三角学辞典

问题解法

问题解法 **三角学辞典**

问 题 解 法

三 角 学 辞 典

〔日〕笹部貞市郎　编

肖　禾　编译

上海教育出版社出版

（上海永福路 123 号）

新华书店上海发行所发行　上海商务印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32　印张 23.5　插页 4　字数 1,316,000

1983 年 11 月第 1 版　1983 年 11 月第 1 次印刷

印数 1—58,500 本

统一书号：17150·8　定价：（精）4.20 元

出 版 说 明

自明治维新以后，日本为了学习西方科学技术，在中小学数学教育上也刻意输入，大量地翻译了欧美有影响的课本. 以后又自编教材和各种初等数学读物，逐渐地在初等数学教育的取材、编排、题选上形成了自己的特点. 根据国内外的情况，日本数学教育也迭经改革，但仍然有着不同于欧美、苏联的地方. 为了从一个方面了解这种特点，我们组织翻译了这一套题解辞典.

这几本辞典的题目及解答远不是数学教育的全部，但是由于它的写作年代较近，作者在编选题目时又比较注意立足于日本的教育情况，兼顾传统与未来，所以确实从比较宽广的角度反映了日本中学数学教育所注重的东西. 这些都可以供我国的数学教师了解借鉴. 这几本辞典选择的题目有相当部分是初等数学所必需的基础训练题，当然更可以作为教学中的参考材料.

需要说明的是，这几本辞典卷帙浩大，各册各章的编写质量并不一致. 错误、重复之处多有发现，我们在组织翻译时只纠正了发现的错误，删去各册中的数学小史和一些数表，如对数表，三角函数表等，在«三角学辞典»中删去了一些明显重复的题目以及球面三角的题目，其他未作改动. 希望读者能在使用中注意.

前 言

本书是先前已出版的几何学、代数学、微积分学等各辞典的姐妹篇，书中记载了关于三角学的各种问题及其解法.

不用多说，看一看三角学发展的历史就可知道，这门学科的最初目的，是要根据三角形的边、角大小来计算未知的边、角大小，使它能在测量、航海等实际问题中发挥作用. 由于三角形是所有图形的基础，所以彻底弄清关于三角形的各种定理、法则及种种公式、研究它们的使用方法，对于三角学的学习是基本的.

随着科学技术的发展，在所有的领域里，再没有比今天更切实地感觉到数学的重要性了. 特别是在航海、航空、测量、建筑、机械、电气等各种实用方面，就是说上一句"绝对没有不用到三角的事情"，也不算过分.

即使三角学是这样重要的一门学科，看上去却也是枯燥无味的，而且由于它的问题的数量又是无限的，所以不论是学生，还是教师，都往往是敬而远之，迫切希望有一本系统地归纳、阐述这些问题的完备的辞书.

本书就是顺应这个愿望而编纂的，它的要点如下：

本书的内容如目录所示，从三角函数的基本性质出发，涉及整个平面三角，以及测量的理论和它的应用. 且不说中学教科书的内容，一般地，就是对于那些正在学习大学基础课程的学生以及广泛从事科学技术实际工作的人，本书也是十分有用的.

在编辑本书的时候，畏友伊藤政治、倉本熊雄两位先生，对问题的搜集、解答、校订等各项工作都给予了种种帮助. 对于他们促进本书出版所作的努力，在此深表谢意.

编 者

1964 年 10 月

目　录

第一章　序

第二章　锐角三角函数

第三章　一般角的三角函数

第四章　加法定理

第五章　三角形与三角函数

第六章　方程和不等式

第七章 消去法，反三角函数，反三角方程

第八章 棣莫佛定理，复数，向量

第九章 解三角形的理论及应用

第十章 测 量

第一章 序

1. 角度制

1. 什么是三角学?

解 三角就是利用表示三角形的边和角之间关系的三角函数,研究三角形及一般多边形的性质,并进而根据三角函数表,算出边和角的数值. 在几何学中,虽然也求边和角的大小或进行大小比较,但要算出它们的数值,在许多情况下却是困难的. 然而,用三角的方法,可以一个一个地求出它们的数值,因此在测量、建筑和其他工业上用途非常广泛. 此外,将它应用在球面上的球面三角,在天文学上也是不可缺少的.

2. 用角度制表示下列各角: $\frac{11}{16}$ 直角, 0.678 直角, $0.2\dot{4}\dot{1}$ 直角.

解 $\frac{11}{16}$ 直角$=90^\circ\times\frac{11}{16}=61\frac{7}{8}$ 度, $60'\times\frac{7}{8}=52\frac{1}{2}$ 分, $60''\times\frac{1}{2}=30$ 秒. $\therefore$ $\frac{11}{16}$ 直角 $=61$ 度 52 分 30 秒. 0.678 直角 $=90^\circ\times0.678=61.02$ 度, $60'\times0.02=1.2$ 分, $60''\times0.2=12$ 秒. $\therefore$ 0.678 直角 $=61$ 度 1 分 12 秒. $0.2\dot{4}\dot{1}$ 直角 $=\frac{241-24}{900}$ 直角$=\frac{217}{900}$ 直角 $=90^\circ\times\frac{217}{900}=21.7$ 度, $60'\times0.7=42$ 分, $\therefore 0.2\dot{4}\dot{1}$ 直角$=21$ 度 42 分.

3. 直角的 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ 分别是几度?

解 直角是 90°. 因此它的 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ 分别是 $90^\circ\times\frac{1}{2}=45^\circ$, $90^\circ\times\frac{1}{3}=30^\circ$, $90^\circ\times\frac{1}{4}=22.5^\circ$, $90^\circ\times\frac{1}{5}=18^\circ$, $90^\circ\times\frac{1}{6}=15^\circ$.

4. 将 $67^\circ23'40''$ 化成以秒为单位的单名数.

解 $(67\times60+23)\times60+40=242620''$.

5. 用度、分、秒表示 $57398''$.

解 $57398\div60=956\cdots$余 38,

$956\div60=15\cdots$余 56,

$\therefore$ $57398''=15^\circ56'38''$.

6. 用以直角为单位的小数表示 56°.

解 $\frac{56}{90}=0.6\dot{2}$(直角).

7. 把 $97^\circ5'15''$ 用以直角为单位的小数来表示.

解 $97^\circ5'15''=(97\times60+5)\times60+15=349515''$, 直角$=90\times60\times60=324000$ 秒. 因此, 把 $97^\circ5'15''$ 用以直角为单位的小数来表示, 就是 $349515\div324000=1.07875$ (直角).

8. 用度、分、秒表示直角的 0.2875.

解 $90^\circ\times0.2875=25.875^\circ$, $60'\times0.875=52.5'$, $60''\times0.5=30''$. 因此, 直角的 $0.2875=25^\circ52'30''$.

9. 用度、分、秒表示 12 点 15 分时钟的两针所成的角.

解 长针走1°的时间里两针离开 $1^\circ-\frac{1^\circ}{12}=\frac{11^\circ}{12}$. 因为敲 12 点时两针重合, 所以经过 15 分钟, 长针走了 $360^\circ\times\frac{15}{60}=90^\circ$. 这时两针的交角是 $\frac{11^\circ}{12}\times90=82^\circ30'$.

10. 用角度制表示 2 点 34 分 56 秒时钟的长针和短针的夹角.

解 从钟上标着 XII 的地方到长针的距离, 用度数来表示是 $6^\circ\times34\frac{56}{60}$. 因此从标着 II 的地方到短针的距离, 用度数来表示是 $6^\circ\times34\frac{56}{60}\times\frac{1}{12}$, 从而, 从 XII 到短针的度数是 $6^\circ\times34\frac{56}{60}\times\frac{1}{12}+6^\circ\times10$, 所要求的夹角是 $6^\circ\times34\frac{56}{60}-6^\circ\times34\frac{56}{60}\times\frac{1}{12}-6^\circ\times10=132^\circ8'$.

11. 钟表的两针在 5 点到 7 点 40 分这段时间里各转过了多少角度?

解 显然, 分针在 5 点到 7 点 40 分这段时

间里转过2周又1周的$\frac{40}{60}$. 如用度数来表示这个转动,就是

$$360^\circ\times2+360^\circ\times\frac{40}{60}=960^\circ.$$

因为时针转过分针的$\frac{1}{12}$,所以时针转过的度数是$960^\circ\times\frac{1}{12}=80^\circ$.

12. 有两个角,如果它们的和是84°,差是0.1直角,那么它们分别是多少度,多少个直角?

解 0.1直角即是$90^\circ\times0.1=9^\circ$. 因此两个角分别是$(84^\circ+9^\circ)\div2=46^\circ30'$和$(84^\circ-9^\circ)\div2=37^\circ30'$. 如果用直角作单位来表示,那么分别是$\frac{46^\circ30'}{90^\circ}=\frac{31}{60}$直角和$\frac{37^\circ30'}{90^\circ}=\frac{5}{12}$直角.

13. 正五边形的一个内角是几度?

解 多边形的外角加起来一共是4个直角,即等于360°. 因此正五边形的一个外角等于$360^\circ\div5=72^\circ$,从而一个内角是$180^\circ-72^\circ=108^\circ$.

14. 在正八边形的外接圆中,它的一条边所对的圆周角是几度?

解 在正八边形的外接圆中,它的一条边所对的圆心角是直角的$\frac{4}{8}$,即是45°. 这条边将圆周分成两条弧,若把优弧上的一点和这条边的两端连结起来,则所张开的圆周角是$45^\circ\times\frac{1}{2}=22^\circ30'$,若把劣弧上的一点和这条边的两端连结起来,则所张开的圆周角是22°30′的补角,即是$180^\circ-22^\circ30'=157^\circ30'$.

15. 已知正多边形的一个内角是120°,求它的边数.

解 设正多边形的边数为n,则一个外角是$\frac{4}{n}$直角$=\frac{360^\circ}{n}$,从而内角是$180^\circ-\frac{360^\circ}{n}$. 根据题意有$180^\circ-\frac{360^\circ}{n}=120^\circ$,因此求得$n=6$.

16. $ABCD$是圆的内接四边形,它的$\angle A$是44°35′,$\angle B$是72°48′12″,$\angle C$和$\angle D$是多少度?

解 因为$ABCD$内接于圆,所以$\angle A$和$\angle C$互为补角. 因此$\angle C=180^\circ-44^\circ35'=135^\circ25'$. 又$\angle B$和$\angle D$互为补角,因此$\angle D=180^\circ-72^\circ48'12''=107^\circ11'48''$.

17. 有一个多边形,它的内角的度数顺次成等差数列. 又知最小的角是120°,公差是5°,求多边形的边数.

解 问题可以这样考虑:即最大的外角是$180^\circ-120^\circ=60^\circ$,从它开始的各外角逐一减少5°,这样的多边形是几边形. 因为外角和是4直角,即360°,所以若设这个多边形是n边形,则从等差数列的公式

$$360^\circ=\frac{n}{2}[2\times60^\circ-(n-1)5^\circ]$$

可得$n=16$和$n=9$. 但是$n=16$不适合,如果$n=16$,那么最小的外角就是$60^\circ-15\times5^\circ=-15^\circ$,成了负角. 因此所要求的多边形的边数是9.

18. 用度、分、秒表示下列各角: 0.35直角,0.0875直角,2.01375直角,直角的$\frac{5}{32}$,直角的$\frac{8}{21}$,1.07分,46.75分,30.89分.

解 0.35直角$=90^\circ\times0.35=31.5^\circ$,$60'\times0.5=30'$,因此0.35直角$=31^\circ30'$. 0.0875直角$=90^\circ\times0.0875=7.875^\circ$,$60'\times0.875=52.5'$,$60''\times0.5=30''$,因此0.0875直角$=7^\circ52'30''$. 2.01375直角$=90^\circ\times2.01375=181.2375^\circ$,$60'\times0.2375=14.25'$,$60''\times0.25=15''$,因此2.01375直角$=181^\circ14'15''$. $\left(\text{直角的}\frac{5}{32}\right)=90^\circ\times\frac{5}{32}=14.0625^\circ$,$60'\times0.0625=3.75'$,$60''\times0.75=45''$,因此$\left(\text{直角的}\frac{5}{32}\right)=14^\circ3'45''$. $\left(\text{直角的}\frac{8}{21}\right)=90^\circ\times\frac{8}{21}=34\frac{2^\circ}{7}$,$60'\times\frac{2}{7}=17\frac{1'}{7}$,$60''\times\frac{1}{7}=8\frac{4''}{7}$,因此$\left(\text{直角的}\frac{8}{21}\right)=34^\circ17'8\frac{4''}{7}$. 1.07分$=1'+60''\times0.07=1'+4.2''=1'4.2''$. 46.75分$=46'+60''\times0.75=46'+45''=46'45''$. 30.89分$=30'+60''\times0.89=30'+53.4''=30'53.4''$.

19. 用度、分、秒表示1.704535直角.

解 $90^\circ\times1.704535=153.40815^\circ$,$60'\times$

$0.40815=24.489'$, $60''\times0.489=29.34''$, 因此 1.704535 直角 $=153°24'29.34''$.

20. 在 4 点到 5 点 30 分这段时间内钟的两针各转过了多少角度？

解 分针：4 点钟时分针在标着 XII 的地方，从那时到 5 点 30 分止转过了一周半，即转过了 $360°\times1.5=540°$.

时针：从 4 点到 5 点 30 分，时针从 IV 走到了 V 和 VI 的当中，因此转过了一周的 $\frac{1.5}{12}$，即转过了 $360°\times\frac{1.5}{12}=45°$.

21. 正十一边形的一个外角是几度？

解 正 n 边形的一个外角等于 $\frac{4}{n}$ 直角. 本题 $n=11$，因此是 $\frac{4}{11}$ 直角，即是 $90°\times\frac{4}{11}=32.\dot{7}\dot{2}°$.

$$60'\times0.72727=43.6362',$$

$$60''\times0.6362=38.1720'',$$

所以正十一边形的一个外角是

$$32°43'38.1720''.$$

22. 正八边形的一个外角是几度？

解 多边形的外角和是 4 直角. 正八边形的一个外角与其他各个外角都相等，因此等于外角和的八分之一，即是 $360°\div8=45°$.

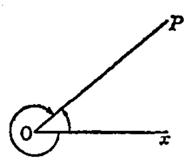
23. 正多边形的一个内角是 170°，求它的边数.

解 一个内角是 170° 时，一个外角是 $180°-170°=10°$. 因此这个多边形的边数是 $360°\div10°=36$.

2. 弧度制

24. 什么是正角，什么是负角？

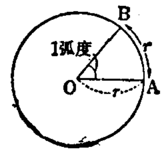
解 如图，$\angle xOP$ 可以认为是从顶点 O 引出的射线 OP，从直线 Ox 的位置转到 OP 的位置而形成的. 这个旋转的量的大小是 $\alpha°$，Ox 叫做基准（又叫做基线），OP 叫做**动半径**. 动半径旋转时，若方向和时针旋转的方向相反，就叫做**正的旋转**，若方向和时针旋转的方向相同，就叫做**负的旋转**. 由正的旋转所形成的角叫做**正角**，由负的旋转所形成的角叫做**负角**.



25. 什么是弧度制？

解 **弧度制** 表示角的大小，通常使用的是象 15°，30°40′ 这样的角度制单位，但在理论研究等方面，也还经常使用弧度制.

在半径为 r 的圆周上取长度是 r 的弧 AB，考虑这条弧所对的圆心角 $\angle AOB$，可见它的大小是一定的，和半径的长短无关. 用这个角的大小作为角度的单位，叫做弧度，记号是 rad. 用弧度作单位来度量角叫做弧度制.



因为半径为 r 的圆周长是 $2\pi r$，所以用弧度制来表示 360° 的角，就是 $\frac{2\pi r}{r}=2\pi$. 因此弧度制和角度制之间有下列关系：

$$\pi \text{ 弧度}=180°,$$

$$1 \text{ 弧度}=\frac{180°}{\pi}\approx57°17'45'',$$

$$1°=\frac{\pi}{180}\text{ 弧度}\approx0.01745\text{ 弧度}.$$

从而得到下列公式：

$$y°=\frac{180}{\pi}x\text{ 弧度},\ x\text{ 弧度}=\frac{\pi}{180}y°.$$

注 在弧度制中，通常略去单位名称. 例如 90°，45°，30° 分别是 $\frac{\pi}{2}$ 弧度，$\frac{\pi}{4}$ 弧度，$\frac{\pi}{6}$ 弧度，它们可简写成 $\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{6}$.

26. 圆弧 AB 的长度等于半径 r，证明弧 AB 所对的圆心角与 r 无关.

解 半径为 r 的圆周长是 $2\pi r$. 因为圆弧的长度和它所对的圆心角成比例，所以如果设长度等于 r 的弧 AB 所对的圆心角是 $x°$，则 $2\pi r:r=360°:x°$.

$$\therefore\ x°=\frac{180°}{\pi}\approx57°17'45''.$$

即弧 AB 所对的圆心角与 r 无关.

27. 已知车轮的转速是每秒 35 转，求它转过 1 弧度所需要的时间. 这里取 $\pi=\frac{22}{7}$.

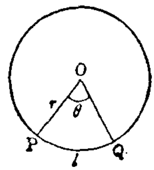
解 这个车轮转一转所要的时间是 $\frac{1}{35}$ 秒，因此转过 1 弧度需要

$$\frac{1}{35}\div2\pi=\frac{1}{35}\times\frac{7}{22}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{220}.$$

28. 设半径是 r，圆心角是 θ（弧度）的扇形的弧长为 l，面积为 S，证明

$$l=r\theta,\ S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}rl.$$

解　同圆中弧长和扇形面积都和它们的圆心角成比例．因为半径为 r 的圆周和圆面积分别是 $2\pi r$ 和 πr^2，所以



$$l:2\pi r=\theta:2\pi.$$

$$\therefore\quad l=r\theta.$$

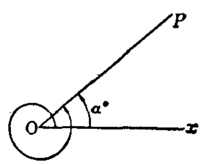
又
$$S:\pi r^2=\theta:2\pi,$$

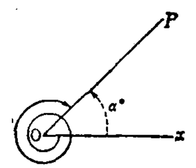
$$\therefore\quad S=\frac{1}{2}r^2\theta.$$

$r\theta$ 用 l 代入，则 $S=\frac{1}{2}rl$.

29. 什么是一般角？

解　在问题24中，角的旋转不管是朝正的方向还是朝负的方向，都可以继续不断地进行下去．例如，在右图中，如果 $\angle xOP$ 的大小是 $\alpha°$，那么动径 OP 可以认为是从基线 Ox 的位置开始旋转了





$\alpha°$，$360°+\alpha°$，

$360°\times2+\alpha°$，…

或　$-360°+\alpha°$，

$-360°\times2+\alpha°$，…

这些角叫做属于动径 OP 的角，或者动径 **OP 所表示的角**．即

$$OP\text{所表示的角}=\alpha°+360°\cdot n.\ (n\text{是整数})$$

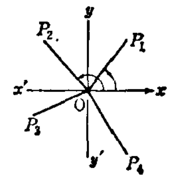
这也叫做动径 OP 和基线 Ox 所形成的一般角，即 $\angle xOP$ 的一般角．因此，动径 OP 的一般角定义如下：

一般角的定义　设动径 OP 和基线 Ox 所形成的一个角是 $\alpha°$，那么它的一般角是

$$\alpha°+360°\cdot n\quad(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots).$$

注　在上面的定义中，把动径 OP 和基线 Ox 所形成的一个角设为 $\alpha°$，而不设为 $\angle xOP$ 的劣角．例如在 $\angle xOP=60°$ 的情况下，不妨设 $\alpha°=60°$，$\alpha°=-300°$，$\alpha°=420°$，….

当把直角坐标系 x 轴的正向作为角的基线时，根据动径所在的象限，把 OP 所表示的一般角叫做这个象限的角．右图中，$\angle xOP_1$，$\angle xOP_2$，$\angle xOP_3$，$\angle xOP_4$ 分别是第一、第二、第三、第四象限的角．



30. 用弧度制表示 $42°45'30''$.

解　$60''\times45=2700''$，$60''\times60\times42=151200''$.

因此

$$42°45'30''=151200''+2700''+30''$$
$$=153930''.$$

又　　$\pi(\text{弧度})=60''\times60\times180$,

于是，设所要求的弧度是 α（弧度），则从

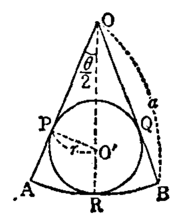
$$\frac{153930}{60\times60\times180}=\frac{\alpha}{\pi}$$

可得，　　$\alpha=0.2375\cdots\pi$.

31. (1) 若扇形 OAB 的圆心角是 θ，半径是 a，试用 a 和 θ 表示这个扇形的内切圆半径 r.

(2) 若扇形的圆心角是 $60°$，求扇形的内切圆与扇形的面积之比．

解　(1) 设扇形 OAB 的内切圆的圆心是 O'，与 OA、OB 的切点是 P、Q，与 $\overset{\frown}{AB}$ 的切点是 R．因为 $\angle AOO'=\frac{\theta}{2}$，所以



$$OO'\sin\frac{\theta}{2}=O'P.$$

$$\therefore\quad OO'=r\csc\frac{\theta}{2}.$$

因为 $OO'+O'R=OR$，所以

$$r\csc\frac{\theta}{2}+r=a.$$

$$\therefore\quad r=\frac{a\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}.$$

(2) $\theta=60°$ 时 $\theta=\frac{\pi}{3}$（弧度），

$\therefore$　扇形 OAB 的面积 $S=\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi a^2}{6}$,

内切圆的半径 $r=\frac{a\sin 30^\circ}{1+\sin 30^\circ}=\frac{a}{3}$.

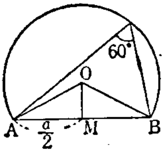
因此,内切圆的面积

$$S'=\pi r^2=\frac{a^2\pi}{9}.$$

$\therefore\quad S':S=2:3.$

32. 求弦长是 a, 且包含 60° 圆周角的弓形面积.

解 设这个弓形的弦为 AB, 弧 AB 所属的圆的圆心为 O, 则 $\angle AOB=120^\circ$. 从 O 向 AB 引垂线 OM, 有



$$\angle OAM=30^\circ,$$

$$AM=\frac{a}{2}.$$

$$\therefore\quad OM=\frac{a}{2}\operatorname{tg}30^\circ=\frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

$\triangle OAB$ 的面积是

$$\frac{a}{2}\times\frac{a}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{12}a^2.$$

因为优角 $AOB=240^\circ=\frac{4\pi}{3}$, $OA=2OM=\frac{a}{\sqrt{3}}$, 所以, 以这个优角为圆心角的扇形 OAB 的面积是

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi}{3}\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{2\pi a^2}{9}.$$

$$\therefore\quad 弓形的面积=\frac{\sqrt{3}}{12}a^2+\frac{2\pi a^2}{9}=\frac{8\pi+3\sqrt{3}}{36}a^2.$$

33. 若两个角的差是 1°, 它们的和是 1 弧度, 试用弧度制表示这两个角的大小.

解 设所要求的两个角分别是 x (弧度)和 y(弧度),则

$$x-y=\frac{\pi}{180},\ x+y=1.$$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\pi}{180}\right),\ y=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{180}\right).$$

34. 若正多边形的一个外角是一个内角的 $\frac{1}{6}$, 试用弧度制表示内角和外角的大小, 并求出多边形的边数.

解 设外角是 x 弧度, 则内角是 $(\pi-x)$ 弧度. 因而由题意得

$$6x=\pi-x,\ 即\ x=\frac{1}{7}\pi.$$

从而内角是 $\quad\pi-\frac{1}{7}\pi=\frac{6}{7}\pi.$

又, 因为外角的和总是 2π, 所以这个多边形的边数是

$$\frac{2\pi}{\frac{1}{7}\pi}=14.$$

35. 求半径为 5 cm 的圆中, 圆心角为 $\frac{2}{3}$ 直角的圆弧的长度.

解 因为半径是 5 cm, 所以这个圆的周长是 10π cm. 因此, 所要求的弧长的厘米数 x 为: $\frac{10\pi}{360}=\frac{x}{60}$. 取 π 的近似值 3.1416, 得 $x=5.23\cdots$.

36. 已知 200° 圆心角所对的弧长约等于半径的 $3\frac{1}{2}$ 倍, 求这时 π 精确到小数第二位的值.

解 设半径为 r, 则这个圆的周长是 $2\pi r$. 因此得到下面的比例式: $2\pi r:3\frac{1}{2}r=360:200$, 从而求得 $\pi=\frac{63}{20}=3.15$.

37. 用角度制和弧度制, 分别表示 12 点过 $\frac{1}{4}$ 小时的时候时钟长短两针的夹角.

解 在 12 点后的 $\frac{1}{4}$ 小时里, 长针经过了 4 个直角的 $\frac{1}{4}$, 即 1 直角. 在这段时间里, 短针经过的角度是长针的 $\frac{1}{12}$, 即经过了 1 直角的 $\frac{1}{12}$. 因此两针间的夹角是 1 直角的 $\frac{11}{12}$. 用角度制表示就是 $\frac{11}{12}\times 90^\circ=\frac{11\times 15^\circ}{2}=\frac{165^\circ}{2}=82\frac{1^\circ}{2}$, 用弧度制表示就是 $\frac{11}{12}\times\frac{\pi}{2}=\frac{11\pi}{24}$.

38. 将下列各角换算成弧度制或角度制.

(1) 75°, 120°, -150°, -300°, 175°, -36°.

(2) $\frac{\pi}{10}$, $\frac{5\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{3}$, 2, -3.

解 设 $\alpha^\circ=\theta$(弧度), 因为 $180^\circ=\pi$(弧度), 所以

$$\frac{\theta}{\pi}=\frac{\alpha}{180}.$$

$$\therefore\quad \theta=\frac{\alpha}{180}\pi(\text{弧度}), \qquad ①$$

$$\alpha=\frac{180}{\pi}\theta(°). \qquad ②$$

(1) 从 ① 式得

$$75°=\frac{5\pi}{12},\quad 120°=\frac{2\pi}{3},$$

$$-150°=-\frac{5\pi}{6},\quad -300°=-\frac{5\pi}{3},$$

$$175°=\frac{35\pi}{36},\quad -36°=-\frac{\pi}{5}.$$

(2) 从 ② 式得

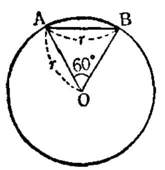
$$\frac{\pi}{10}=18°,\quad \frac{5\pi}{2}=450°,$$

$$-\frac{3\pi}{4}=-135°,\quad \frac{2\pi}{3}=120°,$$

$$2\approx115°,\quad -3\approx-172°.$$

39. 一条弦的长度等于半径 r，求它和劣弧所组成的弓形的面积.

解　在半径为 r 的圆 O 中作长度等于 r 的弦 AB，则三角形 OAB 是边长为 r 的正三角形. 因此



$$\angle AOB=60°=\frac{\pi}{3}.$$

又，三角形的高是 $\frac{\sqrt{3}}{2}r$，

所以三角形 OAB 的面积是

$$\frac{1}{2}r\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}r=\frac{\sqrt{3}}{4}r^2.$$

于是，若设所要求的弓形面积是 S，则

$$\begin{aligned}S&=\text{扇形 }OAB\text{ 的面积}\\&\quad-\text{三角形 }OAB\text{ 的面积}\\&=\frac{1}{2}r^2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}r^2\\&=\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)r^2.\end{aligned}$$

40. 一个半径为 r 的扇形，若它的周长等于弧所在的半圆的长，那么扇形的圆心角是多少弧度？

又，扇形的面积是多少？

解　设扇形的圆心角是 θ 弧度，因为扇形的弧长是 $r\theta$，所以扇形的周长是 $2r+r\theta$.

根据题意，有

$$2r+r\theta=\pi r.$$

$$\therefore\quad \theta=\pi-2\approx1.1416(\text{弧度}).$$

又，这时扇形的面积

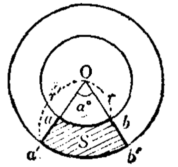
$$S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}r^2(\pi-2).$$

41. 求半径为 r, $r'(r<r')$ 的两同心圆的圆弧，和从圆心出发夹角为 $\alpha°$ 的两射线所围成的部分的面积.

解　设同心圆的圆心是 O，两射线和内圆、外圆的交点分别是 a、b 及 a'、b'，则所要求的面积

$S=$扇形 $Oa'b'$ 的面积$-$扇形 Oab 的面积.

$$\alpha°=\frac{\alpha}{180}\pi(\text{弧度}),$$



$$\begin{aligned}\therefore\quad S&=\frac{1}{2}r'^2\cdot\frac{\alpha\pi}{180}\\&\quad-\frac{1}{2}r^2\cdot\frac{\alpha\pi}{180}\\&=\frac{\alpha\pi}{360}(r'^2-r^2).\end{aligned}$$

42. 求半径是 12 cm，圆心角是 1.8 弧度的扇形的面积.

解　设扇形的面积是 S，弧长是 l，则

$$S=\frac{1}{2}rl.$$

又　　$l=r\theta=12\times1.8=21.6(\text{cm})$，

因此　$S=\frac{1}{2}\times12\times21.6=129.6(\text{cm}^2)$.

43. 求半径是 15 cm，弧长是 18 cm 的扇形的圆心角，及这个扇形的面积.

解　根据问题 28，因为

$$r=15,\ l=18,\ l=r\theta,\ S=\frac{1}{2}rl,$$

所以

$$\theta=\frac{18}{15}=\frac{6}{5},\quad S=\frac{15\times18}{2}=135(\text{cm}^2).$$

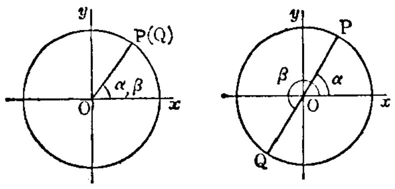
44. 从同一基线出发的两个角 α 和 β，如果它们的动径有下列关系，那么 α、β 间有怎样的关系？这里角的单位是弧度.

(1) 两条动径重合；

(2) 两条动径在一直线上，但方向相反.

解　设动径 OP、OQ 所表示的角分别是 α、β. 它们的位置如下图所示.

(1) 作为特殊情况，$\alpha=\beta$. 一般地，它们



(1) (2)

的差是 $2n\pi$，即

$$\alpha-\beta=2n\pi.\ (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

(2) 特殊情况是 $\alpha-\beta=-\pi$．一般地

$$\alpha-\beta=(2n+1)\pi.\ (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

45. 求任意角的弧度数和度数之间的关系.

解 设任意角的弧度数是 θ，这个角的度数是 x．因为 2 直角是 $180°$，所以 $\frac{x}{180}$ 是这个角和 2 直角的比．又，2 直角的弧度数是 π，所以 $\frac{\theta}{\pi}$ 也是这个角和 2 直角的比．因此，$\frac{x}{180}=\frac{\theta}{\pi}$，从而得

$$x=\frac{180\,\theta}{\pi},\quad \theta=\frac{\pi x}{180}.$$

46. 用弧度表示 $35'30''$.

解 设所要求的弧度数是 θ，则

$$\frac{\theta}{\pi}=\frac{35\times60+30}{180\times60\times60}.$$

从而 $$\theta=\frac{71}{21600}\pi\approx0.01033.$$

47. 用弧度表示 $11°15'30''$.

解 $11°15'30''=675\frac{1}{2}$ 分，因此换算成弧度是

$$\frac{675\frac{1}{2}}{180\times60}\pi=\frac{675\times2+1}{180\times60\times2}\pi$$
$$=\frac{1351}{21600}\pi.$$

48. 用弧度表示 $13°$.

解 因为 $180°$ 是 π(弧度)，所以从 $180:13=\pi:x$ 可知，$13°$ 是 $\frac{13}{180}\pi$.

49. 求弧度是 $\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{4}$ 的角的度数.

解 将 $\pi=180°$ 代入，即能求得度数．$\frac{\pi}{3}$ 的度数是 $60°$，$\frac{\pi}{6}$ 的度数是 $30°$，$\frac{\pi}{4}$ 的度数是 $45°$.

50. 用角度制表示下列各角.

(1) π；(2) $\frac{3\pi}{4}$；(3) 10π.

解 因为 π 用角度制表示时是 $180°$，所以所给的各角分别是(1) $180°$，(2) $180°\times\frac{3}{4}=135°$，(3) $180°\times10=1800°$.

51. 当汽车在半径为 r km 的圆弧上以每小时 a 公里的速度行驶时，n 秒钟的时间里行驶了多少秒的角度?

解 每小时行驶 a 公里，因此 n 秒钟里行驶 $\frac{na}{60\times60}$ 公里．又因为半径为 r 公里的圆周长是 $2\pi r$ km，所以所要求的角度的秒数可从下式得到:

$$2\pi r:\frac{na}{60\times60}=360\times60\times60:x.$$

即是 $$x=\frac{180\,na}{\pi r}.$$

52. 正 n 边形的一个内角是多少弧度?

解 多边形的外角和是 4 直角，即等于 2π 弧度．因此正 n 边形的一个外角是 $\frac{2}{n}\pi$，从而一个内角的弧度数是 $\pi-\frac{2}{n}\pi=\frac{(n-2)\pi}{n}$.

53. 若多边形的内角和是 10π，求它的边数.

解 设多边形的边数是 n，则内角和与外角和加起来是 $n\pi$．因此，仅仅外角的和是 $n\pi-10\pi$．又因为多边形的外角和总是等于 4 直角，即 2π，所以 $n\pi-10\pi=2\pi$，从而得 $n=12$.

54. 若三角形各内角的比是 3:5:7，求各角的弧度数.

解 这个三角形的各个内角，用角度制表示分别是 $180°\times\frac{3}{3+5+7}=36°$，$180°\times\frac{5}{3+5+7}=60°$，$180°\times\frac{7}{3+5+7}=84°$．因此，用弧度制表示，它们分别是 $36\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{5}$，$60\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{3}$，$84\times\frac{\pi}{180}=\frac{7\pi}{15}$.

55. 在半径为 12 cm 的圆中，求长为 5 cm 的弧所对的圆心角的度数.

解 半径为 12cm 的圆的半周长是 12π cm. 因此从 $\frac{12\pi}{180}=\frac{5}{x}$ 得 $x=\frac{75}{\pi}$ 度.

56. 在半径为 120 cm 的圆中，求 9 cm 的弧所对的圆心角的度数.

解 所要求的角的弧度数是 $\frac{9}{120}$，即是 $\frac{3}{40}$. 因此，根据问题 45，这个角的度数是 $\frac{180}{\pi}\times\frac{3}{40}=\frac{27}{2\pi}$.

57. 等圆 O 和 O' 相交于 A、B，它们公共部分的面积等于圆 O 面积的一半. 证明：设 $\angle AOB=\frac{\pi}{2}+\theta$，则 $\theta=\cos\theta$.

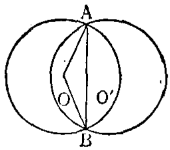
解 设等圆的半径是 r，则

扇形 OAB 的面积 $=\frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$，

$\triangle OAB$ 的面积

$$=\frac{1}{2}r^2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$

$$=\frac{1}{2}r^2\cos\theta,$$



弦 AB 和弧 AB 所围的弓形的面积是

$$\frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta-\cos\theta\right).$$

因为两圆的公共部分的面积是这个弓形面积的 2 倍，所以根据题意有

$$r^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta-\cos\theta\right)=\frac{1}{2}\pi r^2.$$

$$\therefore\quad \theta=\cos\theta.$$

3. 三角比

58. 什么是三角比？

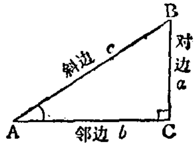
解 在直角三角形 ABC 中，若 $\angle C$ 是直角，那么当 $\angle A$ 或 $\angle B$ 确定时，这个三角形的形状也就确定了，三条边的比是一定的. 这时，对于这个三角形三边之间相互的比有如下的规定.

1. 正弦

在直角三角形中，$\frac{\text{对边}}{\text{斜边}}$ 的值叫做正弦，$\angle A$ 的正弦记作 $\sin A$. 下图中

$$\sin A=\frac{BC}{AB},$$

$$\sin B=\frac{AC}{AB}.$$



2. 余弦

$\frac{\text{邻边}}{\text{斜边}}$ 的值叫做余弦，$\angle A$ 的余弦记作 $\cos A$. 图中

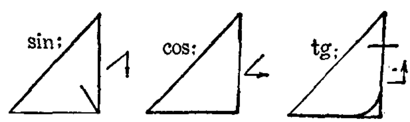
$$\cos A=\frac{AC}{AB},\quad \cos B=\frac{BC}{AB}.$$

3. 正切

$\frac{\text{对边}}{\text{邻边}}$ 的值叫做正切，$\angle A$ 的正切记作 $\mathrm{tg}\,A$. 图中

$$\mathrm{tg}\,A=\frac{BC}{AC},\quad \mathrm{tg}\,B=\frac{AC}{BC}.$$

注 记忆的方法：如考虑直角左面的角，则可用如下的方法记忆.



4. 余切

$\frac{\text{邻边}}{\text{对边}}$ 的值叫做余切，$\angle A$ 的余切记作 $\mathrm{ctg}\,A$. 图中

$$\mathrm{ctg}\,A=\frac{AC}{BC},\quad \mathrm{ctg}\,B=\frac{BC}{AC}.$$

5. 正割

$\frac{\text{斜边}}{\text{邻边}}$ 的值叫做正割，$\angle A$ 的正割记作 $\sec A$. 图中

$$\sec A=\frac{AB}{AC},\quad \sec B=\frac{AB}{BC}.$$

6. 余割

$\frac{\text{斜边}}{\text{对边}}$ 的值叫做余割，$\angle A$ 的余割记作 $\csc A$. 图中

$$\csc A=\frac{AB}{BC},\quad \csc B=\frac{AB}{AC}.$$

59. 求下列三角比.

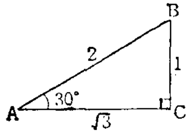
(1) $\sin 30°$；(2) $\cos 30°$；(3) $\mathrm{tg}\,30°$；

(4) $\mathrm{ctg}\,30°$；(5) $\sec 30°$；(6) $\csc 30°$.

解 下图中 $\angle A=30°$，$\angle C=90°$ 时

$$BC:AB:AC=1:2:\sqrt{3}.$$

因此，(1) $\sin 30°=\frac{1}{2}$.



(2) $\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(3) $\operatorname{tg} 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

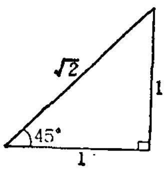
(4) $\operatorname{ctg} 30°=\sqrt{3}$. (5) $\sec 30°=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

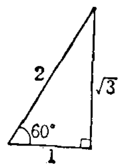
(6) $\csc 30°=2$.

60. 求下列各值.

(1) $\sin 45°$; (2) $\sin 60°$;

(3) $\operatorname{tg} 45°$; (4) $\sec 60°$.





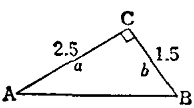
解 (1) $\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

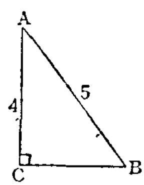
(2) $\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(3) $\operatorname{tg} 45°=1$. (4) $\sec 60°=2$.

61. 求下左图中 $\angle A$ 和 $\angle B$ 的正切的值.

解 $\operatorname{tg} A=\frac{1.5}{2.5}=0.6$, $\operatorname{tg} B=\frac{2.5}{1.5}=\frac{5}{3}$.





62. 求上右图中 $\angle A$ 和 $\angle B$ 的正切的值.

解 由勾股定理，首先可求出 BC 的长.

$$BC=\sqrt{5^2-4^2}=3.$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg} A=\frac{3}{4}=0.75,\quad \operatorname{tg} B=\frac{4}{3}.$$

注 **1.** 不管直角三角形的位置怎样，首先要弄清，要求正切值的那个角的对边是哪一条，邻边是哪一条.

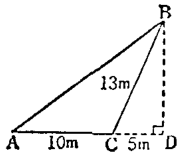
2. $\angle A+\angle B=90°$，它们是互为余角的关系. $\operatorname{tg} A=\frac{a}{b}$, $\operatorname{tg} B=\frac{b}{a}$, $\operatorname{tg} A\times\operatorname{tg} B=1$，因此 $\operatorname{tg} A$ 和 $\operatorname{tg} B$ 是互为倒数的关系.

3. 在上例中看到，正切的值可以是有限小数，也可以是象 $\operatorname{tg} B$ 那样的无限小数，此外，是无理数的情况也是很多的.

63. 求下图中 $\operatorname{tg} A$ 的值.

解 $BD=\sqrt{13^2-5^2}=12$.

$\therefore\quad \operatorname{tg} A=\frac{12}{15}=0.8$.



注 注意不要解成

$$\operatorname{tg} A=\frac{13}{10}=1.3.$$

64. 测得树影的长是 15 m. 这时，将一根长 1.8 m 的木棒直立在地面上，它的影子长 2 m. 求树的高度.

又，再求出这时太阳的高度(也叫做仰角，即太阳光线和水平面的夹角).

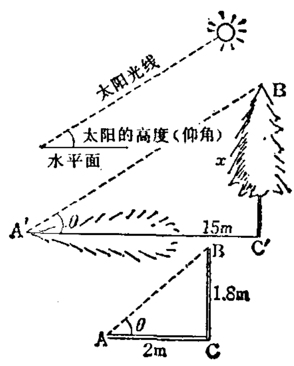
解 $\frac{\text{高度}}{\text{影长}}=\frac{BC}{AC}=\frac{B'C'}{A'C'}=\operatorname{tg}\theta$,

即 $\frac{1.8}{2}=\frac{x}{15}=\operatorname{tg}\theta$.

因此求得 $x=13.5(\mathrm{m})$,

$\operatorname{tg}\theta=0.9$,

$\theta\approx 42°$.

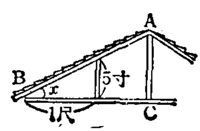


65. 倾斜的程度(斜度)一般用正切来表示. 对于屋顶来说，所谓 5 寸的斜度，是指一尺水平距离升高 5 寸的那种倾斜状况，和正切是相同的. 求 5 寸斜度的屋顶和水平面的夹角.

解 $\operatorname{tg} x=\frac{5}{10}$

$=0.5$.

查表得 $x\approx 26.6°$.



这里，为了求得表中没有的值，让我们复习一下，怎样取用比例部分.

$\mathrm{tg}\,27°=0.5095$，$\mathrm{tg}\,26°=0.4877$.

对应于 0.5 的角在 26° 和 27° 之间.

$\mathrm{tg}\,27°-\mathrm{tg}\,26°=0.0218$…表差

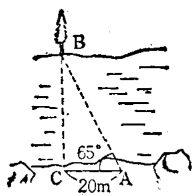
$\mathrm{tg}\,x°-\mathrm{tg}\,26°=0.5-0.4877=0.0123$,

$$\frac{0.0123}{0.0218}=\frac{123}{218}\approx 0.6,$$

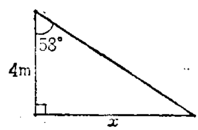
$$\therefore\quad x\approx 26°+0.6°=26.6°.$$

66. 如图 (1)，为了测量河的宽度，选定 B 物作为对岸的目标，并在离开 B 正对面的 C 点 20 m 的河沿取一点 A，测得 $\angle A=65°$. 这条河的宽度是多少?

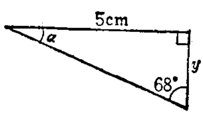
图 (2)、(3)、(4) 中，x，y，z 的值各是多少?



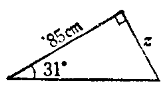
(1)



(2)



(3)

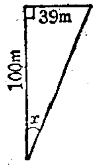


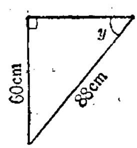
(4)

解　(1) 42.9 m，(2) 6.4 m，(3) 2 cm，(4) 51 cm.

注　(3) 中，若由 $\frac{5}{y}=\mathrm{tg}\,68°\approx 2.4751$，而计算 $y=5\div 2.4751$ 是不合算的. 不如由 $\alpha=90°-68°=22°$，求 $y=5\,\mathrm{tg}\,22°=2.02$ 来得方便.

67. 查表，求下面两图中 $\angle x$ 和 $\angle y$ 的度数.

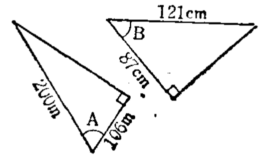




解　$\mathrm{tg}\,x=\frac{39}{100}$，$\sin y=\frac{60}{88}$.

查表得　$x\approx 21.3°$，$y\approx 43.0°$.

68. 查表，求下面两图中 $\angle A$ 和 $\angle B$ 的度数.



解　$\cos A=\frac{106}{200}\approx 0.53$，$\cos B=\frac{87}{121}\approx 0.719$.

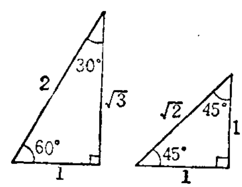
查表得　$\angle A\approx 58°$，$\angle B\approx 44°$.

69. 在下面的空格里填上数值.

	0°	30°	45°	60°	90°
sin					
cos					
tg					

解

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	无穷大



70. 求下列三角函数的值.

(1) $\sec 0°$；　(2) $\csc 90°$.

解　(1) $\sec A=\frac{AB}{AC}$. 当 $\angle A=0°$ 时，AB 和 AC 重迭，因此 $\frac{AB}{AC}=1$，即 $\sec 0°=1$.