青·年·自·学·辅·导·读·物

数学综合训练的思路·方法·技巧

翟连林 … 鑫 编著 · 地质出版社

青年自学辅导读物

数学综合训练的
思路·方法·技巧

翟连林　陈伟侯　段云鑫　编著

地质出版社

青年自学辅导读物

数学综合训练的思路·方法·技巧

翟连林　陈伟侯　段云鑫　编著

·

地质矿产部书刊编辑室编辑

责任编辑：刘品德

地质出版社出版

（北京西四）

张家口地区印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·全国新华书店经售

·

开本：787×1092　$^1/_{32}$印张$11^7/_{16}$　字数：251,000

1983年4月北京第一版·1983年4月北京第一次印刷

印数：1—135,300册　定价：1.10元

统一书号：7038·新96

前　　言

不论是在学校里进行系统学习的学生，还是走自学成才之路的青年，在学习数学的过程中，总要有选择地演算一定数量的练习题。这些题目按其难易情况和综合程度，又可以分为“双基”训练题和综合训练题。“双基”训练题大体相当于中学教科书中的练习和习题，它主要是在学习某部分内容时，为掌握这部分内容中的基础知识和重要方法所使用；综合训练题大体相当于中学教科书中的复习题和总复习题，它主要是在复习阶段使用。综合训练题一般所涉及的知识范围比较广、方法比较多，解题技巧也比较灵活。

在进行综合训练时，要注意防止两种倾向：一要防止急于求成、好高骛远、忽视基础知识的掌握和基本功的训练，一味追求“大综合”、“高难度”；二要避免把综合训练看得高不可攀，不敢去碰。

本书针对自学青年没有教师指导的情况，对解综合题的思路详加阐述，逐题分析。对重要数学方法和解题技巧进行系统地归纳和总结，以帮助自学青年和在校高中学生达到以下三个目的：

（一）深刻理解、牢固掌握、灵活运用数学概念、定理和公式；

（二）熟练使用重要的数学方法，灵活运用常用的解题技巧；

（三）沟通各部分数学知识和各种数学方法之间的联

系，掌握解综合题的一般步骤和思考方法，培养进行创造性思维的能力。

我们在本书中所涉及的知识面，以普通中学和工农业余中学的《数学教学大纲》为标准，不涉及难度较大的数学竞赛题或智力测验题。

目　录

第一章　深刻理解概念，灵活运用定理和公式 …………… 1
一、深刻理解、恰当运用概念 …………………… 1
二、牢固掌握、灵活运用定理和公式 …………… 7
第二章　熟练地使用重要数学方法和常用的解题技巧……47
一、重要数学方法……………………………………47
二、常用解题技巧……………………………………86
第三章　解综合题的步骤和思路分析 ……………… 100
一、解综合题的步骤和思路分析 ……………… 100
二、例题 ……………………………………………… 115
第四章　综合题的分类与解法分析 ………………… 134
一、单科综合题 ……………………………………… 134
二、双科综合题 ……………………………………… 187
三、三科以上综合题 ………………………………… 251
四、其它综合题 ……………………………………… 293
附录 ………………………………………………………… 309
后记 ………………………………………………………… 359

本书用下列字母表示相应的数集：

N——自然数集
Z——整数集
Q——有理数集
R——实数集
C——复数集

第一章　深刻理解概念，灵活运用定理和公式

一、深刻理解、恰当运用概念

我们知道，理解并掌握数学概念是学好数学公式、定理、方法以及提高运算能力的基础．因此，在训练中应把深刻理解、恰当运用数学概念放在重要地位。我们经常发现一些自学青年或在校学生，在学习数学的过程中，由于概念不清，在解题中出现各种各样的错误；由于不能恰当地运用定义，在解决一些问题时绕弯子，进行繁琐运算或推证。

请看下面几个例题：

例1　作出函数

$$y=\cos x\sqrt{1-\cos^2 x}+\sin x\sqrt{1-\sin^2 x}$$

的图象。

如果不注意三角函数在各象限内的符号和算术根的概念，将上式顺手写成

$$\begin{aligned}y&=\cos x\sqrt{1-\cos^2 x}+\sin x\sqrt{1-\sin^2 x}\\&=\cos x\sin x+\sin x\cos x\\&=\sin 2x\end{aligned}$$

就错了。

其正确解法是：

$$y=\cos x\sqrt{1-\cos^2 x}+\sin x\sqrt{1-\sin^2 x}$$

$= \cos x\sqrt{\sin^2 x} + \sin x\sqrt{\cos^2 x}$

$$= \begin{cases} \cos x \sin x + \sin x \cos x \\ \qquad = \sin 2x; \text{（当}x\text{是第一象限的角时）} \\ \cos x \sin x - \sin x \cos x = 0; \text{（当}x\text{是第二象限的角时）} \\ -\cos x \sin x - \sin x \cos x \\ \qquad = -\sin 2x; \text{（当}x\text{是第三象限的角时）} \\ -\cos x \sin x + \sin x \cos x = 0. \text{（当}x\text{是第四象限的角时）} \end{cases}$$

其一个周期的图象如图 1－1所示。

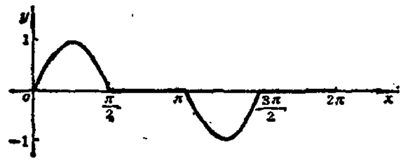

图 1-1

例2 求证：一个数列是等差数列的充要条件是其前n项和是一个以自然数n为自变量，常数项为零的二次函数。

这个题首先考查能否分清充分条件和必要条件？再者会不会证明？有的同学误认为只要把充分性的证明倒过来写就是必要性的证明，必要性的证明倒过来写就是充分性的证明，这是导致本题证明错误的根源。

本题的必要性很容易证明：

设数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，则

$$S_n = a_1 n + \frac{n(n-1)}{2}d$$
$$= \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n.$$

这是关于n的常数项为 0 的二次函数。

证充分性时，如果设

$$S_n=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$$

就错了。因为这个数列是否等差数列并非已知，还有待证明。

证明：先证必要性

设数列$\{a_n\}$是等差数列，则

$$S_n=a_1n+\frac{n(n-1)}{2}d$$

$$=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n.$$

这是常数项为0的二次函数（n为自变量）。

再证充分性

设数列$\{a_n\}$是以项数n为自变量、常数项为0的二次函数，则

$$S_n=An^2+Bn.$$

它的通项公式为

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=(An^2+Bn)-[A(n-1)^2+B(n-1)]\\&=2An+(B-A).\end{aligned}$$

$\because$

$$\begin{aligned}&a_n-a_{n-1}\\&=[2An+(B-A)]-[2A(n-1)+(B-A)]\\&=2A\text{（常数）},\end{aligned}$$

$\therefore$ 数列$\{a_n\}$是等差数列。

例3 问$\sin\theta$取何值时，方程

$$(3\sin\theta)x^2-(4\cos\theta)x+2=0$$

有两实根？

我们先看下面的解法：

$$\begin{aligned}\triangle &= (4\cos\theta)^2-4\cdot(3\sin\theta)\cdot 2\\ &=8(2\cos^2\theta-3\sin\theta)\\ &=-8(2\sin^2\theta+3\sin\theta-2).\end{aligned}$$

当$\triangle\geqslant 0$时，即$-8(2\sin^2\theta+3\sin\theta-2)\geqslant 0$时，原方程有两实根。解之，得

$$-2\leqslant\sin\theta\leqslant\frac{1}{2}.$$

此答案有两个明显错误，一是原方程要有两实根，必须为一元二次方程，也就是说二次项系数$3\sin\theta$不能为零。即$\sin\theta\neq 0$；二是$y=\sin\theta$的值域为$[-1,1]$。

因此，此题的正确答案应该是

$$\sin\theta\in[-1,\ 0)\cup(0,\ \frac{1}{2}].$$

例4 在地球表面的北纬60°圈上有两点A、B，它们的经度相差180°，求A、B两点沿纬度圈的距离是地球表面上A、B两点间最短距离的多少倍？(将地球面看成球面)。

有的同学对这个题理解不了，因为他们误认为过A、B两点在纬度圈上的弧长(一般指劣弧长，本题中恰为半圆周长)是A、B两点在球面上的最短距离，那么题中怎么问它自己是自己的多少倍呢？要正确解答本题，必须明确球面上两点间的最短球面距离，是过这两点的大圆上两点间的劣弧长。

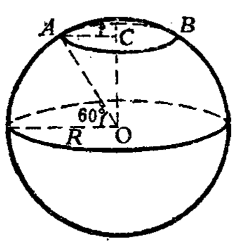

图 1-2

这个题应该这样解：如图1-2，

在$Rt\triangle OAC$中，$\angle AOC=30°$，

$$\therefore \quad r = R\sin 30° = \frac{R}{2}.$$

而过A、B的太圆上$\overset{\frown}{AB} = \frac{1}{6}\cdot 2\pi R = \frac{1}{3}\pi R$,

$$\therefore \quad \frac{\pi\cdot\frac{R}{2}}{\frac{1}{3}\pi R} = 1.5(\text{倍}).$$

即：过A、B两点沿纬度圈的距离是地球表面上A、B两点间最短距离的1.5倍.

例5 已知动圆M与定圆$x^2+y^2-4x=4$相外切，又与y轴相切，求它的圆心M的轨迹方程。

这是一个常见的求曲线的方程的问题。但能完全做对是不容易的.很多学生可能这样做：

如图1-3．设点M的坐标为(x, y)。则

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2} = x+2 \qquad ①$$

化简，得$y^2=8x$。

这里，忽略了定圆O_1在原点处与y轴相切这个条件的特殊性.应当注意，动圆M可能在y轴的左侧，也就是说，$M(x,y)$中的横坐标x可能为负值.

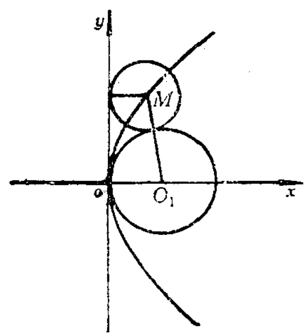

图 1-3

若x为负值，则M点的轨迹方程为

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2} = -x+2 \qquad ②$$

用绝对值概念可以把①、②统一起来，

即 $\sqrt{(x-2)^2+y^2} = |x|+2 \Longrightarrow y^2 = 4|x|+4x$.

当 $x \geqslant 0$ 时，$y^2 = 8x$；

当 $x < 0$ 时，$y = 0$。

因此，所求轨迹除了抛物线外还有负向的半条横轴。

例6 在△ABC中，已知$BC = a$，当动点 A 满足条件 $\sin C - \sin B = \frac{1}{2}\sin A$时，求动点$A$的轨迹方程。

这个题如果按照一般的方法，先设$A(x, y)$，再把x，y的坐标代入条件 $\sin C - \sin B = \frac{1}{2}\sin A$中，运算是很繁琐的。这个题目实际上是考查对于双曲线的定义是否理解深刻并能灵活运用。

如果本题用双曲线的定义去解，是非常简便的。

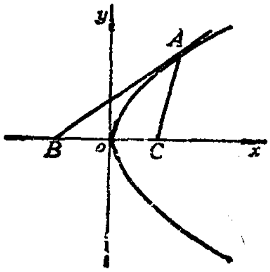

图 1-4

解：如图1-4。对于 $\sin C - \sin B = \frac{1}{2}\sin A$，利用正弦定理可得

$$\frac{AB}{2R} - \frac{AC}{2R} = \frac{1}{2}\ \frac{BC}{2R},$$

即 $\quad AB - AC = \frac{a}{2}$。

也就是说，△ABC 中，$AB - AC$ 永远等于定值$\frac{a}{2}$。根据双曲线的定义可知，A点的轨迹是双曲线的右支（除顶点），它的焦距$2c = a$。

以 BC为x轴，BC的中点为原点建立直角坐标系（如图1-4），则可设此双曲线的方程为

$$\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1,$$

则 $\quad 2m = AB - AC = \frac{a}{2} \Longrightarrow m = \frac{a}{4}$,

$$n^2 = c^2 - m^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2 = \frac{3a^2}{16},$$

∴ 动点A的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{\frac{a^2}{16}} - \frac{y^2}{\frac{3a^2}{16}} = 1 \quad \left(x > \frac{a}{4}\right).$$

二、牢固掌握、灵活运用定理和公式

对于重要的定理和公式，要通过训练达到牢固掌握、灵活运用的程度。如果忽视了定理和公式成立的条件或适用范围,在解题中就会出现各种各样的错误.请看下面几个例题：

例1 已知 $z_1 = (\sin 10° + i\cos 10°)^3$，把向量$\overrightarrow{OZ_1}$按顺时针方向旋转30°角，求所得向量$\overrightarrow{OZ_2}$所对应的复数。

在解这个题目时，某重点中学高二年级竟有三分之一的同学出现如下错误：

$$\begin{aligned} z_1 &= (\sin 10° + i\cos 10°)^3 \\ &= \sin 30° + i\cos 30°. \end{aligned}$$

这里，他们运用棣莫弗定理

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

时，忽略了这个定理对于复数的三角形式才是适用的，而$\sin 10° + i\cos 10°$不是三角形式。

其正确解法是：

$$\begin{aligned} z_1 &= (\sin 10° + i\cos 10°)^3 \\ &= (\cos 80° + i\sin 80°)^3 \end{aligned}$$

$$=\cos 240^\circ+i\sin 240^\circ.$$

$$\therefore\quad z_2=z_1\div(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)$$

$$=(\cos 240^\circ+i\sin 240^\circ)\div(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)$$

$$=\cos 210^\circ+i\sin 210^\circ$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i.$$

例2 求极限：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots\cdots+\frac{n}{n^2}\right).$$

如果对于“和的极限等于极限的和”这条法则由有限和不加分析地用到无限和上去，就要犯原则性的错误，也就是说，下面的解法是错误的：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}+\cdots\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}$$

$$=0+0+0+\cdots\cdots+0$$

$$=0.$$

其正确解法是：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots\cdots+n}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

例3 求 $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)$的极值。其中$x>0$，$y>0$，$x+y=1$。

这个题目，有的学生是这样解的：

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)=\frac{x^2+1}{x}\cdot\frac{y^2+1}{y}$$

$$=\frac{x^2y^2+x^2+y^2+1}{xy}=\frac{x^2y^2+(x+y)^2-2xy+1}{xy}$$

$$=\frac{x^2y^2+1-2xy+1}{xy}=\frac{x^2y^2-2xy+2}{xy}$$

$$=xy-2+\frac{2}{xy}.$$

又 $x>0$，$y>0$，则 $xy>0$，

$$\therefore \quad xy+\frac{2}{xy}-2\geqslant 2\sqrt{xy\cdot\frac{2}{xy}}-2=2\sqrt{2}-2.$$

于是得到$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)$的极小值是 $2\sqrt{2}-2$。

这个解法是错误的。原因是：$xy+\frac{2}{xy}\geqslant 2\sqrt{2}$中的等号成立的条件是：$xy=\frac{2}{xy}\Longrightarrow xy=\sqrt{2}$。但原题中有$x+y=1$的条件，则根据韦达定理，$x$、$y$是$z^2-z+\sqrt{2}=0$的两个根。由于此方程的$\triangle=1-4\sqrt{2}<0$，故无实数解，即$x$、$y$不能同时满足$x+y=1$和$xy=\sqrt{2}$这两个条件。

这个题的正确解法应该是：

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)=\frac{x^2y^2-2xy+2}{xy}$$

$$=\frac{1}{xy}[(xy-1)^2+1].$$

$\because$ $x>0$，$y>0$，$x+y=1$，则

$$1=x+y\geqslant 2\sqrt{xy}\Rightarrow xy\leqslant\frac{1}{4}，\therefore\ \frac{1}{xy}\geqslant 4 \qquad ①$$

$$1-xy\geqslant 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4},$$

$$(1-xy)^2\geqslant\frac{9}{16},$$

$$(xy-1)^2+1\geqslant\frac{25}{16} \qquad ②$$

①×②，得

$$\frac{1}{xy}[(xy-1)^2+1]\geqslant\frac{25}{4}=6\frac{1}{4}.$$

$\therefore$ $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)$的极小值是$6\frac{1}{4}$.

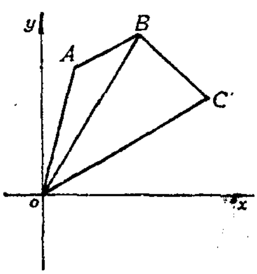

图 1-5

例4 设四边形的四个顶点为$A(1,4)$，$B(3,5)$，$C(5,3)$和$O(0,0)$，求四边形$ABCO$的面积。

如图1-5连结BO。四边形$ABCO$的面积，实际上就是$\triangle OAB$和$\triangle OCB$的面积之和。请看下面的解法：

$$S_{OABC}=S_{\triangle OAB}+S_{\triangle OCB}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\1 & 4 & 1\\3 & 5 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\5 & 3 & 1\\3 & 5 & 1\end{vmatrix}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(-7+16)$$

$$=4\frac{1}{2}.$$

这个结果是错误的。造成错误的原因是：忽略了三角形的面积必须得正值。即

$$\triangle=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\x_2 & y_2 & 1\\x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}\text{的绝对值。}$$

要注意，当三角形顶点(x_1,y_1)、(x_2,y_2)、(x_3,y_3)按逆时针方向顺序排列时，$\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\x_2 & y_2 & 1\\x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}>0$，当顶点按顺时针方向顺序排列时，$\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\x_2 & y_2 & 1\\x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}<0$。

$$\therefore\quad S_{OABC}=\frac{1}{2}(7+16)=11\frac{1}{2}.$$

为了达到牢固掌握、灵活运用重要的定理和公式的目的，需要进行一定的训练。下面我们列举几个利用重要定理和公式解决的题目。

例5 在$\triangle ABC$中，求证：

$$(a^2-b^2-c^2)\operatorname{tg}A+(a^2-b^2+c^2)\operatorname{tg}B=0.$$

这个题目的已知条件是$\triangle ABC$的三边a、b、c和三内角A、B、C。一般地说，在三角形中，边和角的三角函数间的关系