山东科学技术出版社

GONGCHENG
YINGYONG SHU XUE

工程应用数学

工程应用数学

宋 俐 陈 严
孙 勇 张忠义 译编

山东科学技术出版社
一九八八年·济南

工程应用数学

朱 俐　陈 严
孙 勇　张忠义　译编

*

山东科学技术出版社出版
（济南市玉函路）
山东省新华书店发行
山东新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本　19印张　340千字
1988年7月第1版　1988年7月第1次印刷
印数：1—2000

ISBN 7—5331—0255—X/O·23

定价 4.90 元

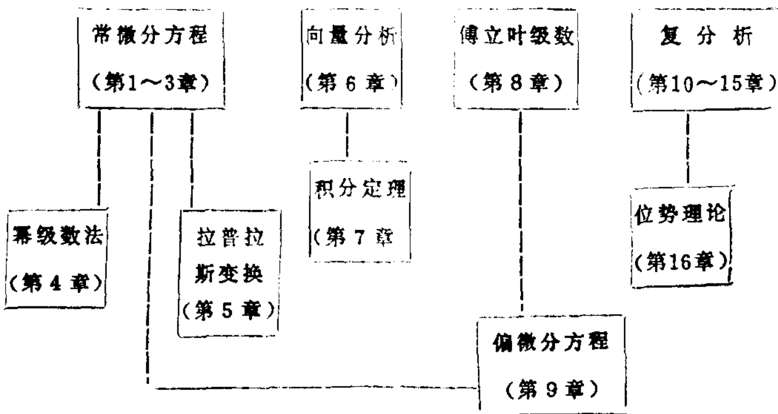
前　言

工程数学的发展，对各应用学科产生了日益广泛的影响，对经济建设的指导作用亦愈来愈大。现代的工程问题已不可能仅凭过去的经验来解决，因为经验的方法往往在高速度、大作用力、高温等反常条件下就会失败或束手无策。而数学工具却能在部署实验结构，估计实验数据，减少工作量，降低费用等方面提供有效的帮助。此外，不少纯理论的数学方法也在工程数学中迅速地得到应用，如共形映像和具有周期解的微分方程理论等。这些事实说明，工程技术人员需要掌握越来越多的数学知识，这便是本书编写的意图和目的。

数学对工程问题的应用，实质上由三个方面组成：第一，把已给的物理信息转化为数学形式，得到一个数学模型，这个模型可以是一个微分方程，一个线性方程组，或者是其他的数学表达式。第二，用数学方法处理这个模型，得到给定问题的数学形式的解。第三，用工程或物理术语解释这个数学形式的解。这三个步骤是同等重要的，我们在叙述上特别注意了帮助读者掌握这些步骤的技巧。

在上述原则的指导下，我们主要参照了〔美〕*ADVANCED ENGINEERING MATHEMATICS* 一书，并结合了我国的实际情况，挑选了现在的内容。在叙述各个课题及有关概念时尽力做到简洁和精确，各章尽可能保持相互

独立，在各章中注意到循序渐进和分散难点，既有简单的常规练习题，又有比较复杂的实际应用题。本书主要内容的安排如下图所示：



由此可以看出，本书大部分篇幅用于常微分方程、向量分析和复分析，这对于工程技术人员来说，大概是最重要的数学领域了。为了避免篇幅过长，我们集中注意了那些具有普遍实际价值又能训练数学思想的基本概念和方法。尽管很难预料今后究竟哪些新的数学成果将会在工程学上发生重大影响，但不论发生什么情况，只要在数学基础上具有良好的训练，那么他总有能力通过进一步地学习，掌握新的知识和技能。由此可见，在工程数学这门课程中，最重要的主题和目的是掌握数学思想。

本书是工程技术人员进修学习的辅导读物，也是工科院校及应用数学、力学、物理学等各学科的学生和教师的教学参考书，还可供职工大学、业余大学选作教材。

本书在译编的过程中，得到山东师范大学陈玉波教授、山东大学孙经先副教授等人的亲切指导，并认真审阅了全书，我们表示衷心感谢。

由于我们水平所限，加之时间紧促，错误之处，恳请读者批评指正。

编　者

1987年9月

目　录

第一章　一阶常微分方程

许多物理定律和关系在数学上都可以用微分方程的形式描述，所以微分方程在工程数学中是相当重要的。我们首先考察各种导出微分方程的物理问题与几何问题，以及求解这种方程的最重要的典型方法。

要特别注意由给定的物理状态导出微分方程，这种从物理问题到相应的数学公式的转化称为“建立模型”，这对于工程师和物理工作者来说具有很大的实际意义。

1·1 基本概念和基本思想

常微分方程是包含以x为自变量的未知函数 y 的导数的关系，这个关系也可以包含y 本身，x 的给定函数，以及某些常数。例如：

$$y'=\cos x \tag{1}$$

$$y''+4y=0 \tag{2}$$

$$x^2y'''y'+2e^xy''=(x^2+2)y^2 \tag{3}$$

都是常微分方程

常微分方程不同于偏微分方程。偏微分方程中含有两个或更多独立自变量的未知函数的偏导数，例如：

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$$

如果方程中 y 关于 x 的 n 阶导数是 y 的最高阶导数，那么，这个常微分方程是 n 阶的. 利用常微分方程阶的概念可以将方程分为一阶方程，二阶方程等类型，如（1）是一阶方程，（2）是二阶方程，（3）是三阶方程.

函数

$$y=g(x) \tag{4}$$

称为是给定的一阶方程在某个区间上的解，如果 $g(x)$ 在该区间上有定义并且可微，而且当 y 和 y' 分别用 g 和 g' 代替时，可使微分方程成为恒等式. 例如：函数 $y=g(x)=e^{2x}$ 是一阶微分方程 $y'=2y$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 上的解，因为由微分法可得：$g'=2e^{2x}$，并且将 g 和 g' 代入微分方程后可使方程成为恒等式：$2e^{2x}=2e^{2x}$.

有时微分方程的解也可以是隐函数，即隐含于方程 $G(x,y)=0$ 之中，这样的解就叫做隐式解. 例如，可以验证：$x^2+y^2=1$（$y>0$）是微分方程 $yy'=-x$ 在区间 $-1<x<1$ 上的隐式解.

微分方程理论的主要任务是求出所给微分方程的全部解，并研究这些解的性质.

通常情况下一阶微分方程可能有无穷多个解，并且这些解可以用一个包含任意常数 C 的公式来表示. 这个含有任意常数的函数通常称为是相应的一阶微分方程的一个通解. 当此常数 C 取定值时，所得的解就称为特解.

在某些情况下，一个给定的方程可能有这样的解，它们不能用指定通解中任意常数的值来得到，这样的解称为方程的奇解.

例如，方程

$$y'^2 - xy' + y = 0 \tag{5}$$

有通解$y=Cx-C^2$，它表示一族直线，每一直线相应一确定的C值，然而我们可以验证函数 $y=\frac{1}{4}x^2$ 也是方程的解。因为不能在通解中指定常数C的值来得到此解，所以它是方程（5）的一个奇解。很明显，每一特解都是奇解的曲线——抛物线的切线（图1·1）。

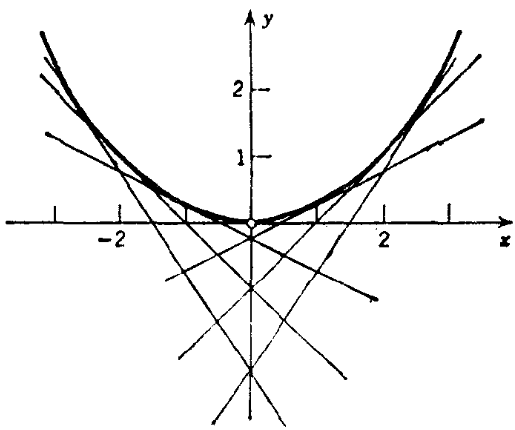


图1·1 方程(5)的奇解（抛物线）与特解

保证一个给定的微分方程有解的条件是相当广泛的，但是某些很简单的方程可能根本无解，而有一些方程无通解。例如，方程$y'^2=-1$无实解。方程$|y|+|y'|=0$无通解，因为它只有解 $y\equiv 0$。

下面考察一个简单的物理例子，用它来说明建立模型的典型步骤，即由物理状态（物理系统）导出数学公式（数学模型）的步骤，以及如何求解和对结果作物理解释。

例1（放射性物质的指数衰变）实验证明放射性物质的

衰变速度与存余量成比例．在某一确定的时刻（例如 $t=0$）给出一定数量（例如 $2g$）的物质，如何确定在以后各时刻该放射性物质的存余量？

第一步　用微分方程对物理过程作数学描述．用 $y(t)$ 表示在时刻 t 物质存余量，衰变率为 dy/dt．根据放射过程的物理定律，dy/dt 和 y 成比例，于是得

$$\frac{dy}{dt}=ky \tag{6}$$

这里 $k<0$ 是确定的物理常数，对于各种放射性物质，这个数值是已知的（例如，对于镭，$k\approx-1.4\times10^{-11}s^{-1}$）．由此可见这里所考察的物理过程在数学上可以用一阶常微分方程来表述，这个方程就是物理过程的数学模型．每当物理定律中包含物理量的变化率（例如速度、加速度等）时，都将导出微分方程．

第二步　解微分方程．虽然目前我们还没有系统地讨论如何求解常微分方程，然而，由（6）式知，若方程（6）存在一个解 $y(t)$，则它的导数与 y 成比例．回顾求导运算即知指数函数就具有这种性质，事实上，函数 e^{kt} 或更一般地

$$y(t)=Ce^{kt} \tag{7}$$

是（6）的解，这里 C 是常数．因为（7）含有一个任意常数，故它是一阶方程（6）的通解．

第三步　确定特解．显然上述物理过程有唯一的状态，因此可以期望利用已知的条件，在（7）式中确定 C，从而使所得的特解能描述这个过程的状态．假定已知在 $t=0$ 时，物质的质量为 $2g$，因为条件"$t=0$ 时 $y=2$"描述了物理过程的初始状态，所以把它称为初始条件．把条件

$$y(0)=2 \tag{8}$$

代入（7）式，得$y(0)=Ce^0=2$，即$C=2$。于是（7）式为

$$y(t)=2e^{kt} \tag{9}$$

这就是（6）的特解，它刻划了物质在任意时刻t（$t\geqslant 0$）的存余量。$y(t)$的图象如图1·2所示。

第四步　检验由（9）式得

$$\frac{dy}{dt}=2ke^{kt}=ky,$$

$$y(0)=2e^0=2$$

所以函数（9）满足方程（6）及初始条件（8）。

图1·2　放射性物质(指数衰变)

要注意到进行最后一步的重要性，它证明了函数是或不是问题的解。

下面的例 2 说明几何问题也能导出微分方程

例 2　在xy平面上求一条曲线，它过点（1,1），并且每一点的斜率为$-y/x$。显然表示这条曲线的函数必为微分方程

$$y'=-\frac{y}{x} \tag{10}$$

的解。可以验证，对任意常数C，$y=\frac{C}{x}$是（10）的解.相应的一些曲线如图1·3所示.由于要寻找的曲线通过（1,1），即当$x=1$时，$y=1$，这就得$C=1$。因此这问题的解为$y=\frac{1}{x}$。