E,\varnothing\cup E=E,\varnothing\cap E=\varnothing$. $E\cup F=F\cup E$. $E\cap F=F\cap E$.

$(E\cup F)\cup G=E\cup(F\cup G)$. $(E\cap F)\cap G=E\cap(F\cap G)$.

$E\cap(F\cup G)=(E\cap F)\cup(E\cap G)$. $E\cup(F\cap G)=(E\cup F)\cap(E\cup G)$.

- **Morgan 公式**:若 $E\subset X,F\subset X$,则

$$X-(E\cup F)=(X-E)\cap(X-F)$$
$$X-(E\cap F)=(X-E)\cup(X-F).$$

若$\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$是一集合族,且$\forall\lambda\in\Lambda,E_\lambda\subset X$,则

$$X-\bigcup_{\lambda\in\Lambda}E_\lambda=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(X-E_\lambda)$$
$$X-\bigcap_{\lambda\in\Lambda}E_\lambda=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(X-E_\lambda).$$

3. 关系

▲ 定义

- 元素为对的集合 $\mathscr{R}$ 称为一个**二元关系**或**关系**. $(x,y)\in\mathscr{R}$ 记为 $x\mathscr{R}y$ 并读作"x 与 y 具有关系 $\mathscr{R}$".
- 设 $\mathscr{R}$ 是一个关系. 令:
$$\mathrm{Dom}(\mathscr{R})=\{x\mid\exists\ y,(x,y)\in\mathscr{R}\}$$
$$\mathrm{Ima}(\mathscr{R})=\{y\mid\exists\ x,(x,y)\in\mathscr{R}\}$$
集合 $\mathrm{Dom}(\mathscr{R})$ 称为关系 $\mathscr{R}$ 的**定义域**;集合 $\mathrm{Ima}(\mathscr{R})$ 称为关系 $\mathscr{R}$ 的**值域**. 因此,有:
$$\mathrm{Dom}(\mathscr{R})=\mathrm{Pr}_1(\mathscr{R}),\quad \mathrm{Ima}(\mathscr{R})=\mathrm{Pr}_2(\mathscr{R})$$
$$\mathscr{R}\subset\mathrm{Dom}(\mathscr{R})\times\mathrm{Ima}(\mathscr{R})$$
- 若 $\mathrm{Dom}(\mathscr{R})=E,\mathrm{Ima}(\mathscr{R})=F$,则称 $\mathscr{R}$ 是**从 E 到 F 中**的一个关系. 若 $\mathscr{R}$ 是从 E 到 E 中的关系,则称 $\mathscr{R}$ 是**在 E 上**的关系.
- 设 $\mathscr{R},\mathscr{T}$ 是两个关系. 令
$$\mathscr{R}^{-1}=\{(x,y)\mid(y,x)\in\mathscr{R}\}.\ \mathscr{R}\circ\mathscr{T}=\{(x,y)\mid\exists\ z,(x,z)\in\mathscr{T},(z,y)\in\mathscr{R}\}.$$
关系 $\mathscr{R}^{-1}$ 称为 $\mathscr{R}$ 的**逆关系**,而关系 $\mathscr{R}\circ\mathscr{T}$ 称为 $\mathscr{R}$ 与 $\mathscr{T}$ 的**复合关系**. 显然,若 $\mathscr{R},\mathscr{T},\mathscr{K}$ 是三个关系,则
$$(\mathscr{R}^{-1})^{-1}=\mathscr{R},(\mathscr{R}\circ\mathscr{T})\circ(\mathscr{K})=\mathscr{R}\circ(\mathscr{T}\circ\mathscr{K})$$
- 设 E 是一非空集,$\mathscr{R}$ 是 E 上的一个关系,我们称 $\mathscr{R}$ 是 E 上的一个**等价关系**. 当且仅当下述性质成立:
  (1) $\forall\ x\in E,x\mathscr{R}x.$　　(自反性)
  (2) $\forall\ x\in E,\forall\ y\in E,x\mathscr{R}y=y\mathscr{R}x.$　　(对称性)
  (3) $\forall\ x\in E,\forall\ y\in E,\forall\ z\in E,x\mathscr{R}y,y\mathscr{R}z\Rightarrow x\mathscr{R}z.$　　(传递性)
- 设 $\mathscr{R}$ 是 E 上的一等价关系. $\forall\ x\in E$,集合 $\{y\mid y\in E$ 且 $x\mathscr{R}y\}$ 称为 x 的**模 $\mathscr{R}$ 等价类**,记为 $\tilde{x}_{\mathscr{R}},\tilde{x}$ 或 $x\ \mathrm{mod}(\mathscr{R})$. 因此
$$\tilde{x}_{\mathscr{R}}=\tilde{x}=x\ \mathrm{mod}(\mathscr{R})=\{y\mid y\in E,x\mathscr{R}y\}.$$
E 的等价类的集合称为 E 关于等价关系 $\mathscr{R}$ 的**商集**,记为 $E/\mathscr{R}$.
- 商集 $E/\mathscr{R}$ 具有下列性质:
  (1) $\forall\ \tilde{x}\in E/\mathscr{R},\tilde{x}\neq\varnothing.$
  (2) $\forall\ \tilde{x}\in E/\mathscr{R},\forall\ \tilde{y}\in E/\mathscr{R},\tilde{x}\neq\tilde{y}\Leftrightarrow\tilde{x}\cap\tilde{y}\neq\varnothing.$
  (3) $\bigcup_{\tilde{x}\in E/\mathscr{R}}\tilde{x}=E.$
因此说 $E/\mathscr{R}$ 形成 E 的一个**分割**.
- 设 $\mathscr{R}$ 是 E 上的一关系. $\mathscr{R}$ 称为**序关系**,当且仅当下述性质成立:
  (1) $\forall\ x\in E,x\mathscr{R}x.$　　(自反性)
  (2) $\forall\ x\in E,\forall\ y\in E,x\mathscr{R}y,y\mathscr{R}x\Rightarrow x=y.$　　(反对称性)

(3) $\forall\ x\in E,\forall\ y\in E,\forall\ z\in E, x\mathscr{R}y, y\mathscr{R}z\Rightarrow x\mathscr{R}z.$　　(传递性)

- 赋予了一个序关系 $\mathscr{R}$ 的集合 E 称为 $\mathscr{R}$ **有序集**.
- 在 E 上的一个 $\mathscr{R}$ 有序集称为**完全的**(或**完全有序的**),当且仅当:
$$\forall\ x\in E,\forall\ y\in E\Rightarrow x\mathscr{R}y \text{ 或 } y\mathscr{R}x$$
一个序关系 $\mathscr{R}$ 称为**偏序的**,当且仅当它不是完全的.
- 一般我们用符号≤表示在 E 上的序关系 $\mathscr{R}$. 因此 $(E,\leqslant)$ 表示一个有序集.
- 设 $(E,\leqslant)$ 是一有序集,$\mu\in E$ 是一元素.

(1) μ 称为 E 的**较小元素**或**极小元素**(**较大元素**或**极大元素**),当且仅当:
$$\forall\ x\in E,\mu\leqslant x(\forall\ x\in E, x\leqslant\mu)$$
(2) μ 称为 E 的**最小元素**(**最大元素**),当且仅当:
$$\forall\ x\in E, x\leqslant\mu\Rightarrow x=\mu(\forall\ x\in E, x\geqslant\mu\Rightarrow x=\mu)$$

附注:

(1) 任一极大(极小)元素也是最大(最小)元素,但反之则不然.
(2) 在完全有序集中,极大与最大元素概念(极小与最小元素概念)是一致的.
(3) 在偏序集中,可能有多个不同的最大(最小)元素.

4. 映射

▲ 定义

- 设 f 是一关系. $\mathrm{Dom}(f)=E,\mathrm{Ima}(f)=F$. 我们称 f 是一**函数关系**或一**映射**,记为 $f:E\to F$,当且仅当下述性质成立:
$$\forall\ x\in E, xfy_1, xfy_2\Rightarrow y_1=y_2.$$
- 设 $f:E\to F$ 是一映射.

(1) 若 $f(E)=\mathrm{Ima}(f)=F$,则称 f 是**全射**.
(2) 若 $\forall\ f\in f(E)$,集合 $f^{-1}(y)=\{x\mid x\in E, xfy\}$ 是元素 x 的单点集,则称 f 是**单射**.
(3) 若 f 既是单射又是全射,则称 f 是**单全射**.

- 设 $f:E\to F$ 是一映射. 我们称 f 是**可逆的**,当且仅当 f 是全射并且 f 的逆关系 f^{-1} 是一映射,如果是这样,则 f^{-1} 称为 f 的**逆映射**. 因此 f^{-1} 是从 F 到 E 上的映射.
- 设 $f:E\to F$ 是一映射,$A\subset E$ 是一非空集合. 令:
$$g=\{(x,y)\mid x\in A, xfy\}$$
显然,g 是从 A 到 F 中的一映射. 映射 $g:A\to F$ 称为 **f 在 A 上的限制**,记为 $f|A$.
- 设 E,F 是两个集合,$A\subset E$ 是一非空集合,$f:A\to F$ 是一映射. 任一映射 $h:E\to F$ 使得 $h|A=f$ 称为 **f 到 E 上的延拓**.
- 设 $f:E\to F, g:F\to G$ 是两个映射;那么复合关系 $g\circ f$ 是从 E 到 G 中的映射,称为 f 与 g 的**复合映射**.
- 映射的标准分解.

设 $f: E \to F$ 是一映射．我们定义 E 上的关系 $\mathscr{R}$ 如下：

$$\forall\, x \in E, \forall\, y \in E, x \mathscr{R} y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

则 $\mathscr{R}$ 是 E 上的一个等价关系．设：

$i: f(E) \to F$ 是标准内射：$\forall\, y \in f(E), i(y) = y$.

$\varphi: E \to E/\mathscr{R}$ 是标准投影：$\forall\, x \in E, \varphi(x) = \tilde{x}$.

则存在一个、并且惟一的一个单全射 $\tilde{f}: E/\mathscr{R} \to f(E)$ 使得：

$$f = i \circ \tilde{f} \circ \varphi$$

分解 $f = i \circ \tilde{f} \circ \varphi$ 称为 f 的**标准因子分解**．于是下述图式可交换：

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & F \\
E/\mathscr{R} \arrow[r, "\tilde{f}"'] & f(E) \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

▲　**定理**

定理 1.　设 $f: E \to F$ 是一映射，下述条件是等价的：

(1) f 是单射；

(2) $\forall\, x \in E, \forall\, x' \in E, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$；

(3) $\forall\, x \in E, \forall\, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

定理 2.　设 $f: E \to F, g: F \to G$ 是两个映射．

(1) 若 $g \circ f$ 是单射，则 f 是单射．

(2) 若 $g \circ f$ 是全射，则 g 是全射．

定理 3.　设 $f: E \to F, g: F \to G$ 是两个映射．

(1) 若 $g \circ f = \mathrm{id}_E$，则 f 是单射，g 是全射．

(2) 若 $g \circ f = \mathrm{id}_E, f \circ g = \mathrm{id}_F$，则 f, g 是单全射，并且 $f^{-1} = g, g^{-1} = f$.

5. 可数集合

▲　**定义**

设 E 是任一集合．

- E 是**有限的**，当且仅当 $E = \varnothing$ 或存在 $n \in \mathbb{N}^*$ 及单全射 $f: \{1, 2, \cdots, n\} \to E$.
- E 是**无限的**，当且仅当 E 不是有限的．
- E 是**无限可数的**，当且仅当存在一单全射 $f: \mathbb{N} \to E$.
- E 是**可数的**，当且仅当 E 是有限的或无限可数的．
- E 是**不可数的**，当且仅当 E 不是可数的．

▲　**定理**

定理 4.　设 E 是一非空集合，为了使 E 是可数的，必须而且只需存在一全射 $f: \mathbb{N} \to E$.

定理 5.　下述结论是成立的：

(1) 若 E 是可数的，则 E 的任一部分是可数的．

(2) 若 $E_n(n\in\mathbb{N})$ 是可数的，则 $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}E_n$ 与 $\bigcup\limits_{n=1}^{m}E_n$ 都是可数的．

(3) 若 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 是可数的，则 $E_1\times E_2\times\cdots\times E_n$ 是可数的．

Ⅱ 习题单列

1. 设 X 是一非空集合，$A,B,C,D\subset X$ 都是非空子集．

1) 证明 $A-B=A\cap B^C$.

2) 利用 1)的关系式，证明：

i) $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$.

ii) $A-(B\cup C)=(A-B)-C$.

iii) $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$.

iv) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$.

v) $(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)$.

3) 指出使 $(A-B)\cup C=A-(B-C)$ 成立的充要条件．

2. 设 $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一非空集合族．

1) 令 $A_0=E_0,A_1=E_1-E_0,\cdots,A_n=E_n-\bigcup\limits_{k=1}^{n-1}E_k(\forall\ n\in\mathbb{N})$，证明：

$A_n\cap A_m=\varnothing(n\neq m)$ 且 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k=\bigcup\limits_{k=1}^{n}E_k(\forall\ n\in\mathbb{N})$.

2) 证明：$\forall\ n\in\mathbb{N}$.

$$E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_n=(E_1-E_2)\cup\cdots(E_{n-1}-E_n)\cup(E_n-E_1)\cup(\bigcap_{k=1}^{n}E_k).$$

3) 若 $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是下降的，即 $\forall\ n\in\mathbb{N}$，$E_{n+1}\subset E_n$，证明：

$(E_n-E_{n+1})\cap(E_m-E_{m+1})=\varnothing\quad(\forall\ n,m\in\mathbb{N}$ 且 $n\neq m)$.

$E_1=(E_1-E_2)\cup(E_2-E_3)\cup\cdots\cup(E_n-E_{n+1})\cup\cdots\cup(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}E_n)$.

3. 设 A,B,C 是三个非空集合．我们记 $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$，并称为 A 与 B 的对称差．证明：

1) $A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$.

2) $A\Delta(A\cap B)=A-B$.

3) $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$.

4) $A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$.

5) $A\Delta B\Delta(A\cap B)=A\cup B$.

4. 设 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 是两个关系，证明：

1) $(\mathscr{A}^{-1})^{-1}=\mathscr{A}$.

2) $(\mathscr{A}\cup\mathscr{B})^{-1}=\mathscr{A}^{-1}\cup\mathscr{B}^{-1}$.

3) $(\mathscr{A}\cap\mathscr{B})^{-1}=\mathscr{A}^{-1}\cap\mathscr{B}^{-1}$.

4) $(\mathscr{A}\circ\mathscr{B})^{-1}=\mathscr{B}^{-1}\circ\mathscr{A}^{-1}$.

5. 设 E 是一无限集．$\mathscr{P}(E)$ 是 E 的所有子集的集合，而 $\Omega(E)\subset\mathscr{P}(E)$ 是如下定义的子集：

$$\Omega(E)=\{A\in\mathscr{P}(E)\mid E-A\text{ 是有限子集}\},$$

我们定义 $\mathscr{P}(E)$ 上的关系 $\mathscr{R}$ 为：

$$\forall\ X,Y\in\mathscr{P}(E),X\mathscr{R}Y\Leftrightarrow\exists\ A\in\Omega(E)\text{使得}X\cap A=Y\cap A.$$

1) 证明 $\mathscr{R}$ 是 $\mathscr{P}(E)$ 上的等价关系.

2) 证明:$\forall\ X,Y\in\mathscr{P}(E),X\mathscr{R}Y\Leftrightarrow X\Delta Y$ 是有限子集.

6. 设 E 是一非空集合,A 是 E 的一子集,$\mathscr{P}(E)$ 上的关系 $\mathscr{R}$ 定义如下:

$$\forall\ X,Y\in\mathscr{P}(E),X\mathscr{R}Y\Leftrightarrow X\cup A=Y\cup A.$$

我们考虑如下定义的映射 $f:\mathscr{P}(E)\to\mathscr{P}(E-A)$:

$$\forall\ X\in\mathscr{P}(E),f(X)=X\cap(E-A).$$

1) 证明 f 在所有的等价类上是常数.

2) 写出 f 的标准分解.

7. 设 E,F 是两个非空集合,分别赋予了等价关系 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$. 我们定义 $E\times F$ 上的关系 $\mathscr{R}$ 如下:

$\forall\ (x,y),(x',y')\in E\times F,(x,y)\mathscr{R}(x',y')\Leftrightarrow x\mathscr{A}x'$ 且 $y\mathscr{B}y'$.

1) 证明 $\mathscr{R}$ 是一等价关系.

2) 证明存在一个自然的单全射 $f:(E\times F)/\mathscr{R}\to(E/\mathscr{A})\times(F/\mathscr{B})$.

8. 设 E 是一非空集合. $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 是 E 上的两个等价关系. 我们称 $\mathscr{B}$ 比 $\mathscr{A}$ 细,当且仅当 $(\forall\ x\in E),(\forall\ y\in E),x\mathscr{B}y\Rightarrow x\mathscr{A}y$. 我们考虑这样两个等价关系 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 使得 $\mathscr{B}$ 比 $\mathscr{A}$ 细.

1) 验证任一 $\bmod(\mathscr{B})$等价类被包含在惟一的一个 $\bmod(\mathscr{A})$中.

2) 设 $f:E/\mathscr{B}\to E/A$ 是一映射,定义为:

$$\forall\ X\in E/\mathscr{B},f(X)=Z\bmod(\mathscr{A})\text{这里}X\in Z.$$

验证 f 是全射.

3) 设 $\mathscr{R}$ 是 $E/\mathscr{B}$ 上由 f 如下定义的等价关系:

$$\forall\ X,Y\in E/\mathscr{B},X\mathscr{R}Y\Leftrightarrow f(X)=f(Y).$$

由 2)推出商集$(E/\mathscr{B})/\mathscr{R}$ 与 $E/\mathscr{A}$ 之间的一个自然单全射.

9. 设 E 与 F 是两个非空集合. 我们考虑所有(X,f)的集合 $\Phi_{E,F}$,这里 $X\subset E,f:X\to F$ 是一映射. 在 $\Phi_{E,F}$上我们定义关系$\leqslant$如下:

$$\forall\ (X,f),(Y,g)\in\Phi_{E,F},(X,f)\leqslant(Y,g)\Leftrightarrow X\subset Y,g|_X=f.$$

1) 证明$\leqslant$是 $\Phi_{E,F}$上的一个序关系.

2) 它的最大元素是哪些?

10. 设$(E,\leqslant)$是一有序集,$A,B\subset E$ 是两个子集. 我们说(A,B)形成$(E,\leqslant)$的一个划分,当且仅当 $A\cup B=E,A\cap B=\varnothing$并且$\forall\ x\in A,\forall\ y\in B,x<y$. 证明:若$(A,B)$与$(C,D)$是$(E,\leqslant)$的两个划分,则 $A\subset C$ 或 $C\subset A$.

11. 设 E 是一非空集合. $\Omega\subset\mathscr{P}(E)$且 $E\in\Omega$. 设 $p\subset E$. 在 $\mathscr{P}(E)$上赋予由包含定义的序关系,并且令 $\Omega_p=\{A\in\Omega\mid p\subset A\}$.

1) 证明 Ω_p 有一个且只有一个关于包含关系的下确界,记为 $\hat{p}$.($\hat{p}$ 称为 Ω_p 的关于包含关系的下确界,当且仅当 $\hat{p}\in\mathscr{P}(E)$并且$\forall\ A\in\Omega_p,\hat{p}\subset A$;其次若 $B\in\mathscr{P}(E)$使得 $\forall\ A\in\Omega_p,B\subset A$,则 $B\subset\hat{p}$.)

2) 证明若 $p\in\Omega$,则 $\hat{p}=p$.

3) 证明$\forall\ p\in\mathscr{P}(E),\hat{\hat{p}}=\hat{p}$.

12. 设 E 是一非空集合．$f:E\to E$ 是一映射，$A\subset E$ 是一非空子集．我们说 A 是关于 f 不变的，当且仅当 $f(A)=A$．我们定义 $B\subset E$ 如下：

$B=\{x\in E\mid\exists\ x_n\in E(n\in\mathbb{N})$ 使得 $x=x_1,x_n=f(x_{n-1})\}$，

证明 B 是 $\mathscr{P}(E)$ 上对包含关系是关于 f 不变的最大子集．

13. 设有集合 E 的一子集族，以乘积 $I\times J$ 的元素为其指标，A_{ij} 是 E 的非空子集，这里 $(i,j)\in I\times J$．设 $f:I\to J$ 是一映射并且 $\mathscr{F}$ 是所有这样的映射的族．

1) 试比较 $\bigcap\limits_{i\in I}(\bigcup\limits_{j\in J}A_{ij})$ 与 $\bigcup\limits_{j\in J}(\bigcap\limits_{i\in I}A_{ij})$．

2) 证明 $\bigcap\limits_{i\in I}(\bigcup\limits_{j\in J}A_{ij})=\bigcup\limits_{f\in\mathscr{F}}(\bigcap\limits_{i\in I}A_{if(i)})$．

14. 设 $f:X\to Y$ 是一映射．证明下列性质是等价的：

1) f 是单射．

2) 对任一子集 $A\subset X$，$f^{-1}(f(A))=A$．

3) 对任两子集 $A,B\subset X$，$f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$．

4) 对任两子集 $A,B\subset X$，$A\cap B=\varnothing\Rightarrow f(A)\cap f(B)=\varnothing$．

5) 对任两子集 $A,B\subset X$，$B\subset A\Rightarrow f(A-B)=f(A)-f(B)$．

15. 设 A,B 是两集合．我们称 A 与 B 是等势的，当且仅当存在一单全射 $f:A\to B$．

1) 证明对任一集合 E，E 与 $\mathscr{P}(E)$ 是不等势的．

2) 证明 $]0,1[$，$[0,1]$，$]0,+\infty[$ 是互相等势的．

16. 设 E 是一非空集合，$f:E\to E$ 是一映射，证明 f 是单射，当且仅当对任意两个映射 $h,k:E\to E$，下述性质成立：

$$f\circ k=f\circ h\Rightarrow k=h.$$

17. 设 A、B、C、D 是四个非空集合．$f:A\to B$，$g:B\to C$，$h:C\to D$，$k:C\to A$ 是四个映射．

1) 证明若 $g\circ f$ 与 $h\circ g$ 都是单全射，则 f,g,h 都是单全射．

2) 证明若映射 $k\circ g\circ f$，$g\circ f\circ k$，$f\circ k\circ g$ 中或者两个是全射而第三个是单射，或者两个是单射而第三个是全射，则 f,g,k 都是单全射．

18. 设 $E\subset\mathbb{N}$ 是一无限子集．证明存在一个且只有一个严格上升的单全射 $f:\mathbb{N}\to E$．

19. 设 $\mathbb{N}$ 是自然数集合，

1) 记 $\Omega(\mathbb{N})$ 为 $\mathbb{N}$ 的所有有限子集的集合．证明 $\Omega(\mathbb{N})$ 是可数的．

2) 记 $\Phi(\mathbb{N})$ 为 $\mathbb{N}$ 的所有有限序列的集合．证明 $\Phi(\mathbb{N})$ 是可数的．

20. 设 E 是一非空集合．证明：为了使 E 是无限集，必须且只需对任一映射 $f:E\to E$，存在子集 $A\subset E$，$A\neq E$ 使得有：$f(A)\subset A$．

Ⅲ 习题解答

1. 1)、2) 从略．

3) $(A-B)\cup C=A-(B-C)\Leftrightarrow(A-B)\cup C=A-(B\cap C^C)$

$$\Leftrightarrow(A-B)\cup C=(A-B)\cup(A-C^C)$$

$$\Leftrightarrow(A-B)\cup C=(A-B)\cup(A\cap C).$$

- 若 $C\subset A$，则 $A\cap C=C$，因此 $(A-B)\cup C=(A-B)\cup(A\cap C)$ 即

$$(A-B)\cup C=A-(B-C).$$

- 若 $C\not\subset A$，则 $A\cap C\subset C$ 且 $A\cap C\neq C$，因此

$(A-B)\cup(A\cap C)\subset(A-B)\cup C$ 且 $(A-B)\cup(A\cap C)\neq(A-B)\cup C$，

故使 $(A-B)\cup C=A-(B-C)$ 成立的一个充要条件是 $C\subset A$.

2. 1) 设 $n,m\in\mathbb{N}$ 且 $m>n$，由于 $E_n\subset\bigcup\limits_{k=1}^{m-1}E_k$，故

$$A_n\cap A_m=\Big(E_n-\bigcup_{k=1}^{n-1}E_k\Big)\cap\Big(E_m-\bigcup_{k=1}^{m-1}E_k\Big)^{k=1}\subset E_n\cap\Big(E_m-\bigcup_{k=1}^{m-1}E_k\Big)=\varnothing.$$

其次，$\forall\ n\in\mathbb{N}$，

$$\bigcup_{k=1}^{n}A_k=E_1\cup(E_2-E_1)\cup(E_3-E_1\cup E_2)\cup\cdots\cup\Big(E_n-\bigcup_{k=1}^{n-1}E_k\Big)\subset\bigcup_{k=1}^{n}E_k,$$

反之，设 $x\in\bigcup\limits_{k=1}^{n}E_k$. 则存在 $k\in[\![1,n]\!]$ 使得 $x\in E_k$. 令 $l=\min\{k\mid x\in E_k\}$，那么 $l\in[\![1,n]\!]$ 并且 $x\in E_l$，但 $x\notin E_i$，$i<l$（若 $l>0$）. 因此 $x\in E_l-\bigcup\limits_{k=1}^{l-1}E_k$，即 $x\in A_l$ 从而 $x\in\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$. 换言之，$\bigcup\limits_{k=1}^{n}E_k\subset\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$.

2) 显然 $\forall\ n\in\mathbb{N}$ 有

$$(E_1-E_2)\cup(E_2-E_3)\cup\cdots\cup(E_{n-1}-E_n)\cup(E_n-E_1)\cup\Big(\bigcap_{k=1}^{n}E_k\Big)\subset\bigcup_{k=1}^{n}E_k,$$

反之，设 $x\in\bigcup\limits_{k=1}^{n}E_k$. 若 $\forall\ k\in[\![1,n]\!]$，$x\in E_k$，则 $x\in\bigcap\limits_{k=1}^{n}E_k$，否则存在 $k\in[\![1,n]\!]$ 使得 $x\notin E_k$. 另一方面，由于 $\exists\ m\in[\![1,n]\!]$ 使得 $x\in E_m$，故 $\exists\ l\in[\![1,n]\!]$ 使得 $x\in E_l-E_{l+1}$，这里当 $l=n$ 时，$E_{n+1}=E_1$. 因此

$$\bigcup_{k=1}^{n}E_k\subset\bigcup_{k=1}^{n-1}(E_k-E_{k+1})\cup(E_n-E_1)\cup\Big(\bigcap_{k=1}^{n}E_k\Big).$$

3) 显然当 $n\neq m$ 时，$(E_n-E_{n+1})\cap(E_m-E_{m+1})=\varnothing$. 由于 $E_{n+1}\subset E_n$，故只需证明 $E_1\subset\Big(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}(E_n-E_{n+1})\Big)\cup\Big(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}E_n\Big)$.

若 $x\in\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}E_n$，则结论成立；若 $x\notin\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}E_n$，则存在 $n_0\in\mathbb{N}$ 使得 $x\notin E_{n_0}$. 于是存在 $l\in[\![1,n-1]\!]$，使得 $x\in E_l-E_{l+1}$.

3. 1) $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)=(A\cap B^C)\cup(B\cap A^C)=(A\cup B)\cap(A^C\cup B^C)$

$$=(A\cup B)\cap(A\cap B)^C=(A\cup B)-(A\cap B).$$

2) $A\Delta(A\cap B)=(A-A\cap B)\cup(A\cap B-B)=A-B.$

3) $A\cap(B\Delta C)=A\cap(B\cup C-B\cap C)=A\cap(B\cup C)-A\cap B\cap C$

$$=(A\cap B)\cup(A\cap C)-(A\cap B)\cap(A\cap C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C).$$

4) $A\Delta(B\Delta C)=A\cup(B\Delta C)-A\cap(B\Delta C)=A\cup(B\Delta C)-(A\cap B)\Delta(A\cap C)$

$$=A\cup(B\cup C-B\cap C)-[(A\cap B)\cup(A\cap C)-A\cap B\cap C]$$

$$=(A\cup B\cup C-B\cap C)\cup(A\cap B\cap C)-[(A\cap B)\cup(A\cap C)-A\cap B\cap C].$$

$(A\Delta B)\Delta C=(A\Delta B)\cup C-(A\Delta B)\cap C=(A\Delta B)\cup C-(A\cap C)\Delta(B\cap C)$

$$=(A\cup B-A\cap B)\cup C-[(A\cap C)\cup(B\cap C)-A\cap B\cap C]$$
$$=(A\cup B\cup C-A\cap B)\cup(A\cap B\cap C)-[(A\cap C)\cup(B\cap C)-A\cap B\cap C].$$

由于

$$\begin{aligned}&(A\cup B\cup C-B\cap C)\cup(A\cap B\cap C)-[(A\cap B)\cup(A\cap C)-A\cap B\cap C]\\&=[(A\cup B\cup C-B\cap C)\cup(A\cap B\cap C)-((A\cap B)\cup(A\cap C))]\cup[((A\cup B\cup C-B\cap C)\cup(A\cap B\cap C))\cap(A\cap B\cap C)]\\&=[A\cup B\cup C-B\cap C-((A\cap B)\cup(A\cap C))]\cup[A\cap B\cap C-((A\cap B)\cap(A\cap C))]\cup[((A\cup B\cup C)-B\cap C)\cap(A\cap B\cap C)]\cup(A\cap B\cap C)\\&=[A\cup B\cup C-((B\cap C)\cup(A\cap B)\cup(A\cap C))]\cup(A\cap B\cap C).\end{aligned}$$

同理可证，我们有：

$$\begin{aligned}&(A\cup B\cup C-A\cap B)\cup(A\cap B\cap C)-[(A\cap C)\cup(B\cap C)-A\cap B\cap C]\\&=[A\cup B\cup C-((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C))]\cup(A\cap B\cap C).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}A\Delta(B\Delta C)&=(A\Delta B)\Delta C\\&=[A\cup B\cup C-((A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A))]\cup(A\cap B\cap C).\end{aligned}$$

5) $A\Delta B\Delta(A\cap B)=(A\Delta B)\Delta(A\cap B)=(A\cup B-A\cap B)\Delta(A\cap B)$
$$=[(A\cup B-A\cap B)\cup(A\cap B)]-[(A\cup B-A\cap B)\cap(A\cap B)]$$
$$=A\cup B-\varnothing=A\cup B.$$

4. 1) $(\mathscr{A}^{-1})^{-1}=\{(x,y)\mid y\mathscr{A}^{-1}x\}=\{(x,y)\mid x\mathscr{A}y\}=\mathscr{A}.$

2) $(\mathscr{A}\cup\mathscr{B})^{-1}=\{(x,y)\mid y(\mathscr{A}\cup\mathscr{B})x\}=\{(x,y)\mid y\mathscr{A}x$ 或 $y\mathscr{B}x\}$
$$=\{(x,y)\mid y\mathscr{A}x\}\cup\{(x,y)\mid y\mathscr{B}x\}$$
$$=\{(x,y)\mid x\mathscr{A}^{-1}y\}\cup\{(x,y)\mid x\mathscr{B}^{-1}y\}$$
$$=\mathscr{A}^{-1}\cup\mathscr{B}^{-1}.$$

3) $(\mathscr{A}\cap\mathscr{B})^{-1}=\{(x,y)\mid y(\mathscr{A}\cap\mathscr{B})x\}=\{(x,y)\mid y\mathscr{A}x$ 且 $y\mathscr{B}x\}$
$$=\{(x,y)\mid y\mathscr{A}x\}\cap\{(x,y)\mid y\mathscr{B}x\}$$
$$=\{(x,y)\mid x\mathscr{A}^{-1}y\}\cap\{(x,y)\mid x\mathscr{B}^{-1}y\}$$
$$=\mathscr{A}^{-1}\cap\mathscr{B}^{-1}.$$

4) $(\mathscr{A}\circ\mathscr{B})^{-1}=\{(x,y)\mid y(\mathscr{A}\circ\mathscr{B})x\}=\{(x,y)\mid\exists\, z$ 使得 $y\mathscr{B}z,z\mathscr{A}x\}$
$$=\{(x,y)\mid\exists\, z\text{ 使得 }x\mathscr{A}^{-1}z,z\mathscr{B}^{-1}y\}$$
$$=\mathscr{B}^{-1}\circ\mathscr{A}^{-1}.$$

5. 1) 自反性：$\forall\, X\in\mathscr{P}(E)$，$\exists\, E\in\Omega(E)$使得$X\cap E=X\cap E$，故$X\mathscr{R}X$.

对称性：$\forall\, X,Y\in\mathscr{P}(E)$，$X\mathscr{R}Y\Rightarrow\exists\, A\in\Omega(E)$使得$X\cap A=Y\cap A\Rightarrow Y\mathscr{R}X$.

传递性：$\forall\, X,Y,Z\in\mathscr{P}(E)$，$X\mathscr{R}Y$，$Y\mathscr{R}Z$，于是$\exists\, A,B\in\Omega(E)$

使得
$$X\cap A=Y\cap A,Y\cap B=Z\cap B,$$
由此得
$$X\cap(A\cap B)=Z\cap(A\cap B).$$
由于$E-(A\cap B)=(E-A)\cup(E-B)$为有限集，故$A\cap B\in\Omega(E)$，从而$X\mathscr{R}Z$. 因此$\mathscr{R}$是$\mathscr{P}(E)$上的一个等价关系.

2) 设$X,Y\in\mathscr{P}(E)$且$X\mathscr{R}Y$. 那么$\exists\, A\in\Omega(E)$使得$X\cap A=Y\cap A$. 因此
$$E-X\cap A=E-Y\cap A\text{ 或}(E-X)\cup(E-A)=(E-Y)\cup(E-A).$$